

◎ 王向东 主编



金牌奥赛 高分教材

JINPAI AOSAI GAOFEN JIAOCAI

5 数学
年级 SHUXUE
WUNIANJI



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

金牌奥赛**高分**教材系列丛书

JINPAI AOSAI GAOFEN JIAOCAI

- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文三年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文四年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文五年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文六年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文七年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文八年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 语文九年级

- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学三年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学四年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学五年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学六年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学七年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学八年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 数学九年级

- ◆ 金牌奥赛高分教材 英语七年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 英语八年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 英语九年级

- ◆ 金牌奥赛高分教材 物理八年级
- ◆ 金牌奥赛高分教材 物理九年级

- ◆ 金牌奥赛高分教材 化学九年级

ISBN 978-7-308-09463-4



9 787308 094634 >

定价：13.00元

金牌奥赛高分教材

数学 五年级

主 编	王向东		
副 主 编	屠新民	何夏明	
编 委	王慧兴	丁燕雄	张燕勤
	尹克新	陈 杰	刘德存
	王建设	孟令中	李金锋



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛高分教材. 数学. 五年级 / 王向东主编.
—杭州: 浙江大学出版社, 2012. 1
ISBN 978-7-308-09463-4

I. ①金… II. ①王… III. ①小学数学课—教学参考资料 IV. ①G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 265297 号

金牌奥赛高分教材. 数学. 五年级

王向东 主编

责任编辑 夏晓冬

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江时代出版服务有限公司

印 刷 临安市曙光印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 7

字 数 175 千

版 印 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-09463-4

定 价 13.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前 言

中小学学科奥林匹克竞赛(简称学科奥赛)是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生学科竞赛活动。学科奥林匹克是由体育奥林匹克借鉴、引申而来。国际数学奥林匹克(简称 IMO)、国际物理奥林匹克(简称 IPHO)、国际化学奥林匹克(简称 ICHO)等是国际上影响较大的中学生学科竞赛活动,每年都受到了千百万青少年学生的向往与关注。之所以受到如此关注,究其原因奥赛具有很强的创新性、灵活性、综合性以及注重培养学生的探索能力和启发学生的创新意识,而这些也恰恰是素质教育的核心内容。这些也正是未来发展的需要。

中小学学科奥赛编辑部在精心研究了多年国内外这项活动及大量该类优秀图书的基础上,邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁,陆续编写出版了一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科共计 200 多个品种的奥赛和考试类读物。

浙大优学系列学科竞赛丛书的编写宗旨及特点是:

第一:高。来源于教材,又高于教材。来源于教材,就是参照教育部最新课程标准编写;高于教材,就是紧扣各级竞赛大纲,注意与各级竞赛在内容、题型及能力要求等各方面全面接轨,培养兴趣,开发智力,提高能力。

第二:准。科学准确,结构合理。各册按照学科特点进行分层设计,科学编排;依照循序渐进的原则,进行深入浅出的分析,传授全面细致的解题方法。

第三:新。书中选用的题型新颖独特,趣味性强。汇集近年国内外奥赛、中考、高考试题精华,代表当前奥赛的最高水平,体现课程改革的新概念及竞赛命题的新思想、新方法、新动态。

第四:精。精选例题,难而不怪,灵活性强,高而可攀。重在举一反三,触类旁通;重在一题多解、一题多变、一题多问;注重对思维能力的训练,不搞题海战术,使学习成为一种兴趣和爱好。

第五:名。名师荟萃,名赛集锦。中小学学科奥赛编辑部邀请了全国各地一些名牌大学教授、重点中学的特级教师、高级教师、学科带头人、著名奥林匹克金牌教练共同编写。

本系列丛书虽然从策划、编写,再到设计、出版,我们兢兢业业、尽心尽力、鞠躬尽瘁,但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议,欢迎并感谢赐教,让我们共同努力,以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

目 录

一、小数的运算	(1)
奥赛练习一	(3)
二、分数的简算	(4)
奥赛练习二	(6)
三、完全平方数	(8)
奥赛练习三	(9)
四、余数和个位数	(11)
奥赛练习四	(12)
五、包含与排除	(14)
奥赛练习五	(16)
六、面积计算	(18)
奥赛练习六	(20)
七、最大与最小	(23)
奥赛练习七	(24)
八、比较大小	(26)
奥赛练习八	(27)
九、数的整除	(29)
奥赛练习九	(32)
十、奇数与偶数	(34)
奥赛练习十	(36)
十一、质数与合数	(38)
奥赛练习十一	(40)
十二、倍数与约数	(42)
奥赛练习十二	(45)
十三、列方程解应用题	(47)
奥赛练习十三	(49)



