普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

赵云河 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

赵云河　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，结合作者的教学经验并借鉴国内外同类优秀教材的长处编写而成. 全书共 7 章，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换，以及一些线性代数应用案例. 除第 7 章外，各章的每节后均配有习题，每章后配有总习题，并在书末附有习题答案. 在编写中力求内容循序渐进、逻辑清晰、重点突出、通俗易懂，便于学生理解和老师教学.

本书可作为高等学校理工类和经济管理类各专业线性代数课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/赵云河主编. —北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031380-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 104981 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：1—5 000 字数：330 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

线性代数是理工类和经济管理类等有关专业的一门重要基础课，它不仅是学习其他数学课程的基础，也是自然科学、工程技术和经济管理等各领域应用广泛的数学工具.

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，参考了最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合作者长期从事线性代数教学的经验和体会，并注意借鉴和吸收国内外优秀教材的优点，为适应不断变化的学生生源和各专业对线性代数的不同要求而编写的. 为保证教材的教学适用性，在编写过程中，对教材的体系、内容的安排及例题和习题的选择作了合理的配置. 在本书中，我们着重注意了如下几个问题：

(1) 作为一门数学基础课教材，本书注意保持数学学科本身的科学性和系统性. 在引入概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对部分冗长、繁琐的推理则略去，突出有关理论、方法的应用，注重线性代数有关概念在实际应用方面的介绍.

(2) 注重例题和习题的合理搭配及习题的难易梯度，满足不同学习目标的学生的需求. 书中每节后均配有习题，每章后的总习题均分为(A)，(B)两组，其中(A)组为常规的解答题和证明题，(B)组为选择题和填空题，这样安排便于学生加强对基本概念和基本运算的理解和学习.

本书共 7 章，主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换，以及一定的线性代数应用案例. 对数学要求较高的理工类专业，原则上可讲授本书的前 6 章内容；对经济管理类专业，可讲授本书的前 5 章内容. 第 7 章为线性代数的四个应用案例，以窥见线性代数应用的广泛性，供教学中选用.

本书由赵云河主编，王林教授主审. 参加本书编写的有王刚(第 1 章)、马嘉芸(第 2 章)、赵云河(第 3 章、第 7 章)、陈贻娟(第 4 章)、王云秋(第 5 章)、马磊(第 6 章)，全书由赵云河统稿.

在本书的编写过程中，参考了众多的国内外教材，并得到云南财经大学统计与数学学院的领导及同事的支持和协助；科学出版社给予了大力支持，使得本书得以顺利出版. 在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以期不断完善.

作　者

2011 年 5 月

目　　录

前言
第 1 章　行列式 …… 1
1.1　二阶与三阶行列式 …… 1
1.1.1　二阶行列式 …… 1
1.1.2　二阶线性方程组 …… 1
1.1.3　三阶行列式 …… 2
1.1.4　三元线性方程组 …… 3
习题 1.1 …… 4
1.2　n 阶行列式 …… 5
1.2.1　排列与逆序 …… 5
1.2.2　n 阶行列式的定义 …… 6
习题 1.2 …… 9
1.3　行列式的性质 …… 10
习题 1.3 …… 17
1.4　行列式按行(列)展开 …… 19
1.4.1　行列式按一行(列)展开 …… 19
1.4.2　行列式按某 k 行(列)展开 …… 24
习题 1.4 …… 25
1.5　克拉默法则 …… 26
习题 1.5 …… 29
总习题一 …… 30
第 2 章　矩阵 …… 35
2.1　矩阵的概念及运算 …… 35
2.1.1　矩阵的定义 …… 35
2.1.2　一些特殊的矩阵 …… 37
2.1.3　矩阵的运算 …… 38
习题 2.1 …… 47
2.2　可逆矩阵 …… 47
2.2.1　可逆矩阵的定义 …… 47
2.2.2　可逆矩阵的性质 …… 50
习题 2.2 …… 51

2.3 分块矩阵 …… 52
2.3.1 分块矩阵的概念 …… 52
2.3.2 分块矩阵的运算 …… 54
2.3.3 一些特殊分块矩阵的运算 …… 56
习题 2.3 …… 58
2.4 初等变换与初等矩阵 …… 59
2.4.1 矩阵的初等变换 …… 59
2.4.2 初等矩阵 …… 61
2.4.3 初等变换法求逆矩阵 …… 64
习题 2.4 …… 69
2.5 矩阵的秩 …… 69
2.5.1 矩阵秩的概念 …… 70
2.5.2 矩阵秩的性质 …… 72
习题 2.5 …… 72
总习题二 …… 73
第 3 章 线性方程组 …… 79
3.1 消元法 …… 79
3.1.1 线性方程组的消元解法 …… 80
3.1.2 线性方程组有解的判别定理 …… 87
习题 3.1 …… 90
3.2 向量与向量组的线性组合 …… 91
3.2.1 向量及其线性运算 …… 91
3.2.2 向量组的线性组合 …… 95
3.2.3 向量组等价 …… 97
习题 3.2 …… 98
3.3 向量组的线性相关性 …… 99
3.3.1 向量组的线性相关性概念 …… 99
3.3.2 向量组线性相关性的有关定理 …… 103
习题 3.3 …… 106
3.4 向量组的秩 …… 106
3.4.1 向量组的极大线性无关组 …… 106
3.4.2 向量组的秩与矩阵秩的关系 …… 108
习题 3.4 …… 111
3.5 线性方程组解的结构 …… 112
3.5.1 齐次线性方程组解的结构 …… 112
3.5.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 119

