高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

# 线性代数

## 习题集

上海财经大学应用数学系　编

随书附赠

上海财经大学出版社

# 线性代数习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

# 前 言

《线性代数习题集》是与上海财经大学应用数学系编写的《线性代数》第三版配套的辅助学习材料，也可以看成是教材的补充学习材料。其目的是为学生以及讲授该课程的教师提供一些便利，希望通过此习题集以帮助学生更好地学习《线性代数》这门课程。另外，也提供有关考研课程《高等数学(三)》中有关《线性代数》题的一些信息，以使学生了解考研题的份量。因此，我们的主要做法是：

1. 与《线性代数》教材的章节保持一致，交换了原向量空间与线性方程组的顺序。

2. 删除了线性空间与线性变换的内容，因此《习题集》的第五章标题改为向量空间。这主要考虑到课程考试与考研都不出现这方面的内容。

3. 增加了比较多的精讲例题，并尽可能多地覆盖一些常见题型与解题方法。这些例题的分类编排根据各自特点，而不是按照统一的模式，有的按方法归类，有的按题型归类，有的则按内容归类。

4. 本习题集基本上可以与课程学习同步(建议在学完每一章后再做习题集的练习)。在有些内容提要和练习中，考虑到归类的需要，有些概念会提前出现，这时需要学完这些内容后再回过来学习。

5. 一些有一定难度的例题用“*”标出，而训练题中的提高题也是具有一定难度的题目。可以这样说，这些题目的难度与考研题已不分上下，有的甚至超过了。安排这些题目一是考虑到综合性，二是激发同学们的学习兴趣。同学们可以选择性地学习。

6. 综合自测卷选自上海财经大学《线性代数》课程前些年的试卷。

7. 考研真题选自 2005～2009 年全国考研《高等数学(三)》中的有关线性代数内容的题目。

参加本习题集编写的成员是顾桂定(第一章)，田方(第二章)，钱晓明(第三章)，张震峰(第四章)，董程栋(第五章)，张远征(第六章)。最后由顾桂定统稿。

《线性代数》是我校精品课程建设项目之一，得到校领导与教务处的大力支持和资助。本课程的建设也得到了应用数学系领导的极大关注和帮助。在此，表示我们的衷心感谢。

由于编者水平所限，本书中不当之处在所难免，恳请得到广大读者与同仁的批评指正。

**编 者**

2011 年 2 月

# 目 录

# 第一章

# 行列式

## 一、内容提要

(一)$n$ 阶行列式的定义

1. 排列与逆序

**排列** $n$ 个不同自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 称为 $n$ 级**排列**,其中自然数 $p_i$ 称为该排列的第 $i$ 个元素.

注:$n$ 个不同自然数可以组成 $n!$ 个不同的 $n$ 级排列.

**逆序** 在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若有 $p_s>p_t(s<t)$,则称 $p_s$ 与 $p_t$ 构成该排列的一个**逆序**;一个排列中,所有逆序的总数称为该排列的逆序数,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

关于逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 的计算,可以通过计算出每个元素 $p_i$ 的逆序数(记为 $t_i$)而得到:

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n,$$

而 $t_i$ 即是在 $p_1p_2\cdots p_{i-1}$ 中比 $p_i$ 大的个数.

**奇排列与偶排列** 若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数,称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列;若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数或零时,称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列.

**性质** 所有 $n$ 级排列中($n\geqslant2$),奇偶排列各有一半.

**标准顺序的排列** $n$ 个不同自然数按从小到大自然顺序的排列,即 $1\ 2\ \cdots\ n$,称为 $n$ 级标准顺序的排列.

**对换** 在 $n$ 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,任意对换两个元素 $p_s,p_t$ 的位置,其余元素不动,称为该排列的一个对换,可记作

$$p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n\xrightarrow{(p_s,\,p_t)}p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n.$$

**性质**

(1)对换改变排列的奇偶性.

(2)任意一个 $n$ 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$,都可以对换成标准顺序的排列 $1\ 2\ \cdots\ n$,且对换的次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 具有相同的奇偶性.

