



普通高等教育“十二五”规划教材

材料力学精要和题解

刘杰民 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



普通高等教育“十二五”规划教材

材料力学精要和题解

主	编	刘杰民	
编	写	侯祥林	孙雅珍
		苑学众	洪 媛



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书是《普通高等教育“十一五”规划教材 材料力学教程》(刘杰民主编)的配套用书。全书共分3个部分,第1部分为材料力学精要,该部分内容对材料力学的核心概念、基本理论和基本方法进行了高度概括;第2部分为《普通高等教育“十一五”规划教材 材料力学教程》各章后习题的解答,共11章,包括绪论、轴向拉伸与压缩、扭转、弯曲内力、截面几何性质、弯曲应力、弯曲变形、应力应变状态分析、强度理论、压杆稳定和能量法;第3部分给出了一份典型试题,并对每道试题进行了分析和解答。

本书可供高等院校的本科生,高职高专、成人教育、函授和自学考试等类型的学生学习材料力学时参考,也可作为报考相关专业研究生的复习资料,并可作为教师的教学参考书。



图书在版编目(CIP)数据

材料力学精要和题解/刘杰民主编. —北京:中国电力出版社,2011.1

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-1207-4

I. ①材… II. ①刘… III. ①材料力学-高等学校-教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第010807号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街19号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2011年3月第一版 2011年3月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 11.25印张 273千字
定价19.00元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前 言

本书是与《普通高等教育“十一五”规划教材 材料力学教程》(由刘杰民主编,侯祥林、孙雅珍、苑学众、洪媛参编)相配套的教学辅导书。

材料力学是一门与机械、航空、土木、设备和工程等专业紧密结合的技术基础学科,可培养大学生理论联系实际的能力。材料力学习题很多来自工程实际,将理论应用于解决材料力学问题的困难之处在于,要针对具体问题进行力学分析。解题是克服这一困难的重要环节。

在《普通高等教育“十一五”规划教材 材料力学教程》中,由于每章的主要内容都在章末最后一节(本章要点)列出,因此本书与其他大多数配套教材的编写方式不同。本书把材料力学的核心概念、内在结构、研究方法及需要注意的问题放在第1部分,命名为材料力学精要,这不仅仅是形式上的变化,而是材料力学课程的内在要求。经过这样处理,把材料力学的全貌清楚地展现在读者面前,使读者不致被材料力学概念多、内容多、公式多的表面现象所困扰,能够清楚地认识到所解决的问题是什么类型问题以及如何解决。编者希望读者特别是考研的学生能仔细地阅读第1部分。

第2部分是对《普通高等教育“十一五”规划教材 材料力学教程》各章后习题所作的解答,各章习题数量适度、题型多样、从易到难、理论与工程实例并重。题解注意解题的思路和强调解题的步骤,以“注”的形式对容易混淆的知识点、扩展知识点和概念性较强的知识点给予特别说明。第3部分给出了一份材料力学典型试题,并对每道试题进行了分析和解答。该份试题及分析对于全面掌握材料力学内容是有帮助的。

本书第1部分及第2部分第1、4、8章和第3部分由刘杰民编写;第2部分第2、3章由孙雅珍编写,第5、7章由洪媛编写,第6、10章由苑学众编写,第9、11章由侯祥林编写。全书由刘杰民统稿。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

2010年5月

目 录

前言

符号表

第 1 部分 材料力学精要

1.1 材料力学的核心概念	1
1.2 应力—应变关系	4
1.3 材料力学内在结构和研究方法	5
1.4 几个需要注意的问题	7
1.5 材料力学公式的相似性	8
1.6 示例	9

第 2 部分 习 题 解 答

第 1 章 绪论	13
第 2 章 轴向拉伸与压缩	18
第 3 章 扭转	34
第 4 章 弯曲内力	44
第 5 章 截面几何性质	59
第 6 章 弯曲应力	68
第 7 章 弯曲变形	85
第 8 章 应力应变状态分析	115
第 9 章 强度理论	125
第 10 章 压杆稳定	136
第 11 章 能量法	149

第 3 部分 典型试题及分析

典型试题	165
试题分析	168
参考文献	173

第1部分 材料力学精要

1.1 材料力学的核心概念

1.1.1 内力

材料力学的主要任务是研究杆件在外力作用下的强度、刚度和稳定性,为合理设计构件提供基本理论和分析方法,简称为研究一个 R(Rod)的三个 S(Strength、Stiffness and Stability)。为了完成这个任务,必须弄清楚三个核心的概念:内力、应力和应变及其相互关系。

内力集度是由外力在变形体内产生的相互作用力。在材料为均匀连续各向同性的基本假设下,内力集度 q (也称为全应力) 是连续分布的,全应力可分解为正应力 σ 和切应力 τ ,三者之间满足勾股定理。横截面上的内力集度向截面形心的简化结果就是内力分量,即轴力、剪力、扭矩和弯矩。因此,内力是联系外力与应力的桥梁,是材料力学的核心概念之一。

