中国精算研究院

China Institute for Actuarial Science

中央财经大学学术著作
出版资助基金资助出版

仿射括号代数理论算法与应用

FANGSHE KUOHAO DAISHU LILUN
SUANFA YU YINGYONG

张 宁◎著

知识产权出版社

仿射括号代数理论算法与应用

张 宁 著

知识产权出版社

内容提要

本书介绍了括号代数的基本理论、仿射括号代数的相关定义与定理以及用于表示的一些相关技术，并在此基础上给出了一些相应的算法，同时附有系统实现的主算法、系统实现的的相关细节以及 Maplc 程序的编制技术。本书适用于高等院校数学系、计算机系的自动推理、不变量应用等专业的高年级本科生及研究生阅读。

责任编辑：兰　涛

图书在版编目(CIP)数据

仿射括号代数理论算法与应用/张宁著. —北京：知识产权出版社，2008.6

ISBN 978-7-80247-309-6

Ⅰ. 仿…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 仿射—代数—算法　Ⅳ. 018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 080311 号

仿射括号代数理论算法与应用

张　宁　著

出版发行：知识产权出版社

社　址：北京市海淀区马甸南村 1 号　　邮　编：100088

网　址：http://www.ipph.cn　　邮　箱：bjb@cnipr.com

发行电话：010-82000893　82000860 转 8101　　传　真：010-82000860-8325

责编电话：010-82000860-8325　　责编邮箱：lantao@cnipr.com

印　刷：知识产权出版社电子制印中心　　经　销：新华书店及相关销售网点

开　本：880mm×1230mm　1/32　　印　张：5.5

版　次：2008 年 6 月第一版　　印　次：2009年 2 月第 2 次印刷

字　数：115 千字　　定　价：18.00 元

ISBN 978-7-80247-309-6/0 · 003(10224)

衷心感谢

感谢中央财经大学“学术著作出版资助基金”的资助！

感谢本书的编辑兰涛女士！

衷心感谢我的恩师和师兄师姐、师弟师妹们！

感谢中国精算研究院的全体同事：孙宝文教授、李晓林教授、齐玲教授、寇业富副教授、刘达副教授、林光彬副研究员以及周明、高洪忠、董洪斌、韩光华、姚海波、欧阳和霞、黄敏燕、李石保、薛丽娜等老师，感谢他们给予我的帮助！

谨以此书献给我的父母、我的妻子蒋彬以及我可爱的女儿，感谢他们！

前 言

括号代数作为不变量理论的一种基本工具已经被广泛研究，并且展示了它的巨大优势。但是相关的研究成果都是以外文形式存在，本书将对此给出一个简要的介绍和说明。同时作为括号代数的自然扩展，仿射括号代数的相关研究很少。无论是它的有效算法还是它的具体应用都极少有人研究，所以本书的主要内容集中于该领域的研究。这些内容主要综合了笔者以前的一些研究成果以及后期发表的论文，同时参考了师友的相关工作。本书在这些相关主题之间进行了必要的衔接过渡，以期通俗易懂、逐步深入。

本书主要内容如下：不变量理论的基本介绍；括号代数理论的基本介绍；仿射括号代数与括号代数的整除性理论；仿射括号代数的展开理论；仿射括号代数的交换算法以及其他算法；仿射括号代数在“自动证明”等方面的应用等。

本书内容的特点体现在以下方面。

1. 讨论了包含边界算子的展开问题，分析了边界算子一些新的性质，给出了新的相关重要公式；完善和补充了仿射几

何的构造方式、元素的表示以及消元方法。

2. 提出了交换算法等几个有效的仿射括号代数新算法。

3. 讨论了括号代数、仿射括号代数的整除性问题。

4. 给出了仿射括号代数以及括号代数的基本运算系统的实现方式。

5. 基于符号计算软件 Maple 10 中实现了仿射括号代数的基本算法，并对此系统做了详细的介绍。

6. 书中附有大量的实例以及关键程序代码。

目　录

第1章 引　言

本章介绍了不变量理论及括号代数的历史发展，同时分析了进行该研究的必要性。仿射括号代数作为括号代数的年轻分支，无论从理论上还是应用上都有很大的研究空间。本章最后特别说明了本书研究的主要具体问题、主要内容以及主要结果。

1.1 括号代数发展及应用

不变量理论是数学发展史上一个年轻而又富有活力的领域，而括号代数正是它的有效工具之一。

我们知道最早的解析几何本质上是研究矩阵、向量在一些线性群的作用下不变性质的学科，而括号代数正是这种思想应用于射影几何的结果。

1890 年和 1893 年，Hilbert 运用不变量理论首次证明了

Hilbert 三大定理：零点定理、基底定理和合冲理想定理[13~15]。它们为现代代数的发展奠定了基础。通常我们从代数的角度出发认为，不变量理论研究的是在某些群作用下多项式的不变性质。Klein 从几何角度出发，认为不变量理论是研究在几何变化下几何图形的不变性质。所以不变量理论其实是与坐标无关的，那么是否有一种研究不变量的无坐标工具呢？1926 年，Van der Waerden 运用括号给出了不变量理论中的恒等式。1936 年，Weitzenböck 给出了 Grassmann-Plücker 关系式生成特征为零的多重向量空间上的理想的结论，即特征为零的不变量第二基本定理。在此之后，1939 年 Weyl 给出了特征为零的域上的不变量理论第二基本定理：f是 Grassmann 代数簇生成理想中的一个多项式，如果 f 在行列式是 1 的线性群的作用下不变，则f可以被表示为括号生成的多项式。

