高等学校优秀教材辅导丛书

GAODENG XUEXIAO YOUXIU JIAOCAI FUDAO CONGSHU

概率论与数理统计

学习指导与同步训练

GAILVLUN YU SHULITONGJI XUEXIZHIDAO YU TONGBU XUNLIAN

主编　鲁立刚　李春华　刘玉霞　郭金骥

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等学校优秀教材辅导丛书

概率论与数理统计
学习指导与同步训练

主　编　鲁立刚　李春华　刘玉霞　郭金骥

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是根据概率论与数理统计教学大纲的基本要求而编写的辅导教材。

全书共分为八章,每章包括:主要内容、典型例题、同步训练题及其解答等三部分。希望能帮助读者加深对概率论与数理统计基本内容的理解,进而掌握解题的办法、技巧,达到复习巩固教学内容、培养分析问题和解决问题能力的目的。

本书可作为理工科及经济与管理专业本科生的辅导教材或练习指导参考书,也可作为报考硕士研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与同步训练/鲁立刚,李春华,刘玉霞,郭金骥编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2008

ISBN 978-7-81073-893-4

Ⅰ.概… Ⅱ.①鲁…②李…③刘…④郭… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 086993 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 12
字　　数 285 千字
版　　次 2008 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 7 月第 3 次印刷
定　　价 27.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

《概率论与数理统计》是高等院校理工科、经济学、管理学等各专业学生必修的基础理论课之一，它是一门贴近生活、应用性很强、从数量方面研究随机现象规律性的学科，为了帮助学生更好的掌握该课程，用生活问题锤炼学习能力和创造能力，实际问题锤炼实践能力和交流能力，工作问题锤炼社会适应能力，提高学生的运算技能和抽象思维，逻辑推理，综合运用等能力。为深入课程改革我们特编写出版了《概率论与数量统计学习指导与同步训练》一书。

1.主要内容

对课程内容的知识进行概括总结，列出基本概念，重要定理和主要内容。

2.典型例题

从有关书籍和历年研究生考试题中精选了有代表性的例题并结合编者近年来教学实践经验编制了专业、实践问题的拓展题目，分三种题型：一、基本理论题型；二、学习与生活实践题型；三、专业与工作实践题型。这些例内容广，类型多，技巧性强，旨在提高分析能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟悉掌握解题技巧。一方面为考研奠定基础；另一方面为锤炼学习能力和创造能力，实践能力和交流能力，社会适应能力。

3.同步训练习题及解答

旨在进一步强化解题训练，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

本书由鲁立刚，李春华，刘玉霞，郭金骥主编，编写过程中得到了浙江万里学院基础学院、浙江纺织服装学院领导的热忱支持，有关同志提出宝贵的意见和建议，宁波工程学院荆广珠教授主审并担出宝贵建议，在此一并致以深切的感谢。

由于习题较多，解答上可能存在不准确或不完美之处，敬请读者与同仁不吝赐教，不胜感谢！

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第 1 章 事件与概率

本章大纲要求

1.理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,熟练掌握事件之间的关系与运算.

2.理解事件频率的概念,了解概率的统计定义和公理化定义.

3.理解古典概率的定义,会计算古典概型概率.

4.理解条件概率的概念,掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

5.掌握事件独立性概念,会用事件独立性进行概率计算.

6.理解重复独立试验的概念,会用二项概率公式计算事件的概率:

本章的主要内容

一、随机事件及其运算

1.随机试验　一个试验如果满足下述条件,就称该试验为随机试验,简称试验.

(1)可以在相同的情形下重复进行.

(2)每次试验可能结果不止一个,并且能事先明确知道试验的所有可能结果.

(3)每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2.样本空间　由随机试验的所有可能结果组成的集合称为该试验的样本空间.

3.随机事件　在随机试验中,可能发生也可能不发生的结果称为随机事件,简称事件.

4.基本事件　随机试验的每一个可能的结果称为基本事件.它是最简单的随机事件,有时也称样本点.

5.必然事件　若一个事件在每次试验中都必定发生,则称该事件为必然事件.显然样本空间是必然事件,记作 Ω.

6.不可能事件　在每次试验中一定不会发生的事件,称为不可能事件.它不包含任何基本结果,所以只能是空集,记作$\varnothing$.