用截面法求内力,需要把构件假想地一分为二,以其中一部分作为研究对象,根据静力学平衡理论,截面上的内力分量和作用在该部分上的外力构成平衡力系,其平衡方程式的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} F_N + \sum F_{i,x} &= 0 & T + \sum M_x(\mathbf{F}_i) &= 0 \\ F_{Sy} + \sum F_{i,y} &= 0 & M_y + \sum M_y(\mathbf{F}_i) &= 0 \\ F_{Sz} + \sum F_{i,z} &= 0 & M_z + \sum M_z(\mathbf{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1-1)$$

由式 (1.1-1) 即可求得内力分量。

截面法是求内力的基本方法。需要指出的是,虽然截面法求内力的步骤很清楚,但是当大量截面的内力需要求得时,要画出大量的受力图,列出大量的平衡方程。因此,本文作者基于平衡理论,推导了**等效截面法**。等效截面法求内力的公式为

$$\left. \begin{aligned} F_N &= \sum F'_{i,x} & T &= \sum M_x(\mathbf{F}'_i) \\ F_{Sy} &= \sum F'_{i,y} & M_y &= \sum M_y(\mathbf{F}'_i) \\ F_{Sz} &= \sum F'_{i,z} & M_z &= \sum M_z(\mathbf{F}'_i) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-2a)$$

$$\left. \begin{aligned} F'_N &= \sum F_{i,x} & T' &= \sum M_x(\mathbf{F}_i) \\ F'_{Sy} &= \sum F_{i,y} & M'_y &= \sum M_y(\mathbf{F}_i) \\ F'_{Sz} &= \sum F_{i,z} & M'_z &= \sum M_z(\mathbf{F}_i) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-2b)$$

式 (1.1-2b) 表明,左段右截面上的轴力等于右段构件上所有外力在轴线方向上投影的代数和;剪力分别等于右段构件上所有外力在垂直轴线方向上投影的代数和;扭矩等于右段构件上所有外力关于轴线的力矩的代数和;弯矩 M_y 等于右段构件上所有外力关于过形心且垂直于轴线的坐标轴 y 的力矩的代数和;弯矩 M_z 等于右段构件上所有外力关于 z 轴的力矩的代数和。当然,右段左截面上的内力分量与左段右截面上的内力分量是完全相等的,之所以把

截面区分为左段右截面和右段左截面是为了便于写出内力分量的表达式。

式 (1.1-1) 表示截面内力是保持截面所在杆段静力平衡所必需的抗力, 式 (1.1-2) 则可解释为截面内力是作用在截面另一侧杆段上所有外力对该杆段的等效作用。当使用逐段分析叠加法求某段梁的弯曲变形时, 就可以根据内力含义的第二种解释, 把一部分杆件上作用的外力平移到该段梁的一端截面, 对该梁段的变形进行分析。

1.1.2 正应力与切应力

描述变形体内一点所受内力的强弱情况的度量是应力, 正应力使得所作用的微体受拉伸或压缩, 切应力使得所作用的微体受剪切变形, 应力超过一定的限度, 材料就要发生破坏。因此, 应力是核心概念之一。

描述一点处应力分量的变化情况应借助于单元体。单元体通常为微小正六面体, 一点处各微面上应力的变化情况称为该点处的**应力状态**, 如图 1.1-1 所示。其中, 图 1.1-1(a) 所示为单向应力状态; 图 1.1-1(b) 所示为纯剪切应力状态, 图 1.1-1(c) 所示为平面应力状态。

杆件受轴向拉伸和纯弯曲时, 横截面上各点对应的应力状态为单向应力状态; 而圆轴受外扭力偶作用时, 对应的为纯剪切应力状态。横力弯曲和弯扭组合变形对应的应力状态一般为两相应力状态。

只要知道单元体各微面上的应力分量, 就能求出过该点其他任意截面上的应力分量。平面应力状态任意斜截面上的应力分量为

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.1-3a)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1.1-3b)$$

主应力描述的是一点处应力状态的应力不变量, 所谓应力不变量就是指其大小和方向都是唯一的。对于图 1.1-1(c) 所示的平面应力状态, 其在 xy 平面内的极值应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.1-4)$$

假设 $\sigma_{\max} > 0$, $\sigma_{\min} < 0$, 则主应力为 $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ 。

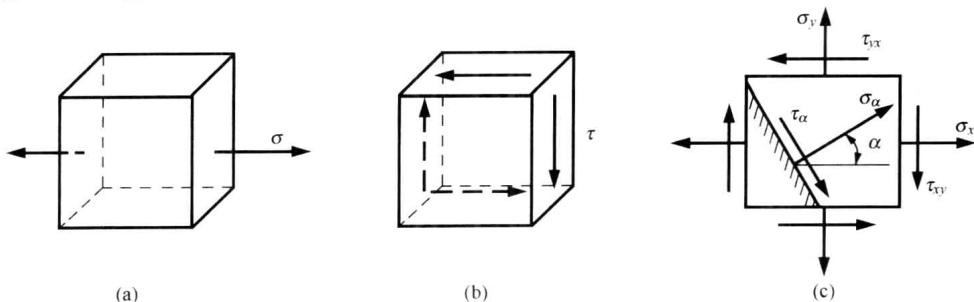


图 1.1-1 典型的应力状态

主应力在建立复杂应力状态下材料的破坏判据时具有重要的意义。因此, 应力状态分析的主要内容是主应力分析。

1.1.3 应变

构件内点 k 单元体的变形包括体积的改变和形状的改变。体积的改变可由过点 k 互相垂直的三个微段的伸长来表示, 而形状的改变可由过点 k 三对两两互相垂直的两个微段相对转动的角度来表示。构件内点 k 沿 x 方向的正应变定义为

