

单墀数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墀老师 教你学数学

趣味数论

单墀◎著

当读书不只是为了考试
你才会真正爱上数学
单墀老师娓娓道来
与你分享他所理解的数学之美



YZLI0890146962



华东师范大学出版社



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单墀数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墀老师 教你学数学

.....

趣味数论

单墀◎著



YZL0890145952



华东师范大学出版社



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

趣味数论/单墀著. —上海:华东师范大学出版社, 2010

(单墀老师教你学数学)

ISBN 978-7-5617-8044-2

I. ①趣… II. ①单… III. ①代数课—高中—教学参考资料
IV. ①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 170012 号

单墀老师教你学数学

趣味数论

著 者 单 墀

策划组稿 倪 明 孔令志

审读编辑 王元兴

装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社

社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062

网 址 www.ecnupress.com.cn

电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105

客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887

地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口

网 店 <http://ecnup.taobao.com/>

印 刷 者 江苏句容排印厂

开 本 890 × 1240 32 开

印 张 8.5

字 数 200 千字

版 次 2011 年 3 月第一版

印 次 2011 年 8 月第二次

书 号 ISBN 978-7-5617-8044-2/G · 4702

定 价 20.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

总 序

科学昌明,既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘,也需要普及工作者耕耘播种、热心培育。

普及工作很重要。如果将科学研究比作金字塔的塔尖,那么普及工作就是金字塔的底。底宽,塔才高。

科学研究不容易。从事研究,需要才能、努力与机遇。能够从事研究的人不多,好像阳春白雪,曲高和寡。他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化,才能广为人知,才能使更多的人关心、了解、理解,才能引起公众的兴趣,吸引更多的新人一同参加研究。Fermat 大定理就是一个典型的例子。虽然只有 Wiles 一个人给出了证明,看懂证明的不过十几个人或几十个人,但对大定理感兴趣的人成千上万。他们都是普及读物的读者。

普及工作使千万人受益,我就是其中之一。

在学生时代,我读过不少数学普及读物。如刘薰宇的《数学园地》,孙泽瀛的《数学方法趣引》,许莼舫的《几何定理和证题》,Casey 的《近世几何学初编》,日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》,前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等,以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等。还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等。这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想,眼界大开,而且使我对数学产生了浓厚的兴趣,甚至立志要当一名数学家。

但当数学家的梦想却难以实现。因为那时政治运动频仍。读书,被认为“走白专道路”,会横遭批判。史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫。

“四人帮”倒台后，我才有幸到中国科学技术大学作研究生。在1983年成为首批18名国产博士之一。但这一年我已年届不惑，从事数学研究的黄金时期业已过去。我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文，不如做普及工作对社会更有贡献。

对普及工作，我有浓厚的兴趣，也有一定的基础：

1. 由于做过一些研究工作，能够了解较新的材料，能够较为准确地把握数学及有关史料。

2. 由于当过多年教师，文字也还通顺，能够注意趣味性与深入浅出。

1977年恢复高考后，一度出现读书的热潮。这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》，受到普遍的好评。稍后，上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿，我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》，在1980年出版。以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》（与葛军合作）、《不定方程》（与余红兵合作）、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等。

由于文革后，大家渴望读书。而此前的书大多毁于“文革”劫火。因此新出的书颇受欢迎，其中也包括了写的小册子。

冯克勤先生说：“不要小看了这些小册子，它们将数学的美带给大众。”（冯克勤《评审意见》）

杨世明、杨学枝先生说：“直到1980年，大家才盼来单薄的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法，而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单增的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作.”(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007年第1期).

还有一些数学教师见到我客气地说:“我们都是读您的书长大的.”

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年“热爱知识,渴求学问”(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005年第16页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这7种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

序

自然数产生于史前时代,人们对它的研究源远流长,古往今来,数学家们提出和解决了数不清的有关自然数性质的问题,在数学中,形成了一个结构严谨、内容丰富多采的分支——数论.不少问题的解决,思想的深刻和方法的巧妙,足以使世世代代的数学爱好者赞赏不已.数论中许多问题叙述简明而难度极大,是富有魅力的.以华罗庚教授为代表的中国数学家在数论研究中令人瞩目的工作,也引起人们对数论更大的兴趣.我们经常与自然数打交道,对自然数的一些简单性质应该有所了解.一个中学生,如果不知道什么是欧几里得算法是一件遗憾的事.青少年朋友们,无论你将来想做什么,学一点数论的基本知识和方法是会有用的.因此,写一本数论普及读物,让更多的人了解数论的基本内容,是很有必要的.

科学昌明,很需要科普工作者播种耕耘.科普工作很重要,但做好不容易.数学的科普读物似乎尤为难写,正如华罗庚教授所说:“深入浅出是真功夫.”在这本书中,没有繁琐的推导和证明,而是通过一个一个有趣的问题,把初等数论中大部分精华浅显地展现在读者面前.单墀同志是下了一番功夫的.

我以为,好的科普作品应当做到四个字:准、新、浅、趣.

准,内容选择确当,有意义,论说正确,史实无误.

新,有新意,采用新颖材料或用新的观点来处理熟悉的问题,令人耳目为之一新.

浅,通俗易懂而不肤浅,能跳出为“尖子”、“天才”写的小圈子;写得生动活泼,使多数人愿意看.浅,表明作者对问题看得透

澈、就像未受污染的水潭，深，然而澄澈见底。

趣，幽默风趣，而不流于油滑，使人能轻松地学到一些知识。

做到以上四个字，当然很不容易。单墀同志请我作序，一时高兴，写了以上的话，他在这几方面做得如何，读过这本书后，读者自然会作出自己的评价。

王 元

1986 年 5 月于北京

前言

数论又名算术,它研究的对象是数.

数论是一个重要的数学分支.

19 世纪的大数学家高斯(1777—1855)有一句名言:“数论是数学的皇后”.

20 世纪的大数学家希尔伯特(1862—1943)称数论是“其他科学的典范”,是“数学知识的永不枯竭的源泉,并且对其他一切领域的研究提供了不断的刺激”.

正因为如此,在当代著名数学家丢多涅的著作《现代数学概观》中,数论被列入最重要的 A 级.

数论既古老又年轻.它有几千年的历史,欧几里得(约前 330—前 275)的《原本》、丢番图(约 246—330)的《算术》中已经对数论进行了系统的论述,我国古代算书《周髀算经》、《九章算术》等也都讨论了数论问题.但是,尽管人们在这块富矿中采掘了数千年,资源还远远没有耗尽,直到今天,数论仍然生气勃勃,十分活跃.一方面,不少问题还有待解决,正如日本数学家弥永昌吉所说,“这个理论的大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下”.另一方面,数论这一数学分支成绩斐然,尤其是近年来取得了不少举世瞩目的重大成果(例如莫德尔猜测的解决、高斯类数猜测的解决、费尔马大定理的证明等等).

很多数论问题(例如哥德巴赫问题)可以从经验中归纳出来,并且能用三言两语向任何一个路过的人解释清楚,但是要证明它们却远非容易.这也正是数论所特有的奇妙的魅力,使得它既被专业数学家所重视,又被业余研究者所宠爱,甚至使有些人

像吃了忘忧果似的,“一次吃了这种果实就再也离不开它了”.

这本小册子试图对数论作一点通俗的介绍,希望能使读者对于数论有所了解并感到兴趣.所用知识不超过中学数学,有初中水平的人就可以读懂绝大部分内容,个别章节稍难一些,在第一次阅读时不妨略去.

余红兵同志在本书的写作过程中提出了不少宝贵的意见与建议,作者表示深深的感谢.

作者

目 录

总序/ 1

序/ 1

前言/ 1

1 你最熟悉的朋友——自然数 / 1

1.1 华生的第一个问题 / 2

1.2 巨轮的长 / 3

1.3 孩子与门牌号码 / 3

1.4 荷兰人买猪 / 5

1.5 创纪录的因数分解 / 6

1.6 被 2160 整除的立方数 / 7

1.7 哪几盏灯亮着? / 9

1.8 何时重逢 / 10

1.9 丢番图的墓碑 / 11

1.10 请添三个数字 / 11

1.11 欧几里得永垂不朽 / 12

1.12 因数分解的妙法 / 14

1.13 十全数 / 16

1.14 十全数的韧性 / 18

1.15 分油问题 / 19

1.16 辗转相除法与裴蜀恒等式 / 20

1.17 货物的单价 / 22

1.18 能变成均等吗? / 23

1.19 素数的一个特征 / 24

- 1.20 最大公约数的性质 / 25
- 1.21 唯一分解定理的证明 / 26
- 2 多角数、完全数及其他 / 28
 - 2.1 三角形与三角数 / 28
 - 2.2 等差数列的求和 / 30
 - 2.3 正方形与平方数 / 31
 - 2.4 平方数与平方式 / 32
 - 2.5 五边形与五角数 / 33
 - 2.6 立体图形 / 35
 - 2.7 一些不难证明的公式 / 37
 - 2.8 一个不平凡的结论 / 38
 - 2.9 什么数恰好有 60 个因数? / 40
 - 2.10 因数的和 / 42
 - 2.11 完全数——人们对它的认识并不完全 / 43
 - 2.12 亲和数 / 45
 - 2.13 高阶亲和数 / 46
- 3 素数——是永恒的谜吗? / 48
 - 3.1 是合数还是素数? / 48
 - 3.2 乘法公式大显身手 / 50
 - 3.3 爱拉托斯散的筛子 / 50
 - 3.4 殆素数与 $1+2$ 的 2 / 53
 - 3.5 辛勤劳动的结晶——素数表 / 54
 - 3.6 最大的素数 / 54
 - 3.7 修道士的工作——梅森数 / 55
 - 3.8 费尔马说错了 / 57
 - 3.9 正十七边形的尺规作图 / 58
 - 3.10 欧几里得的巧妙证明 / 59
 - 3.11 费尔马数与素数的无限性 / 60

- 3.12 量与质 / 61
- 3.13 素数定理 / 62
- 3.14 算术级数中的素数 / 64
- 3.15 素数之间的间隙 / 65
- 3.16 一个容易的问题 / 67
- 3.17 几个无理数 / 67
- 3.18 “天造地设”的素数幻方 / 68
- 3.19 有表示素数的公式吗? / 69
- 3.20 哥德巴赫猜测 / 71
- 3.21 两个合数的和 / 72
- 3.22 孪生素数 / 72
- 3.23 又一些猜测与问题 / 73
- 3.24 一个被推翻了的猜测 / 75
- 4 大师的发明——同余 / 77
 - 4.1 华生的新把戏 / 77
 - 4.2 同余 / 79
 - 4.3 $1 + 1 = 0$ / 80
 - 4.4 在费尔马失足的地方 / 82
 - 4.5 整除的判别法 / 83
 - 4.6 一个简单的数字问题 / 84
 - 4.7 求余数 / 85
 - 4.8 $47^{47} \cdots^{47}$ 的个位数字 / 86
 - 4.9 $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 1989$ 的末三位数字 / 87
 - 4.10 华生难倒了福尔摩斯 / 88
 - 4.11 整除问题举例 / 89
 - 4.12 三角数与偶完全数的末位数字 / 91
 - 4.13 $11 \cdots 1$ 不是平方数 / 92
 - 4.14 平方数的末尾能有几个 4? / 93

- 4.15 平方数的末位数字 / 94
- 4.16 用 1、2、3、4、5、6、7 作成的七位数 / 95
- 4.17 无相同项的两个数列 / 96
- 4.18 完全剩余系 / 97
- 4.19 有超韧性数吗? / 99
- 4.20 抽屉原则牛刀小试 / 100
- 4.21 在不定方程中的应用 / 101
- 4.22 在堆垒问题中的应用 / 103
- 5 欧拉的 φ 函数 / 107
 - 5.1 放石子 / 108
 - 5.2 空格有了石子 / 110
 - 5.3 染色问题 / 111
 - 5.4 $\varphi(n)$ 的计算公式 / 112
 - 5.5 一个求和问题 / 113
 - 5.6 副产品 / 114
 - 5.7 30 有惊人的性质 / 115
 - 5.8 $\varphi(n)$ 是积性函数 / 117
 - 5.9 “我正是这样想的!” / 118
 - 5.10 卡片上的数 / 119
 - 5.11 欧拉定理 / 121
 - 5.12 7 的幂结尾能是 0000001 吗? / 121
 - 5.13 数字全不为 0 的倍数 / 122
 - 5.14 7^{9999} 的末三位数字 / 123
 - 5.15 费尔马小定理 / 123
 - 5.16 伪素数 / 124
 - 5.17 群、环、域 / 125
- 6 一些不定方程的解 / 128
 - 6.1 百鸡问题 / 128