7.事件的关系与运算

(1)包含关系　若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 含于事件 B,记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2)相等关系　若 $A\subset B$ 和 $A\supset B$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

(3)事件之和(并)　事件 A 和 B 至少有一个发生,这样的事件称为事件 A 与 B 的和事件,记作 $A\cup B$.

若几个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记作$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

(4)事件之积(交)　事件 A 与 B 同时发生.这样的事件称为事件 A 与 B 的积事件,记作

$A\cap B$.若几个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生,称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$.

(5)事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生,这样的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$.

(6)互不相容事件(互斥事件)　若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的或互斥的.

(7)对立事件(逆事件)　若事件 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为对立事件或互逆事件.A 的对立事件记为$\overline{A}$,$\overline{A}=\Omega-A$.

(8)事件的运算规律

①交换律　$A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A$

②结合律　$A\cup B(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;A\cap B(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

③分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cup C)$

④德·摩根律(对偶律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

注意:(1)对任意两个事件 A 与 B,一般,$(A\cup B)-B=A-B\neq A;(A-B)\cup B=A\cup B\neq A;A-(A-B)=AB\neq B$.

(2)$A=AB\cup A\overline{B}$,AB 与 $A\overline{B}$互不相容.

二、随机事件的概率及其性质

1.概率的定义　设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,如果对于 E 的每一个事件 A,均有一实数 $P(A)$与之对应,且集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件

(1)对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2)$P(\Omega)=1$;

(3)设 $A_1,A_2,\cdots$,是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j,A_i\cap A_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots$,则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$,则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

2.性质

(1)$P(\varnothing)=0$;

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$;

(3)设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有 $P(B-A)=P(B)-P(A);P(B)\geqslant P(A)$;

(4)对于任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$;

(5)对于任一事件 A,B 有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

一般,对于任意 n 个事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_{ij})+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

3.古典概型

若试验 E 具有如下两个特点

(1)试验的样本空间只包含有限个基本事件;

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

则称这种试验模型叫古典概型,也称为等可能概型.且事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间中的基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

注:在古典概型中,概率计算的关键是计算出事件 A 中所含基本事件的个数,既不能重复计算,又不能漏算.

4.条件概率

设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率符合概率定义中的三个条件

(1)对于每一个事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;

(2)$P(\Omega|A)=1$;

(3)设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,则有 $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i \mid A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i \mid A)$.

5.乘法定理

设 $P(A)>0$,由条件概率,则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

6.全概率公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组划分,且 $P(B_i)>0$　$(i=1,2,\cdots,n)$,则对 E 中的任意事件 A,有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A \mid B_i)$.

7.贝叶斯公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组划分,A 为 E 的任意一事件,且 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

8.事件的独立性

(1)设 A 与 B 为两随机事件,若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称事件 A 与事件 B 相互独立;

(2)若 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),i\neq j,i,j=1,2,3$,则称事件 A_1,A_2,A_3 两两相互独立;

(3)若事件 A_1,A_2,A_3 两两相互独立,并且 $P(A_1,A_2,A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,则称 A_1,A_2,A_3 是相互独立的;

(4)若对任意 $k(1<k\leqslant n)$ 个有序整数,$1\leqslant i_1<i_2<i_3<\cdots<i_k\leqslant n$,恒有 $P(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})P(A_{ik})$,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

注意:

(1)事件 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow A$ 与 $\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

(2)独立性是事件间的概率属性,不相容是事件间的集合论性质,后者与概率的形式毫无联系.

若 $P(A)>0,P(B>0)$,则 $\begin{cases}A\text{ 与 }B\text{ 互不相容}\Rightarrow A\text{ 与 }B\text{ 不独立}\\ A\text{ 与 }B\text{ 独立}\Rightarrow A\text{ 与 }B\text{ 相容}\end{cases}$

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$.

9.伯努利试验

若试验 E 只有两个可能结果,A 与$\overline{A}$,$P(A)=P,P(\overline{A})=1-P=q(0<P<1)$.将 E 独立地重复进行 n 次,则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验,简称伯努利试验.

10.二项概率公式

在 n 重伯努利试验中,若每次事件 A 发生的概率不变,都为 P,则在 n 重伯努利试验中事件 A 恰好发生 k 次($0\leqslant k\leqslant n$)的概率为

$$P_n(k)=C_n^kP^kq^{n-k}\quad(q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$$

典 型 例 题

一、基础理论题型

例 1 设一个试验有 10 种可能的结果,记该试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,事件 A,B,C 分别是 $A=\{2,3,4\},B=P\{3,4,5\},C=\{5,6,7\}$.求下列事件:(1)$\overline{\overline{A}B}$;(2)$\overline{A(\overline{BC})}$.

解 由德·摩根律

(1)$\overline{\overline{A}B}=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$.

(2)$\overline{A(\overline{BC})}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\{1,5,6,7,8,9,10\}\cup\{5\}$

$=\{1,5,6,7,8,9,10\}$.

例 2 设两两相互独立的事件 A、B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$________. (1999 年试题)

解 $\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=3P(A)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)=3P(A)-3(P(A))^2$

即$(P(A))^2-P(A)+\frac{3}{16}=0$,亦即$\left(P(A)-\frac{3}{4}\right)\left(P(A)-\frac{1}{4}\right)=0$,由于 $P(A)<\frac{1}{2}$,得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

例 3 设随机事件 A 与 B 为互不相容事件,且 $P(A)>0,P(B)>0$,则下列结论中一定成立的有(　　).

A.A,B 为对立事件　　B.$\overline{A},\overline{B}$互不相容

C.A,B 不独立　　D.A,B 相互独立

分析:A 与 B 互不相容,只说明 $AB=\varnothing$,但并不一定满足 $A\cup B=\Omega$,即 A 与 B 不一定是对立事件,当然$\overline{A}$与$\overline{B}$也不一定是对立事件,又由于 $AB=\varnothing$,有 $P(AB)=0$,但 $P(A)P(B)>0$,即$P(AB)\neq P(A)P(B)$,所以 A 与 B 不独立,故选 C.

例 4 设随机事件 A,B 同时发生的概率和同时不发生的概率相等,且 $P(A)=a$,则 $P(B)=$________.

解　根据题意 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$ 从而 $P(A)+P(B)=1$,即 $P(B)=1-a$.

例 5　已知 $P(\bar{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\bar{B})=0.5$,求 $P(B|A\cup\bar{B})$.

解　$P(B|A\cup\bar{B})=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\bar{B})}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}=\dfrac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=\dfrac{1}{4}$

例 6　已知 $P(A)=P(B)=0.4,P(A\cup B)=0.5$,试计算概率 $P(A|B);P(A-B);P(A|\bar{B})$.

解　由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,所以

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=2\times0.4-0.5=0.3$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.3=0.1$$

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A-B)}{1-P(B)}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{0.1}{0.6}=0.17$$

注:这里 $P(A|\bar{B})\neq1-P(A|B)$.

例 7　一射手向一目标独立地进行四次射击,若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$,则该射手的命中率为________.　(1990 年试题)

解　设该射手的命中率为 P,X 表示四次射击命中的次数,则

$$\frac{80}{81}=P\{X\geqslant1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-P)^4$$

$$(1-P)^4=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$$

解得 $P=\dfrac{2}{3}$.

例 8　设 A,B 是两个随机事件,其中 A 的概率不等于 0 和 1.证明:$P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.(2004 年试题)

证法一:由事件 A 概率的不等于 0 和 1,知题中两个条件概率都存在.

必要性.由事件 A 与 B 独立,知事件 $\bar{A}$ 与 B 独立,因此

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

类似地,$P(B|\bar{A})=P(B)$,既 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$.

充分性.由 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$,可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),P(AB)=P(A)P(B)$$

因此 A 与 B 独立.

证法二:由事件 A 概率的不等于 0 和 1,知题中两个条件概率都存在.

$$P(B|A)=P(B|\bar{A})\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$\Leftrightarrow P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow A$ 与 B 独立.

二、学习与生活实践题型

例 1　一袋中装有 $N-1$ 只黑球和 1 只白球，每次从袋中随机抽出 1 球，并换入 1 只黑球，这样继续下去，问第 k 次取出的是黑球的概率是多少.

解　设 A 表示事件"第 k 次取到黑球"，则 $\overline{A}$ 表示"第 k 次取到白球"，因为袋中只有 1 只白球，每次取出 1 球后总换入 1 只黑球，所以当第 k 次取出白球时，前 $k-1$ 次取出的一定是黑球，因此

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

即

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

注：在对立事件的概率容易求时，应先求其对立事件的概率，从而得到所求事件的概率.

例 2　假设几张体育彩票中有一张"中奖"，几个人依次排队摸彩.