2. $n$ 阶行列式的定义

由 $n^2$ 个数组成的 $n$ 行 $n$ 列的 $n$ 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\sum\limits_{n!}$ 表示对所有 $n$ 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的排列种数进行相加，共有 $P_n=n!$ 项. 在第 $i$ 行第 $j$ 列交叉位置上的元素称为 $(i,j)$ 元素，一般用 $a_{ij}$ 表示. $(i,i)$ 位置上的元素 $a_{ii}$ 称为对角元素. $n$ 阶行列式一般记作 $D_n$(或 $D$)，有时也可记作 $\det(a_{ij})$.

特别地，定义一阶行列式(即 $n=1$)为 $|a_{11}|=a_{11}$.

**重要** $n$ 阶行列式的定义具有以下三项特征：

(1)定义式右端的和式是由 $n!$ 项构成的一个代数和，其结果是一个数；

(2)和式的每一项有 $n$ 个数相乘 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，而每个数取自不同行不同列，即行足标固定为 $12\cdots n$，列足标则是 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列 $p_1p_2\cdots p_n$；

(3)每项的符号由列足标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶性决定，即符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$.

(二)行列式的性质

1. 一些概念

**转置行列式** 记 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 $D$ 的行与列元素对应互换得到的新行列式称为行列式 $D$ 的转置行列式，记作 $D^T$，即

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**余子式与代数余子式** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，划去位置 $(i,j)$ 上元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列元素，余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称作($a_{ij}$ 所在)位置 $(i,j)$ 的余子式，记作 $M_{ij}$；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 为($a_{ij}$ 所在)位置 $(i,j)$ 的代数余子式.

2. 行列式的基本性质

(1)$D=D^T$.

(2)任意对换行列式的两行(或两列)元素，其值变号.

**推论** 两行(或两列)元素对应相同的行列式，其值为零.

(3)若行列式某行(或某列)元素有公因子 $\lambda$，则 $\lambda$ 可提到行列式外面.

**推论** 若行列式某行(或某列)元素全为零，则行列式的值为零.

(4)行列式中若有两行(或两列)对应元素成比例，其值为零.

(5)行列式成立，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1}+a''_{s1} & a'_{s2}+a''_{s2} & \cdots & a'_{sn}+a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1} & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{s1} & a''_{s2} & \cdots & a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

同理，对于列也成立类似的结论.

(6)行列式某行(或某列)元素加上另一行(或另一列)对应元素的 $\lambda$ 倍，行列式的值不变.

3. 行列式的展开公式

$n$ 阶行列式 $D$ 可以按任意第 $i$ 行展开，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

或按任意第 $j$ 列展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

其中，$A_{ij}$ 是 $(i,j)$ 位置上的代数余子式 .

行列式某行(或某列)的元素与另一行(或另一列)对应位置上的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

(三)一些特殊行列式的值

1. 二阶、三阶行列式的对角线计算法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

**重要**　对角线法不能用在三阶以上行列式的计算 .

2. 上(下)三角行列式的值等于其对角元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

特别对角行列式的值也有同样的结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 2×2 块上(下)三角行列式的值等于两个对角块行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

特别对角块行列式(即上述元素 $c_{ij}=0$ 情形)也成立同样的结论.

4. 范德蒙(Vandermon)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

其中,连乘号 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}$ 是对满足 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 的所有因子 $(x_i-x_j)$ 的乘积.

(四)克莱姆法则

**克莱姆(Cramer)法则** 对于 $n$ 个未知量 $n$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases},$$

若由方程组的系数 $a_{ij}$ 所构成的 $n$ 阶行列式(称之为方程组的系数行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组的解存在,唯一;并且解为

$$x_j=\frac{D_j}{D},j=1,\cdots,n,$$

其中,$D_j$ 是用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 $D$ 中第 $j$ 列元素所构成的 $n$ 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**重要推论**　对于 $n$ 个未知量 $n$ 个方程的齐次(线性)方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases},$$

若其系数行列式 $D\neq0$,则齐次线性方程组只有零解,$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

这一结论被更多地说成:若齐次方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$. 事实上,这个条件也是充分的,即若 $D=0$,则齐次方程组有非零解(见第四章线性方程组).