十四、逻辑推理	(51)
奥赛练习十四	(53)
十五、归纳与递推	(56)
奥赛练习十五	(59)
十六、有关数列求和问题	(62)
奥赛练习十六	(66)
奥赛综合测试题(一)	(68)
奥赛综合测试题(二)	(72)
参考答案与解析	(76)





一、小数的运算

小数间的运算除常规的运算方法外,还要掌握一定的计算技巧.小数的计算技巧指小数的速算与巧算.它除了可以灵活运用整数四则运算中我们已经学过的许多速算与巧算的方法外,还可以利用小数本身的特点.计算时要注意审题,善于观察题目中数字的特征,灵活地运用小数的性质及运算性质、运算技巧,确定合理简便的算法.

例 1 计算: $9.996+29.98+169.9+3999.5$.

【分析与解】 算式中的加法看来无法用数学课中学过的简算方法计算,但是,这几个数每个数只要增加一点,就成为某个整十、整百或整千数,把这几个数“凑整”以后,就容易计算了.当然要记住,“凑整”时增加了多少要减回去多少.

$$\begin{aligned} & 9.996+29.98+169.9+3999.5 \\ &=10+30+170+4000-(0.004+0.02+0.1+0.5) \\ &=4210-0.624 \\ &=4209.376 \end{aligned}$$

例 2 计算: $1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01$.

【分析与解】 式子的数是从 1 开始,依次减少 0.01,直到最后一个数是 0.01,因此,式中共有 100 个数.而式子中的运算都是两个数相加接着减两个数,再加两个数,再减两个数……这样的顺序排列的.

由于数的排列、运算的排列都很有规律,按照规律可以考虑每 4 个数为一组添上括号,每组数的运算结果是否也有一定的规律? 可以看到把每组数中第 1 个数减第 3 个数,第 2 个数减第 4 个数,各得 0.02,合起来是 0.04,那么,每组数(即每个括号)运算的结果都是 0.04,整个算式 100 个数正好分成 25 组,它的结果就是 25 个 0.04 的和.

$$\begin{aligned} & 1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01 \\ &=(1+0.99-0.98-0.97)+(0.96+0.95-0.94-0.93)+\cdots \\ &\quad +(0.04+0.03-0.02-0.01) \\ &=0.04 \times 25 \\ &=1. \end{aligned}$$

如果能够灵活地运用数的交换规律,也可以按下面的方法分组添上括号计算:

$$\begin{aligned} & 1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01 \\ &=1+(0.99-0.98-0.97+0.96)+(0.95-0.94-0.93+0.92)+\cdots \\ &\quad +(0.03-0.02-0.01) \\ &=1. \end{aligned}$$

例 3 计算: $0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9+0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20$.

【分析与解】 这个算式的数的排列像一个等差数列,但仔细观察,它实际上由两个等差数列组成, $0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9$ 是第一个等差数列,后面每一个数都比前一个数





多 0.1, 而 $0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20$ 是第二个等差数列, 后面每一个数都比前一个数多 0.01, 所以, 应分为两段按等差数列求和的方法来计算.

$$\begin{aligned} & 0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9+0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20 \\ &= (0.1+0.9) \times 9 \div 2 + (0.10+0.20) \times 11 \div 2 \\ &= 4.5 + 1.65 \\ &= 6.15 \end{aligned}$$

例 4 小明在计算某数除以 3.75 时, 把除号看成了乘号, 得结果 225, 求这道题的正确答案.

【分析与解】 结果 225 是原题中被除数乘以 3.75 得来的, 由此就不难求出这个被除数, 从而原题的正确结果也就可以求出来了.

$$225 \div 3.75 \div 3.75 = 16.$$

例 5 比较下面两个积的大小:

$$A = 5.4321 \times 1.2345;$$

$$B = 5.4322 \times 1.2344.$$

【分析与解】 这道题直接观察比较, 不能准确判断, 现在把算式进行适当调整, 再进行比较就很容易了.

$$A = 5.4321 \times 1.2344 + 5.4321 \times 0.0001,$$

$$B = 5.4321 \times 1.2344 + 0.0001 \times 1.2344.$$

$$\text{因为 } 5.4321 \times 0.0001 > 0.0001 \times 1.2344,$$

$$\text{所以 } A > B.$$

例 6 计算: $1994 \times 19951995 - 1995 \times 19941994$.

【分析与解】 本题中的 19951995 和 19941994 分别是 1995 和 1994 的倍数, 19951995 可写为 1995×1001 , 19941994 可以改写为 1994×1001 , 这样很容易看出这道题的结果了.

$$1994 \times 19951995 - 1995 \times 19941994 = 1994 \times 1995 \times 1001 - 1995 \times 1994 \times 1001 = 0.$$

例 7 $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22$ 的整数部分是多少?

【分析与解】 通过观察可以发现: 在这三个乘法式中, 两个因数的和总是固定不变的, 都是 9.25, 我们知道, 两数和相等时, 两数之间的差越小, 积就越大. 比较可知: $8.01 \times 1.24 > 8.02 \times 1.23 > 8.03 \times 1.22$, 而 $9.25 = 8 + 1.25$, 容易知道:

$$8 \times 1.25 > 8.01 \times 1.24 > 8.02 \times 1.23 > 8.01 \times 1.22,$$

$$\text{即 } 8.03 \times 1.22 < 8.02 \times 1.23 < 8.01 \times 1.24 < 8 \times 1.25 = 10,$$

$$\text{则 } 8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 < 3 \times 10 = 30;$$

$$\text{又因为 } 8.03 \times 1.22 > 8 \times 1.22 = 9.76,$$

$$\text{所以 } 8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 > 9.76 \times 3 = 29.28.$$

这样我们就知道, $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22$ 的准确值在 30 与 29.28 之间, 其整数部分一定为 29.



奥数练习一

1. 计算： $1.31 \times 12.5 \times 0.15 \times 8 \times 2$.

2. 计算： $0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.7 + 0.9 + 0.11 + 0.13 + 0.15 + 0.17 + 0.19 + 0.21 + \dots + 0.99$.

3. 在□里填上合适的数,使等式成立.

$$0.27 \times 1.5 + \square \times 1.5 + 1.5 \times 0.32 = 0.77 \times 1.5.$$

4. 比较下面两个积的大小:

$$A = 9.876543 \times 3.456789,$$

$$B = 9.876544 \times 3.456788.$$

5. 试比较 0.1234×0.4321 与 0.12345×0.432 的计算结果哪个大?

6. 根据 $7 \times 11 \times 13 = 1001$,求:

(1) $123123 \div 0.7 \div 11 \div 1.3$;

(2) $0.7 \times 2.5 \times 13 \times 5 \times 11$.

7. 计算： $2007 \times 20082008 - 20072007 \times 2008$.





二、分数的简算

分数之间的四则运算是小学竞赛中常见的一种题目.除了常规解法以外,掌握一些运算技巧,常能起到事半功倍的效果.本节主要通过几个例题来学习技巧及其技巧的应用.

例1 计算: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \dots - \frac{1}{1024}$.

【分析与解】 这道题数字多,算式长,但我们也很容易发现规律:后一个数总是前一个的一半.因为 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$, ..., 所以, $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \dots - \frac{1}{1024} = \frac{1}{1024}$.

例2 计算: $1 \frac{1}{1998} + 2 \frac{3}{1998} + 3 \frac{5}{1998} + 4 \frac{7}{1998} + \dots + 50 \frac{99}{1998}$.

【分析与解】 这是一个等差数列,可以用等差数列的公式来计算:

$$\left(1 \frac{1}{1998} + 50 \frac{99}{1998}\right) \times 50 \div 2 = 51 \frac{50}{999} \times 25 = 1276 \frac{251}{999}.$$

并不简单!所以,我们还可以利用前面讲解过的拆分分数的方法,再结合等差数列的求和公式来计算:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (1+2+3+4+\dots+50) + \left(\frac{1}{1998} + \frac{3}{1998} + \frac{5}{1998} + \frac{7}{1998} + \dots + \frac{99}{1998}\right) \\ &= (1+50) \times 50 \div 2 + \left(\frac{1}{1998} + \frac{99}{1998}\right) \times 50 \div 2 \\ &= 1250 + 1 \frac{251}{999} = 1276 \frac{251}{999}. \end{aligned}$$

要灵活地运用规律,应用公式使计算简便.

接下来我们要讲的是另一种利用分拆来使计算简便的方法.它是把这个分数拆成几个分数的和或差的形式,如 $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

这样,我们可以使一些计算简便.

例3 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{49 \times 50}$.

【分析与解】 这道题中一共有49个分数,如果通分,公分母非常大,是不切实际的.而根据上面的方法,分解后就可以得到:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{49 \times 50} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \end{aligned}$$





$$= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}.$$

例 4 计算: $\frac{1}{1 \times 5} + \frac{1}{5 \times 9} + \frac{1}{9 \times 13} + \frac{1}{13 \times 17} + \frac{1}{17 \times 21}$.

【分析与解】 各个分数的分母均相差 4, 可将其拆成两个分数差, 一般地,

$$\frac{1}{n \times (n+d)} = \frac{1}{d} \times \frac{d}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right) \quad (\text{其中 } n, d \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17} \right) + \frac{1}{4} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{20}{21} = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

例 5 计算: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20}$.

【分析与解】 题中每个分数都符合公式

$$\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{n \times (n+1)} - \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} \right]$$

的特征, 可用拆项法来求解.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{18 \times 19} - \frac{1}{19 \times 20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{18 \times 19} - \frac{1}{19 \times 20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{19 \times 20} \right) \\ &= \frac{189}{760} \end{aligned}$$

例 6 在等式 $\frac{1}{6} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 的括号里填入适当不同的自然数, 使等式成立.

【分析与解】 解答这类题目的方法不止一种, 这里介绍运用约数的方法, 即先明确 6 的约数有 1, 2, 3, 6. 第一步, 把 $\frac{1}{6}$ 的分子、分母同乘以 6 的任意两个约数和; 第二步: 把所得的分数拆成两个约数的和; 第三步, 把可以约分的分数分别约分, 这样两个分数的分母不同, 但分子都是 1, 即为所求.

$$(\text{取 } 1, 2) \quad \frac{1}{6} = \frac{1+2}{6 \times (1+2)} = \frac{1}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$$

$$(\text{取 } 1, 3) \quad \frac{1}{6} = \frac{1+3}{6 \times (1+3)} = \frac{1}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8}$$





$$(\text{取 } 1, 6) \quad \frac{1}{6} = \frac{1+6}{6(1+6)} = \frac{1}{42} + \frac{6}{42} = \frac{1}{42} + \frac{1}{7}$$

$$(\text{取 } 2, 3) \quad \frac{1}{6} = \frac{2+3}{6(2+3)} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

所以本题的全部填法就是上面四种. 本题的一般解法是运用 $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 这个公式来填.

奥数练习二

1. 比较 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ 与 1 的大小.

2. 计算: $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{91 \times 94}$.

3. 计算: $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{91 \times 96}$.

4. 计算: $\frac{1995}{1996} + 9 \frac{1995}{1996} + 99 \frac{1995}{1996} + 999 \frac{1995}{1996} + \frac{1}{499}$.

5. $\frac{1}{2000} + \frac{2}{2000} + \frac{3}{2000} + \dots + \frac{1999}{2000}$.





$$6. \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \cdots + \frac{10}{55} - \frac{11}{155} - \frac{12}{155} - \cdots - \frac{20}{155}.$$

$$7. \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}.$$

$$8. 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000} - \frac{1}{100000}.$$

$$9. \frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \frac{2}{8 \times 10} + \frac{2}{10 \times 12}.$$





三、完全平方数

一个数如果是某一个整数的平方,那么就称这个数为完全平方数.其性质与判定有:

性质 1:任何一个完全平方数的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9.

性质 2:个位数字是 2、3、7、8 的数一定不是完全平方数.

性质 3:奇数平方的十位数必是偶数.

性质 4:个位数与十位数均为奇数的数一定不是完全平方数.

性质 5:完全平方数被 2 或 3 或 4 除的余数是 0 或 1.

性质 6:完全平方数被 8 除的余数为 0 或 1 或 4.

性质 7:在相邻两个完全平方数之间的数一定不是完全平方数.

利用上述性质可以解决许多问题.

例 1 在 50~761 中有多少个平方数?

【分析与解】 通过估算,结合准确计算可知,不小于 50 的最小的平方数是 64,是 8 的平方;不大于 761 的最大的平方数是 729,是 27 的平方.

$$27-7=20,$$

所以,8~27 这 20 个数的平方都在 50~761 中.

即符合要求的平方数有 20 个.

例 2 $7\square 483, \overline{2ab11} \times 7$ 是不是平方数?

【分析与解】 一个数如果是平方数,个位数字一定是 0、1、4、5、6、9 这六个数字中的一个,而 $7\square 483$ 的个位数字是 3, $\overline{2ab11} \times 7$ 的积的个位数字是 7.

所以这两个数都不可能是平方数.

例 3 自然数 20~8881 中有多少个平方数?

【分析与解】 结合估算进行试算,可得不小于 20 的最小的平方数是 25,是 5 的平方;不大于 8881 的最大的平方数是 8836,是 94 的平方.

$$94-4=90,$$

所以,5~94 这 90 个数的平方都在 20~8881 中.

即符合要求的平方数有 90 个.

【评注】 计算量太大时,可以使用计算器.

例 4 指出下列哪些是平方数?

1156, 5487, 5329, 8008.

【分析与解】 先根据平方数个位数字的特征,直接判断 5487、8008 这两个数肯定不是平方数.

再根据平方数的整除性质判断,剩下两个数都符合平方数的特征,有可能是平方数.

最后结合估算进行试算,作出准确判断:

1156 在 30 的平方和 40 的平方之间,个位数字是 6,可能是 34 或 36 的平方.经检验可得: $1156=34^2$.





5329 在 70 的平方和 80 的平方之间,个位数字是 9,可能是 73 或 77 的平方.经检验可得: $5329=73^2$.

所以这题中,1156 和 5329 两个数是完全平方数.

例 5 一本故事书,如果每天读 70 页,5 天读不完,6 天又有余.如果每天读 65 页,6 天读不完,7 天又有余.如果每天读 k 页(k 是整数),正好 k 天读完.这本书有多少页?

【分析与解】 先计算:① $70 \times 5 = 350$; $70 \times 6 = 420$; ② $65 \times 6 = 390$; $65 \times 7 = 455$.

由题意可知,这本书的总页数在 390 到 420 之间,而且是个完全平方数(是 k 的平方).

结合估算进行试算,只有 $20^2 = 400$ 符合要求.

所以这本书的总页数有 400 页.

例 6 甲、乙两人共买 a 只皮球,每只皮球 a 元,付款时,甲先付 10 元,乙再付 10 元,照此轮流付下去,当最后余下的所要付的钱不足 10 元时,轮到乙付.当全部付完款后,乙应再付多少钱给甲,才能使两人所付的钱同样多?

【分析与解】 这些皮球的总价等于 a 的平方,是个完全平方数.

在付款的过程中,付出的整 10 元中,甲比乙多付了一个 10 元,所以两人付出的整 10 元总个数为奇数,即总价的十位数字是奇数.

一个完全平方数只有个位数字为 6 时,十位数字才是奇数.

所以,乙最后一次付出了 6 元,总共比甲少付出 $(10-6)=4$ 元.

乙应再付 $(4 \div 2=)2$ 元给甲,才能使两人所付的钱同样多.

例 7 求证:在 11,111,1111,⋯中,任何一个数都不是完全平方数.

【分析与证明】 已知数都是奇数,因此它们绝不会是偶数的平方.下面证其不能是奇数的平方.

100 能被 4 整除,则它的任何整倍数也能被 4 整除.故用 4 去除 11,111,1111,⋯中的每一个数时,所得的余数等于用 4 去除 11 所得的余数,即为 3.

又易知,任何奇数的平方被 8 除余 1,从而被 4 除也余 1.所以被 4 除余 3 的整数不是奇数的平方.故那些数都不是平方数.

奥赛练习三

1. 证明:完全平方数除以 5 的余数不可能是 2 或 3.

2. 证明:完全平方数除以 9 的余数只能是 0 或 1 或 4 或 7.





3. 证明:对于任意的自然数 m , $25m^2 - 3$ 不是完全平方数.

4. 试证: $66, 666, 6666, \dots$ 都不是完全平方数.

5. 一个四位数是平方数,它的前两位数字相同,后两位数字也相同,这个四位数是多少?

6. 求证: $11, 111, 1111, \dots$ 这串数中没有完全平方数.

7. 在 1 至 300 之间,去掉所有的完全平方数,剩余的自然数之和是多少?