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{k'a'} - \Delta x}{\Delta x} \quad (1.1-5)$$

其中, Δx 为微段 $\overline{ka}$ 的长度, 如图 1.1-2(a) 所示。

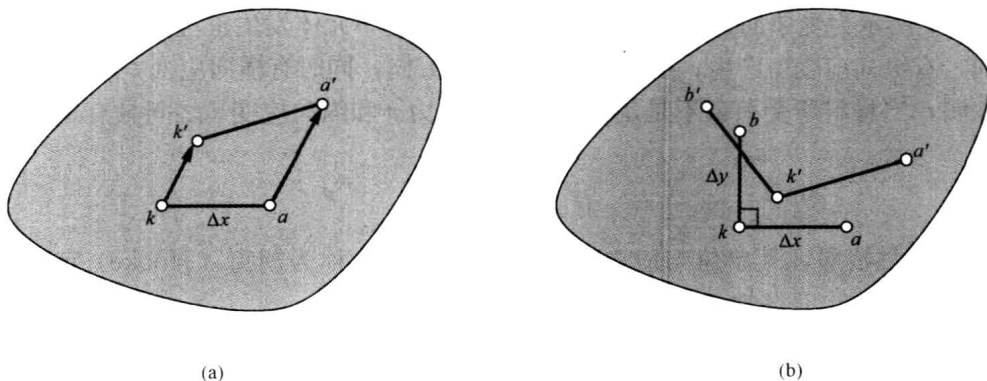


图 1.1-2 一点处应变的定义

如果构件变形微小, 则 $\overline{ka}$ 和 $\overline{k'a'}$ 之间的角度很小, 于是在式 (1.1-5) 中可以用 $\overline{k'a'}$ 在 x 方向的投影来代替, 即

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\overline{k'a'})_x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (1.1-6)$$

同理, 可定义构件沿 y 方向和 z 方向的正应变。一点处沿某方向的正应变描述了该点处沿该方向的伸缩程度, 沿不同方向的正应变是不同的。正应变的单位为 m/m 或 mm/mm , 常省略而简化成量纲为 1 的纯量。

点 k 关于 x 方向和 y 方向的切应变定义为

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\angle a'k'b' - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.1-7)$$

其中, Δx 和 Δy 分别为微段 $\overline{ka}$ 和 $\overline{kb}$ 的长度, γ_{xy} 为微段 $\overline{ka}$ 和 $\overline{kb}$ 所夹直角的改变量, 如图 1.1-2(b) 所示。

在小变形的情况下, 构件微段角度的改变量可以用其正切值来代替, 即

$$\gamma_{xy} = \tan \left(\angle a'k'b' - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.1-8)$$

同理, 可定义 γ_{yz} 和 γ_{zx} 。一点处的切应变描述了该点沿相应方向的微段相对转动的程度, 一点处沿不同方向的切应变是不同的。切应变的单位为 rad (弧度), 量纲为 1。

只要知道了一点处沿互相垂直方向的三个正应变 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 和三个切应变 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} , 就可以求出任意方向的正应变和切应变。平面应变状态下应变分量的转换公式为

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (1.1-9a)$$

符 号 表

$a, b, c, \dots$ 常数, 距离, 点的位置	r 半径
$A, B, C, \dots$ 点, 截面的位置	R 半径
A 面积	S_y, S_z 静矩
b 截面的宽度	t 厚度, 切向
C 形心	T 扭矩
d_i 内径	u_d 畸变能密度
d_o 外径	u_v 体积应变能密度
D 直径	V_ϵ 应变能
e 偏心距	w 挠度
E 弹性模量	W 重量
f 频率	W_p 抗扭截面系数
F 集中力	W_z 抗弯截面系数
F_S 剪力	W_e 外力虚功
F_N 轴力	W_i 内力虚功
F_b 挤压力	x, y, z 直角坐标
G 切变模量	x_C, y_C, z_C 形心直角坐标
h 高度	α, β, γ 角度
i 惯性半径	γ 重力密度, 切应变
I 惯性矩	$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ 切应变
I_y, I_z 惯性矩	ρ 密度, 曲率半径
I_p 极惯性矩	δ, Δ 变形, 位移
I_{yx}, I_{xz} 惯性积	σ 正应力
κ 弹簧常数	σ_s 屈服极限
K 体积模量	σ_b 强度极限
l 长度, 跨度	$[\sigma]$ 许用正应力
m 质量	τ 切应力
M_e 外力偶矩	$[\tau]$ 许用切应力
M, M_z 弯矩	$\epsilon, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 线(正)应变
n 法线方向	θ 单位长度扭转角
n, n_{st} 安全因数	φ 扭转角
p 压力	μ 泊松比
P 功率	ω 角速度
q 线荷载集度	

$$\frac{\gamma_{\alpha}}{2} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \quad (1.1-9b)$$