习题 3.5 …… 122
总习题三 …… 123
第 4 章 矩阵的特征值 …… 130
4.1 向量的内积、长度与正交 …… 130
4.1.1 向量的内积、长度及其性质 …… 130
4.1.2 正交向量组 …… 132
4.1.3 正交矩阵、正交变换 …… 134
习题 4.1 …… 136
4.2 方阵的特征值与特征向量 …… 136
4.2.1 特征值与特征向量 …… 137
4.2.2 特征值与特征向量的性质 …… 139
习题 4.2 …… 142
4.3 相似矩阵 …… 143
4.3.1 相似矩阵的概念 …… 143
4.3.2 相似矩阵的性质 …… 144
4.3.3 矩阵与对角矩阵相似的条件 …… 144
4.3.4 矩阵对角化的步骤 …… 147
习题 4.3 …… 149
4.4 实对称矩阵的对角化 …… 150
习题 4.4 …… 154
总习题四 …… 155
第 5 章 二次型 …… 158
5.1 二次型的基本概念 …… 158
习题 5.1 …… 160
5.2 化二次型为标准形 …… 161
习题 5.2 …… 166
5.3 正定二次型 …… 166
习题 5.3 …… 168
总习题五 …… 169
第 6 章 线性空间与线性变换 …… 172
6.1 线性空间的定义与性质 …… 172
6.1.1 线性空间的定义 …… 172
6.1.2 线性空间的性质 …… 175
6.1.3 线性子空间 …… 175
习题 6.1 …… 177
6.2 线性空间的基、维数与坐标 …… 177

6.2.1　线性空间的基与维数 …… 177

6.2.2　线性空间的基与坐标 …… 178

习题 6.2 …… 185

6.3　基变换与坐标变换 …… 186

6.3.1　基变换公式 …… 186

6.3.2　坐标变换公式 …… 187

习题 6.3 …… 195

6.4　线性变换 …… 195

6.4.1　线性变换的定义 …… 195

6.4.2　线性变换的性质 …… 199

6.4.3　线性变换的值域与核 …… 200

习题 6.4 …… 201

6.5　线性变换的矩阵表示 …… 202

6.5.1　线性变换的矩阵 …… 202

6.5.2　线性变换与矩阵的关系 …… 208

习题 6.5 …… 212

总习题六 …… 213

第 7 章　应用案例 …… 218

7.1　投入产出模型 …… 218

7.1.1　模型的构建 …… 218

7.1.2　模型的求解和应用 …… 220

7.2　森林管理模型 …… 221

7.2.1　模型的构建 …… 221

7.2.2　模型的求解和应用 …… 223

7.3　汽车保险模型 …… 224

7.3.1　模型的构建 …… 224

7.3.2　模型的求解和应用 …… 226

7.4　满意度测量模型 …… 227

7.4.1　模型的构建 …… 228

7.4.2　模型的求解 …… 229

7.4.3　模型的应用 …… 230

参考文献 …… 231

部分习题答案 …… 232

第1章　行　列　式

行列式实质是由一些数值排成的数表按一定的规则计算得到的一个数，其主要运用于对线性方程组的研究. 由于计算机技术和计算软件的发展，在常见的高阶行列式计算中，行列式的数值计算已不成问题. 但是，行列式公式依然可以给出构成行列式的数表的重要信息，而在线性代数的某些应用中，行列式的知识依然很有用，特别在本课程中，它是研究线性代数方程组、矩阵及向量线性相关性的一种重要工具.

本章主要讨论行列式的概念、性质及计算方法，并介绍用行列式解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

定义 1.1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**. 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的元素. 横排称为行，竖排称为列，元素 a_{ij} 的第一个下标i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. a_{ij} 表明该元素是位于第i 行与第j 列交叉点上的元素.

由定义 1.1 可知，二阶行列式是由 2^2 个元素按一定的规律运算所得到的一个数，这个规律性在行列式的记号中称为“对角线法则”，如图 1-1 所示.