## 二、例题精讲

### (一)一些基本问题的计算

**【例 1】**　填空题

(1)设 $a_{32}a_{2r}a_{14}a_{51}a_{4t}$ 是五阶行列式中的一项,则 $r=$____,$t=$____时,该项取负号.

(2)多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&0&1&x\\x&3&2&1\\-2&4&3&2\\x&5&4&3\end{vmatrix}$ 中的常数项为________.

(3)已知 $n$ 阶行列式的所有元素或为 1 或为 $-1$,则该行列式的值是奇数还是偶数?

________.

(4)行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&5&8\\4&9&25&64\\8&27&125&512\end{vmatrix}$ 的值为________.

(5)设 $D=\begin{vmatrix}1&2&7&19&0\\0&7&-2&-1&3\\8&0&4&2&11\\0&0&5&2&22\\0&0&0&3&100\end{vmatrix}=10$,则 $D_1=\begin{vmatrix}1&2&7&19&0\\0&7&-2&-1&3\\8&0&4&2&9\\0&0&5&2&22\\0&0&0&3&100\end{vmatrix}=$________.

(6)设方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\\lambda x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$ 有非零解,则 $\lambda$ 满足________.

(1)**答案**　$r=3,t=5$.

**分析**　把元素行的下标按自然顺序排好 $a_{14}a_{2r}a_{32}a_{4t}a_{51}$,显然 $r,t$ 应取 3 或 5,若取 $r=3,t=5$,则列足标是43251,$\tau(43251)=0+1+2+0+4=7$,为奇排列,取负;若取$r=5,t=3$,则列足标是45231,$\tau(45231)=0+0+2+2+4=8$,为偶排列,取正. 所以答案是$r=3,t=5$.

(2)**答案**　8.

**分析**　这是一个 4 阶行列式,虽然元素中有 4 个 $x$,但根据行列式的定义,代数和中的每一项是 4 个元素的乘积,但这 4 个元素必须取自不同的行不同的列,所以 $f(x)$ 是 $x$ 的二次多项式. 因为是常数项,即不含 $x$ 的项,对于第一行,只要考虑所处第三列的元素 1;而第二行与第四行的元素只能考虑第二列与第四列的元素,如此第三行的元素只能考虑第一列的元素

$-2$. 第二行元素若取第二列的 3，则第四行元素应取第四列的 3，这 4 个元素的乘积为 $1\times3\times(-2)\times3=-18$. 注意到这 4 个元素所处的列是3214，是奇排列，取负，故该项是18；另外，第二行的元素也可以取第四列的 1，第四行的元素则取第二列的5，4个元素的乘积为 $1\times1\times(-2)\times5=-10$，所处的列是3412，是偶排列，故该项为$-10$，因此答案是 8.

(3)**答案** 偶数.

**分析** 只要把第一行的元素加到第二行，则第二行的元素或为 2，或为 0，因此 2 是这一行的公因子，可以提到行列式外面，因此原行列式的值一定是偶数.

(4)**答案** 540.

**分析** 这是一个 4 阶范德蒙行列式，$x_1=2,x_2=3,x_3=5,x_4=8$，根据范德蒙行列式的结论，$V_n=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$，有

$D=(8-5)(8-3)(8-2)(5-3)(5-2)(3-2)=3\times5\times6\times2\times3\times1=540.$

(5)**答案** $-200$.

**分析** 观测两个行列式，只在(3,5)位置上的元素不同，对 $D_1$ 按第三行展开有：$D_1=8A_{31}+4A_{33}+2A_{34}+9A_{35}$，而 $D=8A_{31}+4A_{33}+2A_{34}+11A_{35}=10$，故 $D_1=10-11A_{35}+9A_{35}=10-2A_{35}$，计算 $A_{35}$，其是一上三角行列式，值为 105，故 $D_1=10-2\times105=-200$.

(6)**答案** $\lambda\neq2,\lambda\neq-1$.

**分析** 根据克莱姆法则，齐次方程组有非零解，则系数行列式一定为零，于是 $\lambda$ 应满足，

$$\begin{vmatrix}1&\lambda&1\\1&-1&1\\\lambda&1&2\end{vmatrix}=-2+\lambda^2+1+\lambda-2\lambda-1=(\lambda-2)(\lambda+1)\neq0,$$

解之，$\lambda\neq2,\lambda\neq-1$.