1.2 应力—应变关系

在正应力的作用下，伴随着正应变的发生；在切应力的作用下，伴随着切应变的产生，因此，应力和应变之间存在着确定的关系。应力和应变的关系需要通过试验确定。

图 1.2-1 所示为受单向应力作用下具有单位长度的单元体发生正应变的情况。沿着正应力的方向，有纵向应变 ϵ 产生；在垂直于正应力的方向，同时有横向应变 ϵ' 产生。材料的拉伸试验表明，当材料所受荷载不是足够大时，正应力 σ 和纵向应变 ϵ 之间具有近似的线性关系，即

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.2-1)$$

这里 E 称为**弹性模量**，其单位与应力相同。式 (1.2-1) 称为**胡克 (Hooke) 定律**。纵向应变 ϵ 和横向应变 ϵ' 也有线性关系，即

$$\epsilon' = -\mu\epsilon \quad (1.2-2)$$

式中： μ 为**泊松 (Poisson) 比**。

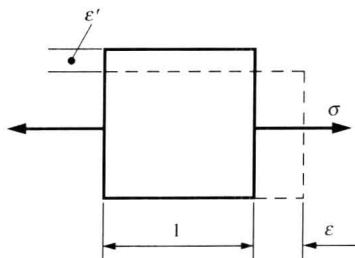


图 1.2-1 正应力引起正应变的情况

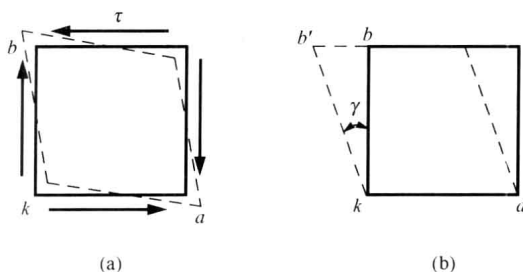


图 1.2-2 切应力引起切应变的情况（纯剪切变形）
(a) 纯剪切变形的真实表示；(b) 剪切变形的定义表示

图 1.2-2 所示为只有切应力 τ 作用下具有单位长度的单元体发生纯剪切变形的情况。图 1.2-2(a) 是纯剪切变形的真实表示，虚线平行四边形逆转一微小角度然后向左做微小平移，将得到纯剪切变形的简化表示，如图 1.2-2(b) 所示。事实上，图 1.2-2 中直角的改变量 γ 是相同的，即剪切变形是相同的。在小变形的情况下，纯剪切变形只有形状的改变，而边长没有长短的改变。

材料的纯剪切试验结果表明，当材料所受的荷载不是足够大时，切应力和切应变之间也具有线性关系，即

$$\tau = G\gamma \quad (1.2-3)$$

这里 G 称为**切变模量**，通常式 (1.2-3) 为**剪切胡克定律**。对于各向同性材料，材料常数 E 和 G 并不独立，它们之间满足如下关系，即

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.2-4)$$

式中各材料常数通过试验测定，对于钢材， $E = 200 \sim 210 \text{ GPa}$ ， $G = 80 \text{ GPa}$ ， $\mu = 0.3$ 。

对于各向同性材料，一般应力状态下的应力—应变关系称为广义胡克定律，即

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (1.2-5a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}\quad (1.2-5b)$$

式(1.2-5)表明，正应力只引起正应变，切应力只引起切应变，两者之间没有耦合效应。该式成立的条件是试验所用材料为线弹性、小变形的各向同性材料。

1.3 材料力学内在结构和研究方法

材料力学研究承力构件的强度、刚度和稳定性。强度和刚度都与材料的力学性质密切相关。材料的力学性质包括由试验得出的材料常数和衡量材料破坏的强度指标及塑性指标。这些指标需要通过应力和应变（变形）关系衡量。在材料力学的范围内，杆件内应力、应变的分布和杆件横截面上的内力分量有确定的关系。为给出这种确定的关系，需要对杆件的变形规律做进一步的假设，即平面假设。例如，轴向变形的平面假设是横截面沿轴向做微小的平移；圆轴扭转变形的平面假设是横截面绕轴线做微小的刚性转动；纯弯曲变形的平面假设是横截面绕垂直于轴线的某一根轴（即中性轴）做微小的转动。平面假设成立的基础是试验。材料力学的内在结构如图 1.3-1 所示。

