科學圖書大庫

高中數學叢書之一

# 向量解析幾何

編者　繆龍驥　曾俊宏

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

高中數學叢書之一

# 向量解析幾何

編者　繆龍驥　曾俊宏



徐氏基金會出版

# 我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良發行系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

# 序　言

我們計畫就高中數學的題材，編出一套可供教師及同學參考的叢書，這就是其中的第一本。

本書內容主要是向量概念的介紹，以及解析幾何的討論。

除了用向量討論直線，平面，圓及球外，我們也介紹這些圖形的坐標方程式。至於圓錐曲線（橢圓，拋物線及雙曲線）我們只用比較容易的坐標方法來討論，而且只對曲線軸平行於坐標軸（沒有 $x_1x_2$ 項）的圓錐曲線詳加討論。

除了本文說明詳細外，還有很多習題，其中也包含了許多有趣的問題。請讀者不要忽略習題部分。

本書的編寫主要根據西德巴伐利亞邦，高中幾何教本：

(1) Honsberg: Vektorielle Analytische Geometrie.

(2) Jehle-Moeller-Zeitler: Analytische Geometrie der Abbildungen.

編　者

# 目　録

# 第一章 線性相關向量

## §1. 向量的介紹與定義

大家想想看，速度與時間或者力量與質量基本上不同的地方在那裏？我們又如何用圖形來表示速度與力量？

**A. 平行相等的有向線段** 我們把空間看成剛體一樣平行移動。最初位置爲 $A_1$ 的點就沿着一條直線移動到最後的位置 $A_2$（圖1）。有向線段 $A_1A_2$ 我們用一個箭頭來表示，$A_1$ 爲箭的始點而 $A_2$ 爲終點。於是箭頭可由有序點對（$A_1$，$A_2$）來決定。另一有序點對（$A_2$，$A_1$）（注意：秩序與上面點對的相反）表示與（$A_1$，$A_2$）反方向的箭頭。

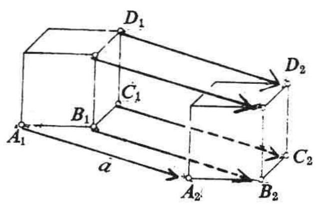

圖 1

圖 1 裏的其他箭頭（$B_1$，$B_2$），（$C_1$，$C_2$）以及（$D_1$，$D_2$）都可由箭頭（$A_1$，$A_2$）平行移動得到。這些箭頭的方向都相同而且長度（或稱爲絕對值）也一樣。

**定義**：設（$A_1$，$A_2$）和（$B_1$，$B_2$）是兩個箭頭。若這兩箭頭的方向相同而且長度也一樣，那麼我們就說箭頭（$A_1$，$A_2$）與箭頭（$B_1$，$B_2$）平行相等。箭頭（$A_1$，$A_2$）該與其本身平行相等。

若箭頭（$A_1$，$A_2$）與箭頭（$B_1$，$B_2$）平行相等，那麼我們可以平行移動（$A_1$，$A_2$）到（$B_1$，$B_2$）上，或平行移動（$B_1$，$B_2$）到（$A_1$，$A_2$）上。

**平行相等和等價關係** 現在我們考慮由空間（或平面）所有箭頭所組成的集合。任意一對箭頭只有兩種可能：此兩箭頭爲平行相等或者不是。因爲沒有第三種可能性發生，所有我們把箭頭的平行相等關係稱爲有決定性的。

集合內兩元素間的一關係，若除了有決定性外，而且還是“自反的，對稱的

以及可遞的”，那麼我就稱這關係爲一個等價關係。

**平行相等性有下列三個性質：**

一、每個箭頭與其本身平行相等；也就是說，平行相等性是自反的。

二、若一箭頭與第二箭頭平行相等，則第二箭頭也與第一箭頭平行相等；也就是說，平行相等性是對稱的。

三、若一箭頭與第二箭頭平行相等，而第二箭頭又與第三箭頭平行相等，則第一箭頭也與第三箭頭平行相等；也就是說，平行相等性是可遞的。

和其他等價關係一樣，箭頭的平行相等性可用來分類箭頭。所有和箭頭（$A_1$，$A_2$）平行相等的箭頭構成一個等價類。

**其他等價關係**

平面上，所有三角形所組成集合裏的全等性。

平面上，所有圖形所組成集合裏的相似性。

空間裏，所有線段所組成集合裏的長度相等性。

在圖 1 裏，箭頭（$A_1$，$A_2$），（$B_1$，$B_2$），……等等組成箭頭的一個平行相等類。這同一類箭頭，我們將稱爲向量。在§ 2 及 3 裏，我們將討論空間裏（或平面上）如此箭頭類的加法與乘法運算規則。

**向量的定義**：若一個平行相等箭頭類（所有平行相等的箭頭所組成）的箭頭滿足（§ 2 及 3 的）向量運算規則，則這個平行相等箭頭類稱爲向量。

一個單獨的箭頭稱爲向量的代表。以後我們用粗體字代表向量，例如：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…，兩個箭頭若是長度(絕對值)與方向都一樣，不論位置如何，都代表同一個向量。

**例 1**：圖2b 裏，6 個箭號的每一個都代表飛機的速度 $\boldsymbol{v}$。

我們說“向量 $\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}$ ”，卽表示：由箭號（$A_1$，$A_2$）所代表的向

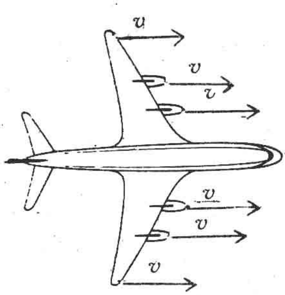


圖 2（a）

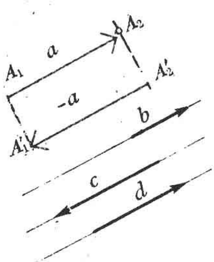


圖 2（b）

量（即是所有與（$A_1$，$A_2$）平行相等箭號所組成的一個箭號類）是$\boldsymbol{a}$。一個箭頭除了“向量代表”外，我們也稱爲“始點及終點爲固定的向量”。

**定義**：兩向量$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{b}$，若代表同一個平行相等箭頭類，則稱爲相等。符號：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

**例 2**：若圖 1 的箭頭（$A_1$，$A_2$）代表向量$\boldsymbol{a}$，箭頭（$B_1$，$B_2$）代表向量$\boldsymbol{b}$，（$C_1$，$C_2$）代表向量$\boldsymbol{c}$，則$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。

若箭頭（$A_1$，$A_2$）（圖 2 b）代表向量$\boldsymbol{a}$，則反箭頭（$A_2$，$A_2$）代表$\boldsymbol{a}$的反向量，我們以$-\boldsymbol{a}$表示。$-\boldsymbol{a}$的反向量仍然是$\boldsymbol{a}$。

若箭頭所在的各直線（圖 2b）平行，那麼這些箭頭所代表的向量，我們也稱爲平行。因此一個向量和他的反向量是平行的。

**B. 物理上有方向的量**　爲了要表示大小爲$K=30$牛頓（仟克 - 米／秒）的力，一般他們先定一個單位，例如，以 1 cm 的長度代表 10 牛頓，那麼$K=30$牛頓的力就是一個 30 cm 長的箭頭了，它的方向就是原來力的方向。但是這個代表力的有向線段$K=\boldsymbol{k}$並不是一個向量。我們說兩個力相同，這是說，若這兩力施於一個剛體上，那麼它的作用是一樣的。但是若剛體可繞一軸旋轉，那麼雖然我們將力的作用點沿着力的所在直線上移動，它的作用不變，但是我們若將力移出該直線，力的作用就會變動，也就是力的轉矩會變動。所以代表力的箭頭必須和力所在的直線連在一起。也就是說代表力的箭頭不能任意平行移動。代表速度，磁場及電場強度是另一種有方向的量，這些有向的量却符合向量的運算了。

**C. 純　量** (scalar) 他們把沒有方向的量稱爲純量，例如溫度，我們只用一個實數就能代表，所以溫度沒有方向而是個純量。其他物理上的純量有質量，時間，能量，電量等等。要決定這些純量前，單位及測量的零點（即標準點）要一致。我們若去掉這些物理純量（測量數乘上測量單位）的測量單位，則所有純量都是實數。

在數學裏，線段長度，向量絕對值，角度大小，面積以及體積都是純量。當我們在實數軸上不考慮方向時，我們也把實數稱爲純量。

## §2.　向量的加減法

**A. 加　法**　大家也許知道，把兩個速度箭頭$\boldsymbol{v}_1$及$\boldsymbol{v}_2$接在一起，可以得

到另一個速度和的箭頭 $\boldsymbol{v}$。圖 3a 裏，一艘汽艇在渡河，它相對於水面的速度是 $\boldsymbol{v}_1$，而河水相對於地面的速度是 $\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}$ 是汽艇相對於地面的速度。船在同一時間通過箭頭 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 及 $\boldsymbol{v}$。箭頭 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$ 連在一起所到的終點，與箭頭 $\boldsymbol{v}$ 單獨所達到的相同。因此 $\boldsymbol{v}$ 必須是以 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$ 爲兩邊所組成平行四邊形的對角線。在每個以 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 及 $\boldsymbol{v}$ 爲三邊的三角形中，$\boldsymbol{v}$ 皆可由連結 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$（一箭頭終點連結另一箭頭起點）而得到。這些三角形都可以代替上述求和向量的平行四邊形。

若向量 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$ 的方向相同（如圖 3b 下方），則上述的平行四邊形及三角形都落在同一條直線上，這時間向量的加法變成了線段長的加法：$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}$。因此一般由平行四邊形或三角形方法所得到兩向量 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$ 的和也寫成：$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}$。這時加號所表示的意義要比實數的加法廣一些。

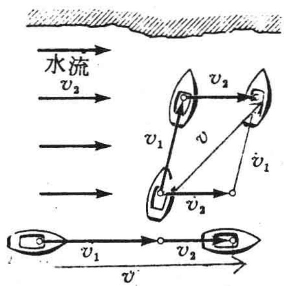


圖 3（a）

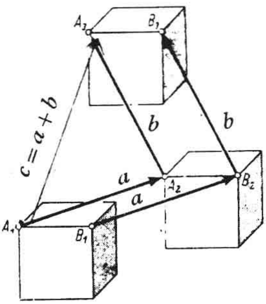


圖 3（b）

下面是向量加法的一個更簡單的例子：

在圖 3b 裏，立方體平行移動，先從 $A_1$ 到 $A_2$，然後從 $A_2$ 移動 $A_3$，最後位置與直接從 $A_1$ 移動到 $A_3$ 的位置相同。我們把最後得到的向量（這是唯一決定的）$\boldsymbol{c}$ 稱爲 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的和向量且寫成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

這就是向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的加法。

**定義**：若把向量 $\boldsymbol{a}$ 的一箭頭終點與向量 $\boldsymbol{b}$ 的一箭頭始點重疊，則以 $\boldsymbol{a}$ 的始點爲始點而以 $\boldsymbol{b}$ 的終點爲終點所代表的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的和向量：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}。$$

和向量是唯一決定的且與代表的箭頭選法無關。例如：圖 3b 裏 $\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{B_1B_3}$ 都代表和向量 $\boldsymbol{c}$。

我們也把 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 稱爲向量 $\boldsymbol{c}$ 的分量，如同兩個力的分力合成一力一樣。

圖 4 說明了向量的互換法則（即交換律）：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

若把一向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的反向量 $-\boldsymbol{a}$ 相加起來，那麼和向量 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$ 的絕對值（長度）為零且沒有方向，這種向量稱為零向量，以 $\mathbf{0}$ 表示：（零向量的方向也可以說成不定）

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$$

和零向量相加，其結果不變：

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

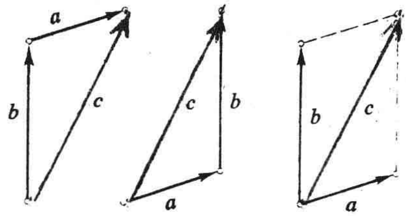

圖 4

B. **向量減法**　我們有兩種方法可將向量的減法變回向量的加法。我們把向量和其反向量相加：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$。反向量 $-\boldsymbol{a}$ 與向量 $\boldsymbol{a}$ 的相對關係和數 $a$ 與 $-a$ 的關係很相似，關於數我們有關係：$b-a=b+(-a)$。