**【例 2】** 选择题

(1)设 $D$ 是四阶行列式，则 $D$ 中符号为负的项是(  ).

(A)$a_{32}a_{13}a_{41}a_{24}$　　(B)$a_{42}a_{23}a_{11}a_{34}$

(C)$a_{23}a_{14}a_{41}a_{32}$　　(D)$a_{21}a_{34}a_{43}a_{12}$

(2)多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}1&x^2&3&x^3\\2&1&5&4\\7&0&9&x\\8&4&6&1\end{vmatrix}$ 有根的数目为(  ).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)6

(3)行列式 $\begin{vmatrix}x+y&y+z\\a+b&b+c\end{vmatrix}$ 可以分拆成(  ).

(A)$\begin{vmatrix}x&y\\a&b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&z\\b&c\end{vmatrix}$　　(B)$\begin{vmatrix}x+y&y\\a+b&b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-x-y&-z\\-a-b&-c\end{vmatrix}$

(C)$\begin{vmatrix}x&y+z\\a&b+c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&0\\b&0\end{vmatrix}$　　(D)$\begin{vmatrix}x+y&y\\a+b&b\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-x-y&-z\\-a-b&-c\end{vmatrix}$

(4)下列论断正确的是(  ).

(A)将 $n(>1)$阶行列式的每个元素都乘以 2，所得行列式的值是原行列式值的 2 倍

(B)一线性方程组的系数行列式的值为零，则方程组的解全为零

(C)若上三角行列式的值为零,则其对角元素中一定有零元素

(D)若行列式的对角元素全部为零,则该行列式的值一定为零

(1)**答案**　(A).

**分析**　把元素按行足标的自然顺序排好:(A)$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$,列足标的排列是3421,$\tau(3421)=5$,为奇排列,按行列式的定义该项取负;(B)$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$,列足标的排列是1342,$\tau(1342)=2$,为偶排列,该项取正;同理(C)和(D)两项也是取正的.

(2)**答案**　(C).

**分析**　根据行列式的定义,$f(x)$是一关于$x$的3次多项式,因此有3个根.

(3)**答案**　(B).

**分析**　把一个行列式分拆成两个行列式,一定要针对某一行或某一列,而其他行或其他列都必须相同.对于(B),把右边行列式两行的$(-1)$分别提出后有

$$\begin{vmatrix} x+y & y \\ a+b & b \end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix} x+y & z \\ a+b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+y & y+z \\ a+b & b+c \end{vmatrix},$$

故是正确的答案;对于(D),

$$\begin{vmatrix} x+y & y \\ a+b & b \end{vmatrix}-(-1)(-1)\begin{vmatrix} x+y & z \\ a+b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+y & y-z \\ a+b & b-c \end{vmatrix},$$

故不是答案;(A)和(C)都合不起来.特别注意(A)的答案具有迷惑性,这是第二章矩阵的加法定义,同学们容易把这两者混淆.

(4)**答案**　(C).

**分析**　对于(A),正确的论断应是:将$n(>1)$阶行列式的每个元素都乘以2,所得行列式的值是原行列式值的$2^n$倍,故(A)不是答案;对于(B),一线性方程组的系数行列式的值为零,则方程组有可能有解,也可能无解.在有解的情况下,应把方程组理解成一般非齐次的,因此解不可能是全为零,故(B)也不是答案;对于(C),因为上三角行列式的值即为对角元素的乘积,因此若行列式的值为零,则对角元素中一定有零元素,故是答案;对于(D),如$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$,故不是答案.

**【例3】**　计算$n$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

**解**　此行列式有多种解法,如按第一行展开等.也可以用最后一行的$(-a)$倍加到第一行,再交换第一列与最后一列即可,

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a^2 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1-a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^n-a^{n-2}.$$

**评注** 同学们容易犯的错是用第一行的$\left(-\frac{1}{a}\right)$倍加到最后一行，马上就得到一个上三角行列式了，但这里没有考虑到的是 $a$ 有可能为零．类似的问题同学们要引起注意．

**【例 4】** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -2 & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

**解** 把各行分母的最小公因子提出，

$$D=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 2 & -12 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\frac{1}{120}(-108-4-120+3)=-\frac{229}{120}.$$

**评注** 在有分母的情形下，可以按行或按列提出分母的最小公因子，如此可以避免分数的运算，给计算带来方便；类似地，若遇到元素数值很大时，也可以设法按行或按列提出最大公因子，以简化计算．

**【例 5】** 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & (a-1)^2 & \cdots & (a-1)^{n-1} \\ 1 & a-2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-2)^{n-1} \\ 1 & a-3 & (a-3)^2 & \cdots & (a-3)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a-n & (a-n)^2 & \cdots & (a-n)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**解** 这是一个范德蒙行列式，$x_i=a-i$，由范德蒙行列式的结论，$V_n=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$，且 $x_i-x_j=(a-i)-(a-j)=j-i$，这些因子共有 $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$个，故有

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(j-i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}1!\cdot 2!\cdots\cdots(n-2)!(n-1)!.$$

**【例 6】** 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

**解** 因为行和相等，故把第二列至最后一列都加到第一列，再提出公因子得到，

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

$$= (x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

按第一列展开，

$$D = (x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x+\sum_{i=1}^{n}a_i)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

**评注** 此行列式的一个特征是每一行的元素之和相等．对于具有该特征的行列式，计算时首先可以考虑的是把第二列至最后一列的元素全部加到第一列，如此第一列就具有该和的公因子，提出该因子后再设法化至上三角行列式．例 7、例 14 都具有这种行和相等的特征．

**【例 7】** 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

**解** 注意到行列式的行和相等，故把第二列至最后一列的元素全部加到第一列上，之后再提出第一列的公因子，再各行减去后一行，

$$D=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\\1&1-n&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1-n&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-n&0&\cdots&0&0\\0&-n&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&-n&0\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}(-n)^{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

**【例 8】** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq0(i=1,\cdots,n)$.

**解** 利用性质,用第 $j$ 列的 $-\frac{1}{a_j}$, $j=2,\cdots,n+1$,加到第一列,即成为上三角行列式,

$$D=\begin{vmatrix}a_0-\frac{1}{a_1}-\cdots-\frac{1}{a_n}&1&1&\cdots&1\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right).$$

**评注** 此行列式称为箭(指向左上方)形行列式,利用性质把其化为上三角行列式即可.对于其他方向的箭形行列式(如指向右上方),则先消去一条边,之后再利用展开就可以计算出行列式的值,见例 9.

**【例 9】** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}b_n&\cdots&b_2&b_1&a_0\\0&\cdots&0&a_1&c_1\\0&\cdots&a_2&0&c_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&\cdots&0&0&c_n\end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq0(i=1,\cdots,n)$.

**解** 利用性质,用第 $j$ 列的 $-\frac{c_j}{a_j}$, $j=1,\cdots,n$,加到最后一列,

$$D=\begin{vmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 & a_0-\frac{b_1c_1}{a_1}\cdots-\frac{b_nc_n}{a_n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

不断地从最后一行展开，即得

$$D=(-1)^{n+1}a_n\cdot\begin{vmatrix} b_{n-1} & \cdots & b_1 & a_0-\frac{b_1c_1}{a_1}-\cdots-\frac{b_nc_n}{a_n} \\ 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1}a_na_{n-1}\cdot\begin{vmatrix} b_{n-2} & \cdots & b_1 & a_0-\frac{b_1c_1}{a_1}-\cdots-\frac{b_nc_n}{a_n} \\ 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=\cdots=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jc_j}{a_j}\right).$$