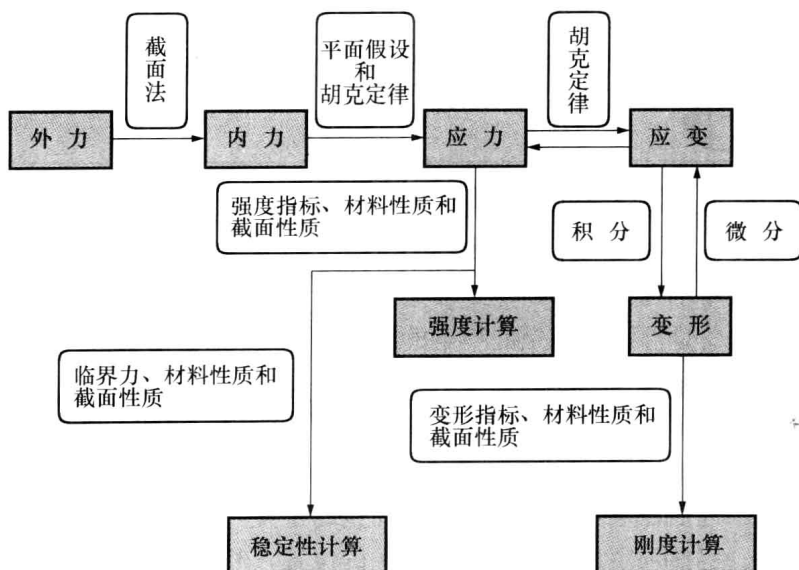
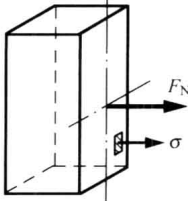
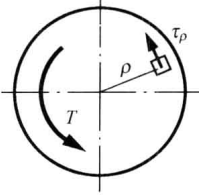
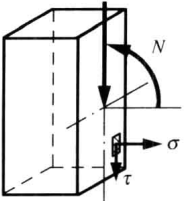
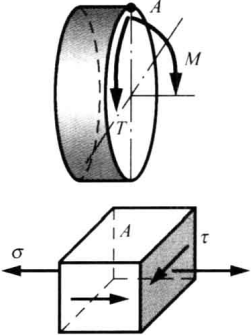


图 1.3-1 材料力学的内在结构

几种基本变形和组合变形的应力和应变公式见表 1.3-1。

表 1.3-1

几种基本变形和组合变形的应力和应变公式

变形形式	横截面（微段）内力和应力	应力和强度计算	应变和刚度计算
轴向拉伸 和压缩		$\sigma = \frac{F_N}{A}, \tau = \frac{F_S}{A_S}, \sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$ $\sigma_{\max} = \left(\frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$	$d(\Delta l) = \frac{F_N dx}{EA}$ $\Delta l = \int_l \frac{F_N dx}{EA}$ $\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} dx}{E_i A_i}$
圆轴扭转		$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$ $\tau_{\max} = \left(\frac{T}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau]$	$d\varphi = \frac{T dx}{GI_p}$ $\varphi = \int_l \frac{T dx}{GI_p}$ $\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{G_i I_{pi}}$ $\theta_{\max} = \left(\frac{T}{GI_p} \right)_{\max} \leq [\theta]$
横力弯曲		$\sigma = \frac{M_y}{I_z}$ $\sigma_{\max} = \left(\frac{M}{W_z} \right)_{\max} \leq [\sigma]$ $\tau_{\max} = \left(\frac{F_S S_{z, \max}}{I_z b} \right)_{\max} \leq [\tau]$	$\epsilon = \frac{y}{\rho}, \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ $w'' = \frac{M(x)}{EI_z}$ $\left(\frac{\delta}{l} \right)_{\max} \leq \left[\frac{\delta}{l} \right], \theta_{\max} \leq [\theta]$
弯扭组合		由叠加法建立危险点应力状态，求主应力 σ_i 和相当应力 $\sigma_{r1}, \sigma_{r2} \leq [\sigma]$ $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2}$ $\sigma_2 = 0$	由叠加法求危险截面的位移，使用相应的刚度条件进行刚度计算

材料力学的研究方法可概括为如下几点：

(1) **外力分析**。包括主动力性质和大小的确定、约束的简化、力学模型的建立。外力的正确分析对于解决实际工程力学问题是十分重要的。在力学模型已经给出的情况下，还要进一步判断所涉及的问题是静定的还是静不定的。对于静定问题，主要是根据平衡理论求支座反力。

(2) **内力分析**。包括弄清楚内力分量沿横截面位置变化的规律，通常用内力图表示，找出危险截面（即最大应力可能发生的截面）。

(3) **应力分析**。包括在危险截面上确定危险点的位置，计算危险点的应力。

(4) **变形分析**。包括确定最大变形可能发生的位置，利用变形公式和胡克定律计算变形或应变。

(5) **强度计算、刚度计算和稳定性计算**。包括根据强度条件、刚度条件和稳定性条件，判定构件是否安全和进行构件的设计。

1.4 几个需要注意的问题

1.4.1 单位

材料力学所涉及的量主要有力、应力、应变和长度。国际单位制规定，力、应力和长度的单位分别是 N（牛顿）、Pa（帕）和 m（米）。根据国际单位制，在计算过程中，已知量的单位都要换成国际单位，则所求量的单位一定是所对应的国际单位。由于 Pa 是一个很小的单位，实际上应力常用 MPa（兆帕）表示，因此在计算过程中，若力、应力和长度的单位分别用 N、MPa 和 mm 表示，则所求量应力的单位一定为 MPa，这样就可以省去单位转换的麻烦。

1.4.2 内力的正负和图形表示

规定轴力拉为正、压为负，作图时只要标明正负，则截面所受轴力的性质就十分清楚了。对剪力也是如此，规定剪力对截面内侧点的矩顺时针转时为正，反之为负。对于水平直梁，各行业都规定把正的轴力和剪力画在轴线的上方，负的画在下方。对弯矩的情况有所不同，对于水平直梁，使轴线下凸的弯矩为正，使轴线上凸的弯矩为负。例如，机械、航空领域等规定正的弯矩画在轴线的上方，负的画在下方；在土木和岩土领域，弯矩图的画法则相反，正的画在下方，负的画在上方。其实弯矩图不同的画法仅仅是习惯的不同，仍然遵循正的弯矩画在正的一侧，负的弯矩画在负的一侧的原则。