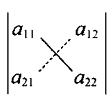

图 1-1

1.1.2　二阶线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.1.2)\end{cases}.$$

式(1.1.1)$\times a_{22}$一式(1.1.2)$\times a_{12}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\times x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \tag{1.1.3}$$

同理,式(1.1.2)$\times a_{11}$－式(1.1.1)$\times a_{21}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\times x_1=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{1.1.4}$$

用二阶行列式的定义,记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 D 又称为二元线性方程组的系数行列式. 又记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

$D_j(j=1,2)$又称为二元线性方程组的常数项行列式,其构成是系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组中的常数项$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$去代替. 则式(1.1.3),式(1.1.4)可写成

$$\begin{cases} Dx_1=D_1 \\ Dx_2=D_2 \end{cases}.$$

于是,我们就有如下结论:对于二元线性方程组,当其系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组有唯一解,且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2)$.

例 1　解方程组$\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$.

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-(-1)=4\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-(-2)=5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1,$$

故方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{5}{4},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{4}.$$

1.1.3　三阶行列式

定义 1.2　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由定义 1.2 可知，三阶行列式的展开式共有 6 项，每一项均为来自不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算规律可用如图 1-2 所示"对解线法则"来表述.

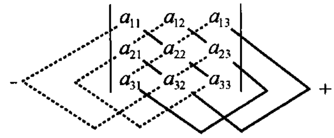

图 1-2

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times2\times3+0\times2\times2+2\times1\times0-2\times1\times2-0\times1\times3-1\times2\times0$$
$$=3+0+0-4-0-0=-1.$$

例 3 解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$.

解
$$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0.$$

于是解得 $x=1$ 或 $x=3$.

1.1.4 三元线性方程组

对于给定的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

类似于二元线性方程组的讨论，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D 称为系数行列式，$D_j(j=1,2,3)$称为常数项行列式. 于是，对于三元线性方程组，当其系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组有唯一解，且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,3)$.

例 4 解三元线性方程组$\begin{cases}-x_1+2x_2-x_3=2\\2x_1+x_2-3x_3=1\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$.

解 因为$D=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\2&1&-3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-5\neq0$,故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}2&2&-1\\1&1&-3\\0&-1&1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\2&1&-3\\1&0&1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-5.$$

于是所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习　题　1.1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}\sin x&1\\1&\cos x\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}x-1&1\\1&x+1\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

3. 当k取何值时,$\begin{vmatrix}k&3&4\\-1&k&0\\0&k&1\end{vmatrix}=0$?

4. 行列式$\begin{vmatrix}a&1&1\\0&-1&0\\4&a&a\end{vmatrix}>0$的充分必要条件是什么?

5. 解方程$\begin{vmatrix}3&1&1\\x&1&0\\x^2&3&1\end{vmatrix}=0$.

6. 证明下列等式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式

利用二阶和三阶行列式，使二元和三元线性方程组的公式便于记忆和使用，人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式，并利用 n 阶行列式来讨论线性方程组的解，使它的解有便于记忆的简捷形式. 为了得到 n 阶行列式的概念，我们先来学习全排列和逆序数的有关知识.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.3 由 n 个不同的数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有确定顺序而无重复数码的排列称为一个 n **级排列**，简称为**排列**，一般记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，1234 和 4231 均为 4 级排列，342561 是一个 6 级排列.

注 n 级排列总共有 $n!$ 种不同排法，并且称 n 级排列中按自然数大小顺序的排列，即 $123\cdots n$ 为 n 级的**标准排列**或称为**自然排列**.

定义 1.4 若在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $i_s>i_t$（即一个较大的数排在一个较小数前面）时，则称这两个数构成了一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

由定义 1.4 知求逆序数的方法：

先考察 i_1 与后面的 $n-1$ 数 $i_2\cdots i_n$ 构成的逆序个数，记为 t_1；再先考察 i_2 与后面的 $n-2$ 数 $i_3\cdots i_n$ 构成的逆序个数，记为 t_2；以此类推，最后考察 i_{n-1} 与数 i_n 构成的逆序个数，记为 t_{n-1}，而 i_n 后已没数，故 $t_n=0$，则

$$N(i_1i_2\cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

例 1 计算排列 32514 的逆序数.

解 将数码 3 与后面的 4 个数码比较，构成 2 个逆序，即 $t_1=2$；

将数码 2 与后面的 3 个数码比较，构成 1 个逆序，即 $t_2=1$；

将数码 5 与后面的 2 个数码比较，构成 2 个逆序，即 $t_3=2$；

数码 1 与数码 4 不构成逆序，即 $t_4=0$.

所以所求排列的逆序数为

$$N(32514) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2+1+2+0 = 5$$

注 $N(12\cdots n)=0$，即标准排列的逆序数为 0.

定义 1.5 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

规定:标准排列 $123\cdots n$ 为偶排列.