**【例 10】** 由实验测得变量 $x$ 与 $y$ 的数据 $(x_i,y_i)$，$i=1,\cdots,n$，其中 $x_j\neq x_i$，$\forall j\neq i$. 现要求构造一 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 满足

$$p(x_i)=y_i,i=1,\cdots,n. \tag{1.1}$$

问这样的多项式是否存在？是否唯一？

**解** 设所求多项式为 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}$，于是多项式是否存在、是否唯一就等价于这些系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是否存在、是否唯一. 根据条件(1.1)，所求多项式应满足

$$\begin{cases} 1\cdot a_0+x_1a_1+\cdots+x_1^{n-1}a_{n-1}=y_1 \\ 1\cdot a_0+x_2a_1+\cdots+x_2^{n-1}a_{n-1}=y_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ 1\cdot a_0+x_na_1+\cdots+x_n^{n-1}a_{n-1}=y_n \end{cases},$$

这是关于变量 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的线性方程组，其系数行列式是

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

这是一个范德姆行列式，由于 $x_j\neq x_i$，故 $D\neq0$，于是由克莱姆法则，方程组的解 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 存在唯一，从而所求多项式存在唯一.

**评注** 本例在数学上称为多项式插值问题，而(1.1)称为插值条件. 插值问题在许多领域都有实际的应用.

(二)$n$ 阶行列式的计算方法

我们知道上(下)三角行列式的值等于其对角元素的乘积．利用行列式的性质把一个行列式化成上(下)三角行列式，如此就可计算出行列式的值．这是计算行列式值的最重要思想，也是最一般的方法．在前面我们介绍了一些具有特殊结构的行列式计算，如箭形行列式(见例8、例9)、行和相等行列式(例6、例7)、范德蒙型行列式(例5)等，还有三对角行列式(见下面的例18、例19)，这些结构的行列式通常可以按所介绍的方法去做．下面我们从方法的角度来介绍行列式的计算．事实上这些方法大多数最终也是把行列式化成三角形后再计算出其值的．

一般来说，$n$ 阶行列式的计算不是一件容易的事，需要一定量的练习积累．所介绍的行列式结构以及方法，只是提供一种途经，这种方法最终是否一定能计算得出还要看具体的行列式本身．而有些行列式也可以用多种方法来计算．

1. 用行列式定义的计算法

用行列式定义直接计算行列式的值，一般这些行列式都具有很特殊的结构，如教材中例4的下三角行列式、例5的反对角行列式等；否则用定义去计算行列式的值是很困难的．

**【例 11】** 计算行列式

$$D_6=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & c & y & z \\ x & y & d & 0 & 0 & 0 \\ z & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**解** 由定义 $D_6=\sum\limits_{6!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_6)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{6p_6}$．先考虑 $p_1$ 的取值，注意到行列式第一行的零元素分布，和式中只需保留 $p_1$ 取6的项 $a_{16}a_{2p_2}\cdots a_{6p_6}$，因为其他的项都为零，故和式中保留下来的还有5!项；再考虑 $p_2$ 的取值，因 $p_1$ 已取定为6，$p_2$ 只能在1，…，5中取值，再注意到行列式第二行的零元素分布，故和式中又只需保留 $p_2$ 取5的项 $a_{16}a_{25}\cdots a_{6p_6}$，这些项还有4!项；同理，和式中又只需保留 $p_3$ 取4的项 $a_{16}a_{25}a_{34}a_{4p_4}a_{5p_5}a_{6p_6}$．接下来我们可以先考虑 $p_6$ 的取值，此时其只能在1，2，3中取值，又注意到第六行的零元素分布，故只需保留 $p_6$ 取1的项 $a_{16}a_{25}a_{34}a_{4p_4}a_{5p_5}a_{61}$；同理只需保留 $p_5$，$p_4$ 分别取2，3的项，如此行列式成立 $D_6=(-1)^{\tau(654321)}a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$．由于 $\tau(654321)=0+1+2+3+4+5=15$，故

$$D_6=-abcdef.$$

**评注** 若已经知道前述的2×2块形式行列式的结论，则该题可以利用这一结论．先交换第一与第四行、第二与第五行、第三与第六行，即化成了下列2×2块的行列式

$$D_6=(-1)^3\begin{vmatrix} x & y & d & 0 & 0 & 0 \\ z & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & c & y & z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x & y & d \\ z & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix},$$

这已是两个三阶反上(下)三角行列式了，利用结论(见例16)可得 $D_6=-abcdef$.

**【例 12】** 证明