需要明确的是，对于不是水平直梁的情况，梁内弯矩正负的规定就失去了意义。事实上，只要明确弯矩与轴线凸凹性的关系，就可以列弯矩方程，画弯矩图。例如，机械、航空等领域规定弯矩图画在梁的受压侧；在土木和岩土领域，规定弯矩图画在梁的受拉侧，而没有必要标明正负。

1.4.3 应力和应变的正负规定

应力和应变的正负有两种规定（习惯）。就平面应力状态而论，第一种规定为：正应力离开截面为正，反之为负；切应力对截面内侧点的矩顺时针转时为正，反之为负。与构件微段伸长对应的正应变为正，反之为负；使直角增大的切应变为正，反之为负。该规定使得，正应力与轴力相一致，正应变与正应力相一致，切应力与剪力相一致，切应变 γ_{xy} 与切应力 τ_{xy} 引起的切应变相一致（见图 1.2-2）；但 $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ ，与切应力互等定理相矛盾。第一种规定通常应用于机械、航空等领域。

第二种规定为：正应力离开截面为正，反之为负；切应力对截面内侧点之矩顺时针转时为正，反之为负。与构件微段伸长对应的正应变为正，反之为负；使直角减小的切应变为正，反之为负。该规定使得，正应力与轴力相一致；正应变与正应力相一致，切应力与剪力相一致；但切应变 γ_{xy} 与切应力 τ_{xy} 引起的切应变不一致，并且因为 $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ ，与切应力互等定理相矛盾。第二种规定通常适用于土木和岩土领域。

在第一种规定下，应力和应变转换公式具有相似性；在第二种规定下，应力和应变转换公式不具有相似性。在对变形体进行更一般性研究的弹性力学中，对应力做了“正面为正，负面负为正”的规定，对切应变做了“使直角减小的切应变为正”的规定，克服了上述矛盾。但在弹性力学里，并不关注材料力学中内力分量的概念，因此用弹性力学理论不能导出材料力学的重要公式。

指出这一问题的出发点在于扩展读者的知识面，正确地理解和对待材料力学中因领域不同及历史原因所出现的“不一致”。

1.5 材料力学公式的相似性

材料力学公式的相似性有以下两方面：

(1) **应力、应变和变形与相应内力分量的关系的相似性。**材料力学中的内容多、概念多、公式多，表面上看很乱，初学者感到茫然。其实，材料力学有其内在规律性（见图 1.3-1），公式也有其独特的规律性。由表 1.3-1 可知，几种基本变形的应力、应变和变形与其相应内力分量的关系都是相似的。

(2) **应力、应变和惯性矩公式的相似性。**理论性较强的应力状态分析和应变状态分析是解决复杂应力状态的理论基础。研究发现，应变分析公式与应力分析公式具有相似性，平面状态下的应变分量 ϵ_x 、 ϵ_y 、 $\gamma_{xy}/2$ 、 ϵ_α 和 $\gamma_\alpha/2$ 分别对应于二向应力状态下的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 σ_α 和 τ_α 。基于这种相似关系，应变分析的所有公式都可以由相应的应力分析公式通过类比的方法得到。

在进行应力和变形计算时，必须计算截面的几何性质，如面积、静矩和惯性矩。轴惯性矩的计算比较麻烦。其实，惯性矩的计算公式与应力分析公式也具有相似性，对应关系为 I_x 、 I_y 、 I_{xy} 、 I_{x_1} 、 I_{y_1} 和 $I_{x_1y_1}$ ，分别对应于二向应力状态下的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 σ_α 、 $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ 和 τ_α 。下面比较几组重要的对应公式。

(1) 转换公式。斜截面应力公式为式 (1.1-3)，应变转换公式为式 (1.1-9)，惯性矩转换公式为

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.5-1a)$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (1.5-1b)$$

(2) 主值公式。最大和最小应力公式为式 (1.1-4)，最大和最小应变公式为

$$\epsilon_{\max} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.5-2)$$

最大和最小惯性矩公式为

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (1.5-3)$$

(3) 主值方位角 α_p 。最大和最小应力、最大和最小应变及最大和最小惯性矩的方位分别由式 (1.5-4) ~ 式 (1.5-6) 确定，即

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.5-4)$$

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (1.5-5)$$

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (1.5-6)$$

关于最大切应力、最大切应变和最大极惯性矩的对应关系以及应力圆、应变圆和惯性圆

的对应关系请读者自己总结。

1.6 示例

下面给出一个综合性的例题，以剖析材料力学解题的基本步骤。

【例 1.6-1】 结构如图 1.6-1(a)所示，杆 1 和杆 2 的横截面是直径均为 d 的圆形截面，梁 BD 是型号为 20b 的工字钢。杆 1、杆 2 和梁 BD 均用低碳钢制成，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，比例极限 $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。重物重量 $W = 50\text{kN}$ 。已知杆和梁的许用拉应力均为 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，杆的稳定性安全系数 $n_{st} = 3$ ，试设计杆 1 和杆 2 的横截面面积，校核梁的强度并求端点 D 的位移。