注 在 n 级排列的所有 $n!$ 种不同的排列中,奇偶排列各占一半.

例如,3 级排列总共有 $3!=6$ 种不同排法,其中 123,231,312 为偶排列;而 213,321,132 为奇排列.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数,并讨论其奇偶性.

解 $N(n(n-1)\cdots 321)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

易见,当 $n=4k,4k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3(k\in\mathbf{N})$ 时,该排列为奇排列.

定义 1.6 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果交换数码 i_s 与 i_t 的位置,其他数码位置不变,得到一个新的 n 级排列,称为对排列施行了一次对换,记为对换 (i_s,i_t),即

$$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n \xrightarrow{(i_s,i_t)} i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$$

例如,$35241\xrightarrow{(2,4)}35421$.其中 35241 为奇排列,35421 为偶排列.关于对换有如下性质:对一个排列施行一次对换后其奇偶性改变.

1.2.2 n 阶行列式的定义

排列的有关结论能帮助我们将二、三阶行列式推广到 n 阶行列式.

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

易见:

(1) 三阶行列式共由 $6(3!=6)$ 项之和构成,这对应于 3 级排列共有 $3!$ 种不同的排法.

(2) 每一项均是取自不同行不同列的三个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列.

(3) 每一项前面的符号,当行标是标准排列时,如果列标 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时前面带"+"号,是奇排列时前面带"−"号.

故三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示对所有三阶排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

为此，我们将行列式定义推广到 n 阶情形.

定义 1.7 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 ***n* 阶行列式**. 规定其为所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 每一项的符号为：当该项各元素的行标按标准排列后，若对应的列标排列为偶排列则取正号，是奇排列则取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有 n 阶排列$j_1j_2\cdots j_n$ 求和，且称$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为一般项. 行列式有时又记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

注 (1) 由于 n 级排列总共有 $n!$ 项，因此行列式展开式中有 $n!$ 项之和；

(2) 行列式中每一项是来自不同行、不同列的 n 个元素之积；

(3) 行列式每一项的符号依赖列标排列的奇偶性.

当 $n=2,3$ 时，此定义得到的二阶、三阶行列式与用对角线法则所得到的结果一致，当 $n=1$ 时，一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.

对四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

其展开式共有 $4!=24$ 项之和. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$是 24 项中的一项，这是由于项中的元素是取自不同行、不同列的四个元素乘积，列标排列为 1234，项前面符号带正号；$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$也是其展开式中的项，列标排列为 1324，是奇排列，所以项前面带负号；而 $a_{11}a_{21}a_{33}a_{44}$虽然是四阶行列式中的四个元素之积，但它不是展开式中的项，原因是元素 a_{11}，a_{21}来自同一列.

例 3　用行列式定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　四阶行列式 D 的一般项是 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，现考察不为零的项. 要 $a_{1j_1}\neq 0$，只有 $j_1=4$；同理可得 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$. 即行列式中不为零的项只有

$$(-1)^{N(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^{N(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

故 $D=24$.

一般地，有如下结果：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 4　称形如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$（满足 $a_{ij}=0(j>i)$）为下三角形行列式. 用定义计算 D.

解　行列式 D 的展开式的一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项. 要 $a_{1j_1}\neq 0$，只有 $j_1=1$；要 $a_{2j_2}\neq 0$，须 $j_2=1$ 或 2，而第 1 列元素已被 j_1 选取，故只能取 2；同理可得 $j_3=3,\cdots,j_n=n$. 所以不为零的项只有 $(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

故下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替.

定理 1.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以表示为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.2.1}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证明 由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列,因此式(1.2.1)中的 n 个元素是取自 D 的不同行、不同列.

如果交换式(1.2.1)中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$,则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 换为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,由对换的性质知其逆序数奇偶性改变;列标排列由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 换为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$,其逆序数奇偶性亦改变. 但对换后两下标排列的逆序数之和的奇偶性则不变,即

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}\\=&(-1)^{N(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}\end{aligned}$$

所以对换式(1.2.1)中的元素位置,其符号不变. 这样,我们总可以经过有限次对换式(1.2.1)中元素的位置,使其行标变成标准排列,其相应的列标变成另一个 n 级排列,设为 $k_1k_2\cdots k_n$,则

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\=&(-1)^{N(12\cdots n)+N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\\=&(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.\end{aligned}$$

推论 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项也可以表示为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 n 级排列.

例 5 判断 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{24}a_{11}$ 是不是五阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项? 若是则该项前面应带什么符号?

解 因为 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{24}a_{11}$ 的 5 个元素是取自 D 的不同行,不同列的,满足行列式定义的要求,所以 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{24}a_{11}$ 是五阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项.

又因为 $N(54321)+N(52341)=10+7=17$,所以此项前面应带负号.

习 题 1.2

1. 求下列排列的逆序数: