普通高等教育"十二五"规划教材
21世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

复变函数与积分变换

刘子瑞　徐忠昌　主编

第二版

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
21世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

复变函数与积分变换

（第二版）

刘子瑞　徐忠昌　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

《复变函数与积分变换》(第二版)是在第一版的基础上，结合编者多年的教学经验以及原教材的使用情况，充分吸收国内外同类教材的优点，注意保留第一版的知识体系与风格，强化数学实验的教学与实践。内容分为复变函数、积分变换两篇，包括复变函数的基本概念，解析函数，复变函数的积分、级数、留数、共形映射，傅里叶积分变换，拉普拉斯积分变换。

教材结构严谨、逻辑清晰、深入浅出、例题丰富、方便自学。可作为高等学校信息科学计算专业及非数学专业的复变函数与积分变换课程的教学用书，也可作为科技工作者一本简便实用的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/刘子瑞，徐忠昌主编. —2版. —北京：科学出版社，2011.8

普通高等教育“十二五”规划教材. 21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-032047-6

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①刘… ②徐… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第163933号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉 蔡 莹

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年2月第 一 版

2011年8月第 二 版 开本：B5(720×1000)

2011年8月第四次印刷 印张：19 1/2

印数：17 001—22 000 字数：374 000

定价：33.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学精品教材》丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)数学系列教材,体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由 12 所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江志宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　殷志祥　高明成　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾时,前者优先,不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类:基础知识类;方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将Mathematica、Matlab、SAS、SPS等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样. 书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想),体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式,提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练,通过完整的程序与实例介绍,教会学生分析问题、动手编程、分析结果,提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样. 书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

第二版前言

本书第二版是在第一版基础上，根据我们多年教学实践以及学生使用情况，进行全面修订而成的．在修订过程中，我们吸收了国内外同类教材的优点，并注意保留了原教材的系统和风格，同时增强了数学软件的介绍．在内容取舍、例题选择、习题配备以及叙述方式上，注意反映教学的特点和要求．为了适应复变函数与积分变换课程教学时数减少的情况，在保证课程教学基本要求的前提下，对一些理论性较强的内容作了适当的精简和合并．但同时增加了在科学技术等方面的应用，增加较多的部分主要涉及傅里叶变换以及拉普拉斯变换．

本教材有以下几个方面的特点：

(1) 教材叙述上尽量做到联系工科专业的实际，注重应用，力图将概念写的清晰易懂，便于教学．

(2) 例题和习题的选择上作了努力，这些题目既具有启发性，又有广泛的应用性．

(3) 追求用较小的篇幅把一些最基本的概念和方法以最简明的方式介绍清楚．

(4) 在整体框架方面，保证了基本概念、基本理论及基本方法的完整．在具体内容取舍上，结合工程实际，但同时又兼顾了理论上的系统性和逻辑上的严谨性．

(5) 教材融入了编者们多年的教学经验，结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂．教材编写中吸收了当前教材改革中一些成功的改革举措，是一本适合时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材．

本书由刘子瑞、徐忠昌主编，方瑛、周本虎、瞿勇、艾小川任副主编．全书共分 2 篇 9 章．

限于编者水平，教材中难免存在不妥之处，希望广大读者批评指正．

编　者

2011 年 5 月

前　　言

复变函数与积分变换课程是工科大学生的一门重要基础理论课. 为帮助学生学好此课程,数学教育工作者编著了许多教材以及各种辅导书. 特别是随着近年来高等教育改革力度的加大,大学数学教学课时的削减以及大学生考研热的掀起,各类教材脱颖而出,争奇斗艳. 为了能提供一本既能集中各类教材的优点,又能与当今教学学时数及教学基本要求相吻合、篇幅适中的教材,特编写本书.

本书共分两篇:第一篇复变函数涵盖了复变函数的基本概念,解析函数,复变函数的积分、级数、留数、保角映射等基本内容;第二篇积分变换介绍了傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换. 本书有以下有别于其他教材的鲜明特点:

(1) 习题类型丰富. 各章习题均含填空题、选择题、计算题以及证明题.

(2) 各章配有重要概念英语词汇和英文习题.

(3) 书后附录给出了各部分内容的数学实验.

(4) 附三套自测题,方便读者检查自己的学习情况.

本书可作为高等院校工科各专业的复变函数与积分变换课程教材,也可供教研工作者参考.

本书由刘子瑞、梅家斌主编,马德明、方瑛任副主编. 参加本书编写工作的有:海军工程大学刘子瑞、徐忠昌、周本虎,武汉科技学院梅家斌,湖北工业大学方瑛,空军雷达学院马德明.

限于编者水平,教材中不妥之处难免,恳请读者不吝指正.

编　者

2006 年 10 月

目　　录

第1篇　复变函数

第 2 篇　积 分 变 换

第1篇 复变函数

高等数学的研究对象是自变量为实数、函数值亦为实数的实函数.从映射的观点看,实函数是实数到实数的映射,随着理论探讨的深入和生产实践的发展,又提出了对复变函数的研究也就是复数到复数之间的映射的研究,研究复变数之间的相互依赖关系,就是复变函数的主要任务.

意大利数学家卡尔达诺(H. Cardano, 1545)在解代数方程时,首先产生了复数开方的思想,出现了$\sqrt{-15}$,但这只不过是一种纯形式的表示,当时谁也说不上这样的表述有什么好处,用类似形式的数进行计算又得到一些矛盾,因而长期以来都被看成不能接受的虚数,一直到17世纪,随着微积分的发明与发展,情况才逐渐有了改变,负数开方以及所对应的复数逐渐被人们所认识.

关于复数理论最系统的论述,是由瑞士数学家欧拉(L. Euler)作出的.他在1777年系统地建立了复数理论,发现了复指数函数和三角函数之间的关系,创立了复变函数论的一些基本定理,用符号“i”作为虚数单位,也是他首创的,此后复数才被人们广泛承认和使用.

在19世纪,复变函数的理论经过法国数学家柯西(A. Cauchy)、德国数学家黎曼(B. Riemann)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)的巨大努力,形成了非常系统的理论,并且深刻地渗入代数学、数论、微积分方程等数学分支,同时,它在热力学、流体力学、电学等方面也有很多应用.

20世纪以来,复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面,与数学中其他分支的联系也日益密切,致使经典的复变函数理论,如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用,并且开辟了一些新的方向,如多元复变函数论、广义解析函数论等.

复变函数研究的中心对象是解析函数,因此,复变函数论又称为解析函数论.

由于实数是复数的特殊情况,因此复变函数理论中的许多结论与实函数中是类似的,在学习复变函数中,我们应注意与高等数学中关于实函数的概念和性质进行比较,找出其共同点,但更重要的是应找出其不同点,这样便于我们从更高的角度认识问题、研究问题.这也是学好复变函数课程行之有效的方法.

第1章　复数与复变函数

本章首先给出了复数的概念、复数的运算法则以及复数的几种不同表示方法，然后引入区域的概念并在此基础上介绍复变函数的概念以及复变函数的极限及连续性等概念，它们是高等数学中函数、极限及连续性等概念在复数域上的推广.

1.1　复数及其代数运算

1.1.1　复数的概念

我们知道代数方程 $x^2=-1$ 在实数范围内无解，这是因为任何一个实数的平方都不可能等于 -1，现在令 $\mathrm{i}^2=-1$，则 i 为方程 $x^2=-1$ 的解，称 i 为虚数单位.下面引入复数的概念.

我们称形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数为复数，其中 x 和 y 是任意实数，分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}=x$，此时复数 z 即为实数 x；当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=0+y\mathrm{i}=y\mathrm{i}$，称为纯虚数.

两个复数相等是指它们的实部和虚部分别相等.因此若一个复数等于零，则它的实部和虚部都为零.

需要注意的是：实数能够比较大小，但是复数却不能比较大小.读者可思考这是为什么？

1.1.2　复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减、乘法运算定义如下：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2), \tag{1-1}$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1-2}$$

以上两式分别称为复数 z_1 与 z_2 的和、差与积.

同实数中除法的定义一样，我们称满足 $z_2\cdot z=z_1\,(z_2\neq 0)$ 的复数 z 为 z_1 与 z_2 的商，记为 $\dfrac{z_1}{z_2}$，由乘法定义，有

$$(x_2+\mathrm{i}y_2)(x+\mathrm{i}y)=(xx_2-yy_2)+\mathrm{i}(xy_2+x_2y)=x_1+\mathrm{i}y_1$$

所以
$$xx_2-yy_2=x_1,\quad xy_2+x_2y=y_1,$$

解得
$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

即

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1-3}$$

不难验证复数的运算满足交换律、结合律与分配律,这与实数的运算性质是一致的. 即

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1z_2=z_2z_1;$$
$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

实部相同且虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数,即 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$,于是 $\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$,如 $\overline{3-2\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i}$.

共轭复数有以下运算性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}}=z$;

(3) $z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

全体复数并引进上述加、减、乘、除四种算术运算后就称为复数域.

注 在计算 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 时,常利用共轭复数的性质(3),将分子、分母同时乘以分母的共轭复数.

例 1.1 设 $z_1=5-4\mathrm{i}$, $z_2=-3+5\mathrm{i}$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 及 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-4\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}}=\frac{(5-4\mathrm{i})(-3-5\mathrm{i})}{(-3+5\mathrm{i})(-3-5\mathrm{i})}$$
$$=\frac{(-15-20)+(12-25)\mathrm{i}}{34}=-\frac{35}{34}-\frac{13}{34}\mathrm{i},$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{35}{34}+\frac{13}{34}\mathrm{i}.$$

例 1.2 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解 $z=-\frac{1}{i}+\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}+\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$=i+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i,$$

所以

$$\mathrm{Re}(z)=-\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{5}{2},\quad z\cdot\bar{z}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{2}.$$

例 1.3 设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 证明: $z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$

证法 1

$$\begin{aligned}z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)\\&\quad+(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)&=2\mathrm{Re}[(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)]\\&=2\mathrm{Re}[(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)]\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)\end{aligned}$$

所以

$$z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2).$$

证法 2 由复数的共轭性质,得

$$z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=z_1\cdot\bar{z}_2+\overline{z_1\cdot\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2).$$

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面

任一复数 $z=x+iy$ 与一对有序实数 (x, y) 构成一一对应,所以,对于平面上给定的直角坐标系,复数 $z=x+iy$ 可以用该平面上坐标为 (x, y) 的点来表示,x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在的平面称为复平面或 z 平面. 这样复数与复平面上的点构成一一对应,所以常把点 z 称为复数 z.

在复平面上,复数 z 还能用从原点指向点 (x, y) 的平面向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1-1),向量的长度称为 z 的模或绝对值,记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-4}$$

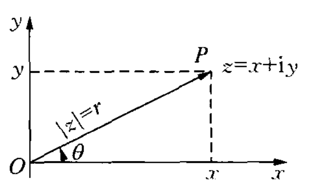

图 1-1

显然,以下各式成立:

$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,$

$|z|\leqslant|x|+|y|,$

$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$

在 $z \neq 0$ 的情况下，表示 z 的向量与 x 轴正向的交角 θ 称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\, z$. 显然

$$\tan(\mathrm{Arg}\, z) = \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1-5}$$

我们知道，始边与终边均相同的两个角角度相差 $2k\pi$ (k 为整数)，因此若 θ 是 $z \neq 0$ 的一个辐角，则 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐角，即 z 有无穷多个辐角. 则 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1-6}$$

k 每取一个值，就得到 $\mathrm{Arg}\, z$ 的一个分支，可见 $\mathrm{Arg}\, z$ 有无穷多个分支.

在 z 的辐角中，将满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，记为 $\arg z$.

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，z 的辐角不确定.

辐角的主值 $\arg z$ $(z \neq 0)$ 可由反正切值 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0,\ y \geqslant 0 \text{ 或 } y \leqslant 0; \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0,\ y > 0 \text{ 或 } y < 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & \text{当 } x < 0,\ y > 0 \text{ 或 } y < 0; \\ \pi, & \text{当 } x < 0,\ y = 0, \end{cases} \tag{1-7}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

两个复数 z_1 与 z_2 的加、减法运算和相应向量的加、减法运算一致(图 1-2).

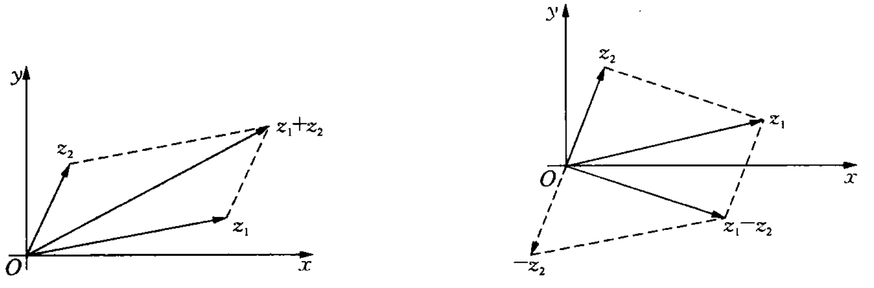

图 1-2

由向量的几何意义知 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离(图 1-3). 由于三角形的两边之和不小于第三边，再结合图 1-2 和图 1-3，易得

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geqslant \big| |z_1| - |z_2| \big|. \tag{1-8}$$

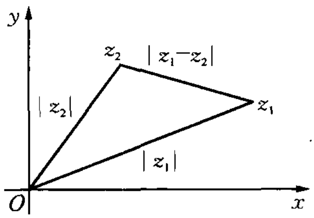

图 1-3

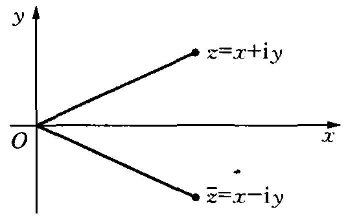

图 1-4

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内关于实轴对称(图 1-4),因此 $|z|=|\bar{z}|$;若 z 不在负实轴和原点上,还有 $\arg z=-\arg\bar{z}$.

利用直角坐标和极坐标的关系:$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 可以把 z 表示成下面的形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-9}$$

称为复数的三角表示式.

利用高等数学中的欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 可得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-10}$$

该形式称为复数的指数表示式.

复数的各种表示式可以相互转换,下面是一些具体的例子:

例 1.4　将下列复数化成三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}+2\mathrm{i}$;　(2) $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

解　(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$,

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{2}{-\sqrt{12}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

由于 z 在第二象限,所以 $\theta=\frac{5}{6}\pi$. 由此得 z 的三角表示式为

$$z=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

(2) *方法 1*　因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 所以

$$r=|z|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2},$$