- 6.2 另有妙法 / 130
- 6.3 中国剩余定理 / 132
- 6.4 太阳神的牛 / 134
- 6.5 勾股数 / 135
- 6.6 换一换汤 / 138
- 6.7 复数与勾股数 / 139
- 6.8 $x^2 + y^2 = (y + 1)^2$ 的解 / 140
- 6.9 单位圆上的有理点 / 141
- 6.10 距离为整数的整点 / 142
- 6.11 成等差数列的三个平方数 / 144
- 6.12 弹子的个数 / 145
- 6.13 张冠李戴的沛尔方程 / 146
- 6.14 最小解与一般解 / 147
- 6.15 罗马军团问题 / 149
- 6.16 方程 $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ / 150
- 6.17 勾股为连续的自然数 / 152
- 6.18 小红家的号码 / 154
- 6.19 方程 $x^2 - dy^2 = n$ / 156
- 7 机器人与坑 / 158
 - 7.1 罗伯特落入坑里 / 158
 - 7.2 重蹈覆辙 / 159
 - 7.3 结论与问题 / 160
 - 7.4 小心地雷! / 161
 - 7.5 罗伯特家族 / 161
 - 7.6 狄利克雷定理 / 163
 - 7.7 克罗内克尔定理 / 164
 - 7.8 幂的前 n 位数字 / 165
 - 7.9 马勒的定理 / 166

8 形形色色的初等问题 / 168

8.1 哥伦布式的问题 / 168

8.2 笛卡儿不敢动手 / 169

8.3 欧拉的恒等式 / 171

8.4 -1 是平方和 / 172

8.5 递降法 / 173

8.6 威尔逊没有证明的威尔逊定理 / 175

8.7 两个完系相乘能是完系吗? / 176

8.8 平方和及其他 / 179

8.9 华林问题 / 181

8.10 任意的七个整数 / 183

8.11 剩余类相加 / 184

8.12 从 7 到 $2n - 1$ / 187

8.13 美国竞赛题 / 189

8.14 $n!$ 中 p 的次数 / 191

8.15 二项式系数中哪些是奇数 / 194

8.16 一道国际数学竞赛题 / 196

8.17 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}$ 不是整数 / 198

8.18 最小公倍数的上界 / 201

8.19 证明的完成 / 202

8.20 解题能手的问题 / 205

8.21 数论中的三颗明珠 / 207

9 分析与数论缔结姻缘 / 210

9.1 张教授堆砖 / 210

9.2 收敛与发散 / 212

9.3 这里又出现了欧拉 / 214

9.4 黎曼 ζ 函数 / 215

- 9.5 “我证明了黎曼假设!” / 217
- 9.6 几乎所有 / 218
- 9.7 圆法 / 221
- 10 固若金汤的城堡——费尔马大定理 / 223
 - 10.1 $x^4 + y^4 = z^4$ 无解 / 224
 - 10.2 欧拉迈出了第一步 / 226
 - 10.3 化的女数学家 / 227
 - 10.4 从欧拉到库麦尔 / 228
 - 10.5 什么是整数 / 229
 - 10.6 高斯整数 / 230
 - 10.7 $\mathbb{Z}[i]$ 中的唯一分解定理 / 232
 - 10.8 再谈勾股数 / 233
 - 10.9 1847 年发生的事 / 235
 - 10.10 唯一分解定理不一定成立 / 238
 - 10.11 更通俗的例子 / 239
 - 10.12 理想与青春之梦 / 240
 - 10.13 伯努利数与正规素数 / 241
 - 10.14 二次域 / 243
 - 10.15 证实高斯猜测的历程 / 245
 - 10.16 近年来的两大进展 / 248
 - 10.17 猜测与反例 / 249
 - 10.18 城堡终于被攻克了 / 251

参考书目 / 254