**定義**：減去向量 $\boldsymbol{a}$ 也等於加上反向量 $-\boldsymbol{a}$。

這是第一種方法，圖 5 所表示就是：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

第二方法是比較常使用的。首先我們比較實數的減法：方程式 $a+x=b$ 的解是 $x=b-a$。關於向量的加減法，這個法則也必須成立。為了要求向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，我們考慮向量方程式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，這裏面只出現向量的加法，此時 $\boldsymbol{x}$ 就可如圖 6 求得：將 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的始點重疊，那麼從 $\boldsymbol{a}$ 的終點到 $\boldsymbol{b}$ 的終點的箭頭就代表向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

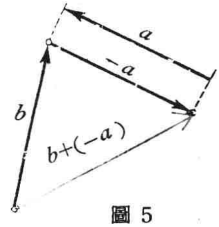

圖 5

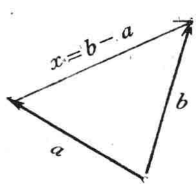

圖 6

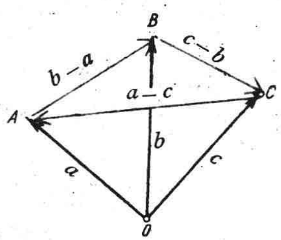

圖 7

**例 1**：（圖 7）

由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 決定一四邊形 $OABC$，於是

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　（$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}$）

$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$　（$\because \boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c}$）

$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$　（$\because \boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{a}$）

反之 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$。

**C. 向量鏈** 圖8裏，把幾個向量箭頭始點與終點分別接起來便得到一個向量鏈。這個向量鏈是開的而且 $\boldsymbol{s}$ 爲它們的和。加上反向量 $-\boldsymbol{s}$，這向量鏈就變成閉的（沒有開口）它們的和是 $\boldsymbol{o}$：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+(-\boldsymbol{s})=\boldsymbol{o}$$

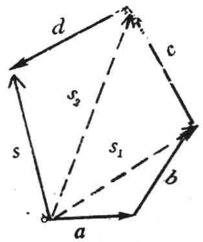


圖 8

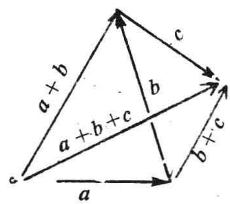


圖 9

**定理1**：一個閉向量鏈的和向量（即各向量的和）爲零向量。

**例2**：在圖8裏，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{o}$

**例3**：在圖7裏，$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$

**例4**：在圖9裏，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{o}$

**D. 結合律** 由圖9的各向量關係，我們知道：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

這就是向量加法的結合律。

**E. 向量群** 群的概念在數學裏佔很重要的地位。關於群的討論，讀者可參看其他書，在以後我們專討論代數的參考書裏也會提到。所有向量組成的集合，在向量加法的運算下構成一個群。換言之，下列群的公理都成立：

1. 兩向量相加仍得到一向量。
2. 有一個向量與每個向量相加，結果都不變。這個向量就是零向量 $\boldsymbol{o}$：

   $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$$

3. 對每個向量 $\boldsymbol{a}$，存在反向量 $-\boldsymbol{a}$，滿足

   $$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}$$

4. 向量加法滿足結合律：

   $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

**F. 平行向量的加減法** 在圖 10 裏，我們把向右邊的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 與它們的絕對值（長度）$a$，$b$，$c$ 相對應，而把反向量 $-\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{b}$，$-\boldsymbol{c}$ 與長度的負值，即 $-a$，$-b$，$-c$ 相對應。於是在以 $o$ 爲零點的數線上，實數的加減法就是平行向量的加減法。由向量相減的第一法得知：

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

這個關係，在數線上看來，就是大家所已知的：

$$a-(-b)=a+b$$

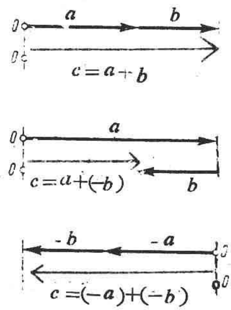

圖 10

## 習　題

設 $O$ 爲平行四邊形 $ABCD$ 的中心點，且半對角綫 $OA=\boldsymbol{a}$ 及 $OB=\boldsymbol{b}$。將下列各向量用 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 來表示：

1. $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$
2. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$
3. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$
4. $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$
6. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}$
7. (a) 從點 $O$ 起，三個向量構成一個四面體 $OABC$。試補上頂點 $D$（$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$），$E$（$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$），$F$（$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$）以及 $G$，使成爲一平行方體，且求方體內四個對角線。
   (b) 試用計算證明：適當選取上述四對角綫箭頭方向，那麼上述所有向量構成一個閉的向量鏈。
8. 飛機向南飛行，速率爲 500 km/h（在無風時），而風向爲往西南，風速爲 80 km/h 試量（用尺與角規）飛機關於地面的速度向量的絕對值及方向。
9. 一滑翔機在吹往上空的風中飛翔，同時有三種速度：飛機水平往東飛行，速率爲 20 m / sec （對無風而言），風同時以 15 m / sec 向北及以 10 m / sec 向上的速度向飛機吹。試量飛機最後關於地面的速度以及它的仰角。

## §3. 向量與純量之積

在實數的運算裏，我們知道 $a+a+a=3a$ 。試表示向量和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ ！ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}$ 的表示法對嗎？向量和 $-\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$ 有更簡單的表示法嗎？ $4/5\,\boldsymbol{a}$ 及 $-1/2\,\boldsymbol{a}$ 各代表什麼意義？

**A. 定　義**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{a}$ 為和 $\boldsymbol{a}$ 同方向，長度為 $4\,|\boldsymbol{a}|$ （ $|\boldsymbol{a}|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的長度或絕對值）的向量。但（ $-2.7$ ）$\boldsymbol{a}$（圖 11 ）代表什麼？

若 $\lambda$ 為任意實數，向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$ 的絕對值（即長度）為 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$ 。

若 $\lambda>0$ ，則向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 與向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向。

若 $\lambda<0$ ，則向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 與向量 $\boldsymbol{a}$ 反方向。

若 $\lambda=0$ ，則向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向未定。

向量 $\boldsymbol{a}$ 與實數 $\lambda$ 相乘： $\lambda\boldsymbol{a}$ ，中間不加點號。

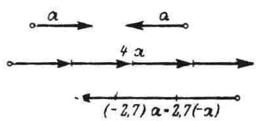


圖 11

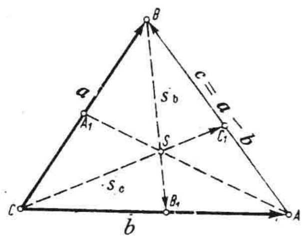


圖 12

**例 1**：向量 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$ 及 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$ 決定一個三角形（圖 12 ），$AA_1$ ，$BB_1$ ，$CC_1$ 為三中線。於是向量

$$\overrightarrow{CB_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\ ,\ \overrightarrow{B_1C}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\ ,\ \overrightarrow{CA_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\ ,\ \overrightarrow{AC_1}=0.5(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\ ,$$

$$\overrightarrow{CC_1}=0.5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ ,\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{s}_c\ ,\ \overrightarrow{C_1S}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{s}_c$$

$$\overrightarrow{SC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{s}_c\ ,\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{s}_c-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\text{，故 }\boldsymbol{s}_a=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

**B. 兩個分配律**　設 $\lambda$ 為任意實數，下列分配律成立：

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}$$

圖 13 就在說明這個公式（ $\lambda = 5/3$ ）。試想想看，若 $\lambda < 0$ ，的話，那圖形應變成如何？

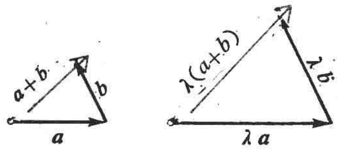

圖 13

第二分配律是：（ $\lambda$ ，$\mu$ 爲任意實數 ）

$$\boxed{(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}}$$

設 $\lambda = 2.8$ ，$\mu = -1.5$ ，試圖解此公式。

**C. 結合律**　結合律是：（ $\lambda$ ，$\mu$ 爲任意實數 ）

$$\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \mu(\cdot\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mu\boldsymbol{a}}$$