不变量理论和括号代数接着经历了 20 多年的沉睡期，并在 20 世纪 70 年代重新繁荣起来。1971 年，Whilteley 从逻辑角度证明了所有的射影几何定理都可以用括号来表述和证明。1973 年 White 系统地给出了括号代数的定义。之后，分别在 1974 年和 1976 年，Doubilet，Rota 和 Stein，Concini，Procesi 给出了不变量理论第一基本定理在任意特征的无限域上都是成立的基本理论[71,72]。1978 年 Désarměnien，Kunng 和 Rota 给出了不变量的第二基本定理在任意特征的无限域上都是成立的基本理论。1989 年，Sturmfels 和 White 把 Alfred Young 的拉直算法应用于括号代数，并且给出了括号代数的合冲理想的 Gröbner 基，解决了括号代数在数域上的表示问题。

需要说明的是随着括号代数的相关研究的进展，它也被应用到越来越多的领域。

第一类是括号代数在射影几何中的应用：

（1）对射影几何模型的括号表示基本完善。最基本的几何表示是根据几何意义得到超平面的几何表示，三点共线的几何表示以及交比的表示。二次曲线的表示是由 White 在 1989 年给出的，在此，射影平面的二次曲线可以表示为 4 次 2 项的括号方程，同样他也给出了射影空间中二次曲面的表示，这是一个 5 次 138 项的括号方程。1991 年，Whiteley 给出了一般的几何模型都可以用括号坐标来得到括号多项式表示的结论，当然这里不是最小表示，比用坐标多项式表示还要复杂。

（2）寻找坐标表示的多项式的几何意义。假定要寻找一个坐标形式的多项式 f 的几何意义，首先需要把 f 转化为括号多项式，然后进行 Cayley 分解，从而可以得到 f 的几何意义，但是一般来说第一个过程因为有 syzygy 的存在而变得非常困难。对于第二步，1988 年，White 和 Mcmillan 对此做出了一些初步的工作。1991 年 White 给出了多重线性括号多项式的 Cayley 分解算法。同年 Sturmfels 等给出了整系数的齐次括号多项式的 Cayley 分解算法。

第二类是括号代数在离散几何方面的应用：

（1）格论不等式的表达。1999～2000 年，Mainetti 和 Yan 运用 Grassmann-Cayley 代数、括号代数给出了格论不等式的表示，并且发现这些不等式对应着射影几何定理。

（2）抽象图的坐标化。可计算综合几何的一个基本问题

就是找到抽象定义的图的坐标化或者不可实现的证明。括号代数和 Grassmann-Cayley 代数可以很好地解决这类问题。在过去的 20 年，这方面已经取得了长足的进步。

第三类是括号代数在代数几何上的应用：例如用于 Chow 形的计算，1994 年 Dalbec 和 Sturmfels 运用 Grassmann 坐标极大地简化了 Chow 形的计算。

第四类是括号代数在计算机视觉（computer vision）中的应用。

1991 年，Crapo 运用不变量理论给出了三维场景恢复的条件。1995 年，Faugeras 和 Mourrain 运用 Grassmann-Cayley 代数以及括号代数给出了匹配图像之间点和线对应的约束。1999 年，Bayro-Corrochano 等运用括号形式的 Passcal 定理模型对摄像机标定（calibration），同年，Csurka 等运用括号计算了两幅图像之间的不变量，并且应用到图像匹配方面。2004 年之后，Hongbo Li 和 Lina Zhao 等首次运用括号代数、共形几何代数进行了线画图的高维恢复。

第五类是括号代数在机械学、结构学以及机器人学方面的应用：这当中包括运用括号代数分析连杆机构的奇异性条件、刚体的无限小描述等，也包括著名的 Steward 平台的相关研究等。

第六类是括号代数在计算机图形学、物理学等方面的应用：例如曲线曲面造型，宇宙学等相关方面。

第七类是括号代数在自动证明以及自动推理领域的应用。

1.2 自动证明与括号代数的应用

数学通常的形式有两种，一种是烦琐但是可以机械化的运算，另外一种是技巧性稍高的证明。王浩先生对比了计算和证明：计算容易、烦琐、刻板和枯燥；而证明困难、简略、灵活而优美。那么是不是证明也可以机械化呢？这就是自动证明问题。

早在17世纪，人们就已经有这样的想法，这条思路的根本就是把证明这种高技巧的脑力劳动转化为虽然烦琐但是可以刻板化有一定通用性的计算。直到19世纪末，在一批数学家的努力下，这种方法才有了明确的数学刻画，而真正的转折点是在计算机出现之后，这是因为：烦琐的计算需要计算机来支持，而机械化的思想和计算的共性可以用程序来实现，这样自动证明就蓬勃发展起来了。