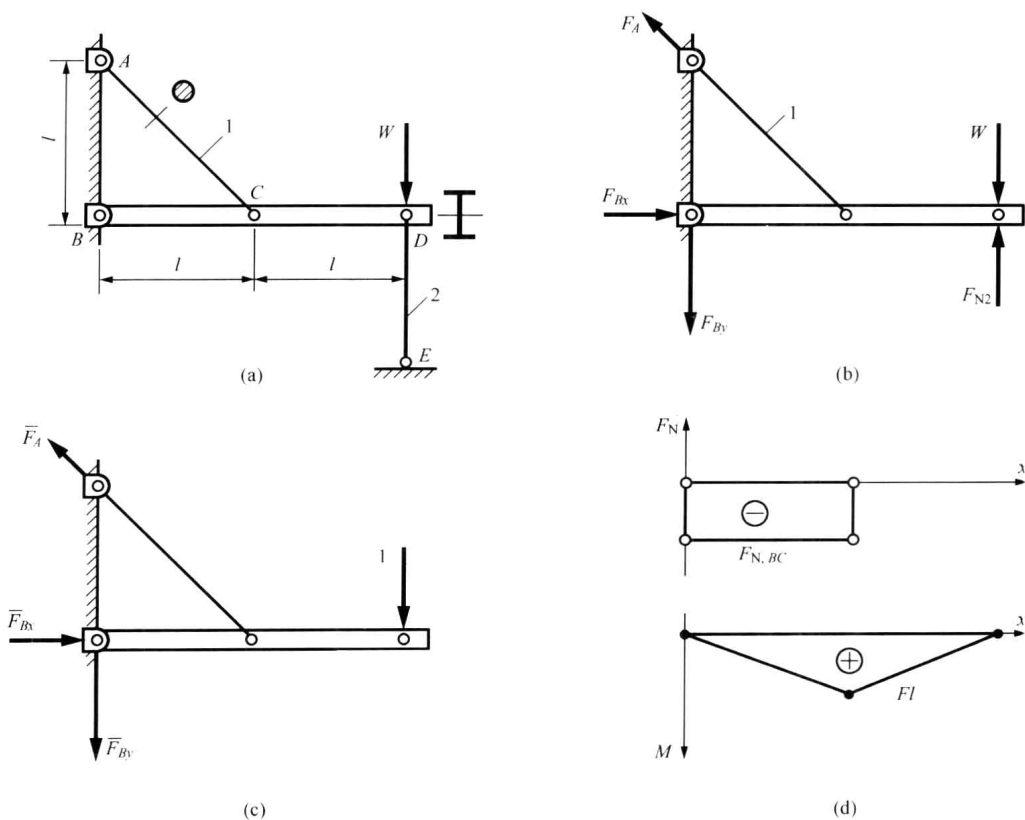


图 1.6-1

解 步骤 1 问题分析。 此题为一次杆梁混合结构静不定问题，只有先把静不定问题转化为静定问题，才能进行杆件截面尺寸设计、梁的强度校核以及连接点位移的计算。

步骤 2 求解静不定问题。

(1) 取相应系统，如图 1.6-1(b)所示。

根据静力学平衡方程，求得 $F_A = 2\sqrt{2}F$ ， $F_{Bx} = 2F$ ， $F_{By} = F$ 。

(2) 变形协调条件是梁在 D 端的挠度等于杆 2 的压缩量，即

$$w_D = \Delta l_2 \quad (1.6-1)$$

(3) 使用单位荷载法求 w_D 。单位力图如图 1.6-1(c)所示，求得 $\bar{F}_A = 2\sqrt{2}$ ， $\bar{F}_{Bx} = 2$ ，

$\bar{F}_{By} = 1$, 因而

$$\begin{aligned} w_D &= \int_l \frac{M\bar{M}dx}{EI_1} + \frac{F_{N1}\bar{F}_{N1}l_1}{EA} + \frac{F_{N,BC}\bar{F}_{N,BC}l_{BC}}{EA_1} \\ &= 2 \int_0^l \frac{Fx \cdot x dx}{EI_1} + \frac{2\sqrt{2}F \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}l}{EA} + \frac{2F \cdot 2 \cdot l}{EA_1} \\ &= \frac{2Fl^3}{3EI_1} + \frac{Fl}{EA} \left(8\sqrt{2} + 4 \frac{A}{A_1} \right) \end{aligned} \quad (1.6-2)$$

其中, $F=W-F_{N2}$, I_1 和 A_1 分别为梁 BD 横截面关于中性轴 z 的惯性矩和横截面面积。查型钢表知, 型号为 20b 的工字钢的几何性质为 $I_1 = 2.5 \times 10^7 \text{mm}^4$, $W_z = 2.5 \times 10^5 \text{mm}^4$, $A_1 = 3957.8 \text{mm}^2$ 。

(4) 求 Δl_2 , 即

$$\Delta l_2 = \frac{F_{N2}l}{EA} \quad (1.6-3)$$

(5) 把式 (1.6-2) 和式 (1.6-3) 代入式 (1.6-1), 得

$$\begin{aligned} (W - F_{N2}) \left[\frac{2l^3}{3EI_1} + \frac{l}{EA} \left(8\sqrt{2} + 4 \frac{A}{A_1} \right) \right] &= \frac{F_{N2}l}{EA} \\ F_{N2} &= \frac{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 4A/A_1}{A} \right) W}{\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A}} \end{aligned} \quad (1.6-4)$$

$$F = W - F_{N2} = \frac{W}{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A} \right) A} \quad (1.6-5)$$

步骤 3 设计杆 1 和杆 2 的截面尺寸。

(1) 杆 1 为受拉杆, 由强度控制设计, 即

$$F_{N1} = F_A = 2\sqrt{2}F = \frac{2\sqrt{2}W}{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A} \right) A} \quad (1.6-6)$$

杆 1 的强度条件为

$$\sigma = \frac{F_{N1}}{A} = \frac{2\sqrt{2}W}{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A} \right) A^2} \leq [\sigma] \quad (1.6-7)$$

简化为

$$\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1} \right) A^2 + (8\sqrt{2} + 1)A - \frac{2\sqrt{2}W}{[\sigma]} \geq 0 \quad (1.6-8)$$

把 I_1 、 A_1 、 $[\sigma]$ 、 $W = 50 \text{kN}$ 、 $l = 1000 \text{mm}$ 代入式 (1.6-8), 得

$$0.0277A^2 + 12.3137A - 883.75 \geq 0 \quad (1.6-9)$$

解得 $A = 233.0194 \text{mm}^2$, 则杆 1 的直径 $d_1 \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 17.2247 \text{mm}$ 。

(2) 杆 2 为受压杆, 存在稳定性问题, 应由稳定条件设计截面尺寸。视杆 2 为两端铰支的细长杆进行稳定性计算。

$$\text{惯性半径} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d_2}{4} \quad (1.6-10)$$

$$\text{柔度} \quad \lambda = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{\mu l}{i} = \frac{4l}{d_2} \quad (1.6-11)$$

$$\text{临界压力} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E (d_2)^2}{16l^2} = \frac{\pi EA}{4l^2} \quad (1.6-12)$$

工作应力

$$\sigma = \frac{F_{N2}}{A} = \frac{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 4A/A_1}{A}\right)W}{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A}\right)A} = \frac{\left[\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A + 8\sqrt{2}\right]W}{\left[\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A + 8\sqrt{2} + 1\right]A} \quad (1.6-13)$$

稳定性条件为

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = \frac{\pi EA}{4l^2} \frac{\left[\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A + 8\sqrt{2} + 1\right]A}{\left[\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A + 8\sqrt{2}\right]W} \geq n_{st} \quad (1.6-14)$$

整理为

$$\frac{\pi E}{4l^2} \left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A^3 + (8\sqrt{2} + 1)A^2 - n_{st}W \left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{4}{A_1}\right)A - 8\sqrt{2}n_{st}W \geq 0 \quad (1.6-15)$$

把 $E = 200\text{GPa}$ 、 $W = 50\text{kN}$ 、 $l = 1000\text{mm}$ ，以及 I_1 、 A_1 、 n_{st} 代入式 (1.6-15)，得

$$0.004\ 3A^3 + 12.312A^2 - 4151.6A - 1\ 696\ 800 \geq 0 \quad (1.6-16)$$

解得

$$A_2 = 513.5\ \text{mm}^2, \quad d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = 25.56\text{mm}$$

显然，杆1和杆2的直径 d 应大于 d_1 和 d_2 ，故取 $d = 26\text{mm}$ ，面积 $A = 531\text{mm}^2$ 。

步骤4 校核梁 BD 的强度。梁的弯矩图和轴力图如图 1.6-1(d)所示（忽略剪力对梁强度的影响）。截面 C 为危险截面，危险点在截面 C 的上边缘，为单向压应力状态，最大压应力为

$$\sigma_{c,\max} = \frac{F_{N,BC}}{A_1} + \frac{Fl}{W_z} = F \left(\frac{2}{A_1} + \frac{l}{W_z} \right) \quad (1.6-17)$$

其中

$$\begin{aligned} F &= \frac{W}{\left(\frac{2l^2}{3I_1} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 4A/A_1}{A}\right)A} \\ &= \frac{50\text{kN}}{\left[\frac{2 \times (1000\text{mm})^2}{3 \times 25\ 000\ 000\text{mm}^4} + \frac{8\sqrt{2} + 1 + 531\text{mm}^2/3957.8\text{mm}^2}{531\text{mm}^2}\right]531\text{mm}^2} = 1.85\text{kN} \\ \frac{2}{A_1} + \frac{l}{W_z} &= \frac{2}{3957.8\text{mm}^2} + \frac{1000\text{mm}}{250\ 000\text{mm}^3} = 0.004\ 5 \end{aligned}$$

于是

$$\sigma_{c,\max} = 1.85 \times 10^3 \times 0.004\ 5 = 8.34\text{MPa} < [\sigma]$$

梁的强度足够。