上述幾個向量都是和 $\boldsymbol{a}$ 平行的，而且絕對值都是 $|\lambda\mu|\,|\boldsymbol{a}|$ 。

**例 2**：設 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 爲已知向量，試求向量 $\boldsymbol{x}$ ：

$$\frac{8}{5}(3\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{x}) + 5(3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{b}) = 0$$

依前面的運算規則得

$$\frac{24}{5}\boldsymbol{a} - 8\boldsymbol{x} + 15\boldsymbol{x} - 10\boldsymbol{b} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$7\boldsymbol{x} = 10\boldsymbol{b} - \frac{24}{5}\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{10}{7}\boldsymbol{b} - \frac{24}{35}\boldsymbol{a}$$

**例 3**（圖 14 ）：從金塔底邊一端點 0 出發，兩向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 構成平行四邊形底，而向量 $\boldsymbol{c}$ 是到頂點 $C$ 。設 $M$ 爲平行四邊形中心， $C_1$ 爲邊 $AD$ 的中點， $S_1$ 爲三角形 $ADC$ 的重心。試以 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 來表示向量 $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{MS_1}$ ！

**解**：

利用閉的向量鏈：

(1) $\overrightarrow{OM} + \boldsymbol{x} + \overrightarrow{S_1C} + \overrightarrow{CO} = \boldsymbol{o}$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{x} + \overrightarrow{S_1C} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

(2) $\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \overrightarrow{C_1C} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$

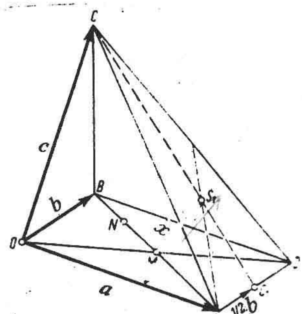

圖 14

$\overrightarrow{C_1C} = -\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$；$\overrightarrow{S_1C} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}$，故

(1) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} + \left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right) - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$；

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{6}\boldsymbol{a} - \frac{1}{6}\boldsymbol{b} + \frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

## 習 題

1. 在圖 14 內，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 表示下面兩向量：
   (a) $\overrightarrow{BS_1}$，(b) $\overrightarrow{NS_1}$，$N$ 爲 $BM$ 的中點。
2. 在圖 14 裏，設 $S_2$ 爲三角形 $OAC$ 的重心，$P$ 爲 $MD$ 的中點。試以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{PS_2}$！
3. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 從一點 $O$ 到一三角形的頂點 $A$，$B$，$C$。
   (a) 試求從 $O$ 分別到三個邊三角形的中心 $M_1$，$M_2$，$M_3$ 的向量！
   (b) 若 $S$ 爲該三角形的重心，試證 $\overrightarrow{OS} = 1/3\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$！
4. 解下列方程式中的向量 $\boldsymbol{x}$：
   (a) $\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{3}{5}\boldsymbol{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{0}$
   (b) $2\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\right) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
5. 設向量 $\boldsymbol{a}_1 = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} - \frac{3}{4}\boldsymbol{a}$ 是三角形的兩邊，試求第三邊 $\boldsymbol{x}$ 是什麼！
6. 設有三個向量的向量鏈：$2\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$3(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$，試求另一向量 $\boldsymbol{x}$，使變成閉的向量鏈！
7. 在圖 12 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 爲已知，求 $\overrightarrow{AS}$ 及 $\overrightarrow{A_1S}$。
8. 向量 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ 可展出一個平行方體。且已知 $\overrightarrow{OA_1} = \frac{2}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB_1} = \frac{4}{7}\boldsymbol{b}$。設向量鏈 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ 的終點爲 $D_1$，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 的終點爲 $E$。試以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示下述向量：
   (a) $\overrightarrow{A_1E}$　　(b) $\overrightarrow{B_1D}$　　(c) $\overrightarrow{A_1M}$，$\overrightarrow{B_1M}$
   $M$ 爲以 $ADE$ 爲頂點平行四邊形的中心。