20世纪初期，数理逻辑学家深入探讨了定理自动证明的可能性，得出的结论大多是悲观的。例如歌德尔就曾提出，即使是初等数论中的定理，进行自动证明也是不可能的。同时，有数学家从另外一个角度提出，初等几何定理进行自动证明是可能的。

美国于1956年开始进行机器自动证明的研究。1959年王浩先生用机械化的算法证明了《数学原理》中数百条定理，

引起了轰动，但是之后的很多研究却遭遇了挫折。这时我国著名数学家吴文俊先生提出了吴方法，这在定理自动证明领域取得了巨大的成功。

进行自动证明的方法基本上分为两大类，一类是坐标化方法，例如著名的吴方法；另外一类是无坐标的定理自动证明方法。无坐标的方法大致有以下几种。

（1）第一种方法是括号代数。

1991 年 Whiteley 利用括号坐标表示一个几何模型，并从 Hilbert 零点定理探讨了运用不变量进行射影几何定理机器证明的可能性。这种方法本质上是把 Gröbner 基的方法应用到括号代数中，这样就产生了运用拉直法则（straightening）的射影几何机器定理证明的新方法。关于拉直法则，我们将在第 2 章介绍。

1988 年 White 和 Mcmillan 运用 Cayley 分解的技巧，给出了一种几何定理机器证明的方法。1991 年，Sturmfel 和 Whiteley 把一个几何定理的结论转化为 Cayley 表达式，然后通过交、并运算转化为括号多项式，给出了射影几何定理机器证明的另外一个方法。这两个方法的缺点是证明过程中括号多项式迅速膨胀，计算和收缩都变得非常困难。

1990～1994 年，Richter-Gebert 提出了运用双二次 final 多项式的基于括号代数的射影几何定理机器证明的新方法，给出了具有几何意义的较短的可读证明。尽管这种方法不是一种完全的方法，但是适用于几乎所有的射影几何 Incidence 部分定理的证明。同时 Crapo 和 Richter-Gebert 把二次 final 多项式的方法推广到平面度量几何的定理机器证明上。他们把射影平面

中的一条固定直线作为无穷远直线，把其上的两个固定点取作原点，实现从射影几何过渡到度量几何，在理论上实现了基于括号代数的双二次 final 多项式的平面几何定理的机器证明。

2001 年，Li 在括号代数的基础上，定义了 Clifford 括号代数，并利用 Clifford 代数强大的计算功能，给出了度量几何的定理机器证明的新方法。此方法给出了五圆定理的第一个纯代数的方法。此后 Li 运用共形几何代数进行了欧氏几何定理的机器证明。这种证明更确切地可以称为推理，通过去除题设中的一个、两个甚至多个条件，然后试图通过结论将它们恢复出来。Li 和 Wu 还在[51,52]中给出了射影几何定理的有效短证明，这当中包括射影二次曲线部分的几乎所有定理。

（2）第二种方法是面积法。

面积法是 Zhang 在 1982 年就已经发现了。后来在 1992 年，Chou、Gao 和 Zhang 在此基础上给出了几何定理可读机器证明的方法，适用于射影几何、欧氏几何。1996 年，Yang、Gao、Chou 和 Zhang 把面积法推广到了非欧几何。

（3）第三种方法是 Grassmann-Cayley 代数。

1994 年，Mourrain 提出了运用 Gramer 法则的射影几何定理机器证明的方法。这种方法的特点是：①以吴方法为基础；②在消元的最后一步，引入坐标来保证方法的完全性；③没有简化消元法则，导致中间过程中项数大量膨胀[90,91]。

（4）第四种方法是 Clifford 代数。

1994 年 Li 和 Cheng 首次提出了用 Clifford 代数进行几何定理的机器证明，并且给出了一般的几何定理机器证明的框架，它综合了吴方法和 Clifford 代数。因为 Clifford 代数具有强大的

计算功能，所以从代数方面讲，这种方法包括了括号代数、面积、Grassmann-Cayley 代数三种方法。它不仅能产生可读证明，而且也适用于各种经典几何和微分几何。

1996 年，Wang、Fèvre 等利用重写法则，给出了另外一种基于 Clifford 代数的定理机器证明的新方法。1998 年，Yang、Zhang 和 Feng 给出了基于 Clifford 代数的正则化技术的几何定理机器证明的方法，它可以用于二次曲线定理的证明，但是缺点是一开始就采纳了二次曲线的一对主轴作为固定标架。

1.3 本书的内容结构与符号约定

1.3.1 内容结构

本书研究内容的出发点基于如下几点。

(1) 括号代数和仿射括号代数的除法问题，还有项数问题，一直是一个公开问题，本书想做一点这方面的理论工作。

(2) 关于射影几何和欧氏几何部分，已经有很不错的括号代数计算程序，对应于仿射几何的括号代数计算也亟须一套系统来实现。

(3) 把已经很完善的射影几何定理机器证明部分内容借鉴并推广到仿射几何中，不能推广的要建立新的理论，同时寻找更多仿射几何本身的特点和例子，发展出一套完善的计算