(1)已知前 $K-1(K\leqslant n)$ 个人都未"中奖"，求第 K 个人"中奖"的概率；

(2)求第 $K(K\leqslant n)$ 个人摸彩时"中奖"的概率.

解　设 $A_i=$"第 i 个人摸彩时中奖"，$i=1,2,\cdots,n$，则

(1) $P(A_k\mid\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})=\dfrac{1}{n-(k-1)}=\dfrac{1}{n-k+1}$

(2) $$P(A_k)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\,\overline{A}_2)\cdots P(A_k\mid\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

注：此题说明了抽签与顺序是无关的.

例 3　甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________.

解　设 $A=$"甲射击一次命中目标"，$B=$"乙射击一次命中目标"，则要求的概率为

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$
$$=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=\frac{6}{8}=0.75$$

例 4　一年级共有学生 100 名，其中男生 60 人，女生 40 人，来自北京的有 20 人，其中男生12 人，若任选一人发现是女生，问该女生是来自北京的概率是多少.

解　设 $A=$"是女生"，$B=$"来自北京". 显然北京的学生中有女生 8 名，这是条件概率问题，即求 $P(B\mid A)$. 由于 $P(A)=\dfrac{40}{100}$，$P(AB)=\dfrac{8}{100}$，所以 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$.

例 5　某人有 5 把钥匙，其中有一把能打开房门，因为忘记哪一把是房门钥匙，逐一去试开，求(1)恰好第 3 次打开门的概率；(2)前三把能打开房门的概率.

解　设 $A_i=$"恰好第 i 次打开房门"$(i=1,2,3,4)$

(1) $P(A_1)=\dfrac{1}{5}$；由于 $A_2=\overline{A}_1A_2$ 且 A_1 与 A_2 相互独立，故

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{5}$$

(2)设 $B=$"前三次打开房门"，由于 A_1,A_2,A_3 互不相容，故

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{3}{5}$$

例 6　假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机地取出两个零件（取出的零件均不放回），试问

(1)先取出的零件是一等品的概率；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率.

解　设 B_j =“第 j 次取出的零件是一等品，$(j=1,2)$，A_i =“被挑出的是第 i 箱”，$(i=1,2)$，依题意

$$P(A_1)=P(A_2)=1/2,\quad P(B_1|A_1)=1/5,\quad P(B_1|A_2)=3/5$$

(1)由所设知所求的概率为 $P(B_i)$，根据全概率公式，知

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

(2)由所设知所求的概率为 $P(B_2|B_1)$，由条件概率定义和全概率公式，知

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|2A_2)}{P(B_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{10\times9}{50\times49}+\frac{18\times17}{30\times29}\right)}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)\approx0.485\,6$$

例 7　一学生接连参加同一课程的两次考试，第一次考试及格的概率为 P，若第一次及格，则第二次及格的概率也为 P，若第一次不及格则第二次及格的概率为 $P/2$.

(1)若至少有一次及格他能取得某种资格，求他取得该资格的概率；(2)若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解　设 A =“他取得该资格”，B_i =“第 i 次及格”，$i=1,2$，则

$$A=B_1\cup B_2,\quad B_2=B_1B_2+\overline{B}_1B_2$$

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)=P+P(B_1B_2)+P(\overline{B}_1B_2)-(B_1B_2)$$

$$=P+P(\overline{B}_1)P(B_2|\overline{B}_1)=P(1-P)\frac{P}{2}=\frac{1}{2}(3P-P^2)$$

(2)所求概率为

$$P(B_1|B_2)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(B_1)P(B_2|B_1)}{P(B_1)P(B_2|B_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)}$$

$$=\frac{P^2}{P^2+(1-P)\frac{P}{2}}=\frac{2P^2}{P^2+P}=\frac{2P}{P+1}$$

例 8　在一个罐子中有 5 个球，其颜色有白色和黑色两种，从罐子中取 4 次球，每次取一个，取出后均放回罐子中，1 次出现了白球，3 次出现了黑球，如在试验前每个球是白色或黑色球等可能的，求在罐中对白球数的各种假设的概率.

解　设 B =“取 4 球，1 次出现白球，3 次出现黑球”，H_i =“罐中有 i 个白球”$(i=0,1,2,3,4,5)$，由古典概型可得

$$P(H_0)=P(H_5)=\frac{1}{2^5},\quad P(H_1)=P(H_4)=\frac{5}{2^5},P(H_2)=P(H_3)=\frac{10}{2^5}$$

又由伯努利公式得

$$P(B|H_0)=0,\quad P(B|H_1)=C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3,\quad P(B|H_2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$P(B|H_3)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3,\quad P(B|H_4)=C_4^1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3,\quad P(B|H_5)=0$$

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{5}P(H_i)P(B\mid H_i)\\&=0+\frac{5}{32}C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3+\frac{10}{32}C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3+\frac{10}{32}C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3\\&\quad+\frac{5}{32}C_4^1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3+0\\&=0.064+0.108+0.048+0.004=0.224\end{aligned}$$

因此，由贝叶斯公式可得所求概率为 $P(H_0\mid B)=0, P(H_1\mid B)=0.185\,7, P(H_2\mid B)=0.482\,1, P(H_3\mid B)=0.214\,3, P(H_4\mid B)=0.017\,9, P(H_5\mid B)=0$.

三、专业与工作实践题型

例 1 某工厂有 10 个车间，每个车间选出 2 名代表出席职工代表会议，又从这 20 名代表中任选出 5 人组成工会会员．求：(1)第 2 车间在工会委员会中有代表的概率；(2)若从 20 名代表中任选出 10 人组成工会会员，每个车间在工会委员中都有代表的概率．

解 设 A =“第 2 车间在工会委员会中有代表”，则 $\overline{A}$ =“第 2 车间在工会委员会中没有代表”，B =“每个车间在工会委员会中都有代表，从 20 人中选出 5 人的基本事件总数为 C_{20}^5.

(1) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_{18}^5}{C_{20}^5}=\dfrac{17}{38}$

(2)事件 B 所含基本事件数为 2^{10}，所以 $P(B)=\dfrac{2^{10}}{C_{20}^{10}}=\dfrac{256}{46\,189}$.

例 2 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i=\dfrac{1}{i+1}(i=1,2,3)$ 以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\}=$ ________.

解 设事件 A_i =“实习生制造的第 i 个零件是合格品”，$i=1,2,3$ 依题意 A_1,A_2,A_3 相互独立

$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)\\&=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24}\end{aligned}$$

例 3 甲，乙，丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7，飞机被一人击中且击落的概率为 0.2，被两人击中且击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率．

解 设 B =“飞机被击落”；A_0 =“三人都射不中”，A_1 =“只一人射中”，A_2 =“两人同时射中”，A_3 =“三人同时射中”，显然 A_0,A_1,A_2,A_3 是样本空间后一个划分，由题意知

$$P(A_0)=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

$$P(A_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

$$P(A_2)=0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.3=0.41$$

$$P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

$$P(B|A_0)=0,P(B|A_1)=0.2,P(B|A_2)=0.6,P(B|A_3)=1$$

于是由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14=0.458$$

例 4　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1 和 0.1，一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机地查看 4 只；若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求

(1)顾客买下该箱的概率 P；

(2)在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 q.　　(1998 年试题)

解　设 B =“顾客买下所查看一箱”，A_i =“箱中恰有 i 件残次品”($i=0,1,2$)依题意，有

$$P(A_0)=0.8,\quad P(A_1)=P(A_2)=0.1$$

$$P(B|A_0)=1,P(B|A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},P(B|A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

(1)应用全概率公式

$$P=P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94$$

(2)应用贝叶斯公式

$$q=P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}\approx\frac{0.8}{0.94}\approx0.85$$

例 5　有三个保险人，他们在投保期间发生意外的概率分别是 0.7，0.5，0.3，这三个人生病住院的概率分别为 0.6，0.4，0.2，求他们三人全部住院的概率.

解　设 E 表示住院的概率，A，B，C，分别为三人发生意外的概率

$$P(A)=0.7\quad P(B)=0.5\quad P(C)=0.2$$

$$P(E|A)=0.6\quad P(E|B)=0.4\quad P(E|C)=0.2$$

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)$$

$$=0.7\times0.6+0.5\times0.4+0.3\times0.2=0.68$$

例 6　儿童经常接触用于植物、草坪等家用杀虫剂和头虱洗发液，患白血病的危险概率为3/5 000在家中受伤的危险概率为 1/80，小孩如果患上白血病又受伤流血的话是非常危险的，试问这个概率是多少？

解　记事件 A 为“小孩患白血病的概率”，事件 B 为“小孩在家中受伤的概率”，即

$$P(B|A)=3/50\,000*1/80=3/4\,000\,000$$

例 3－7　根据以往资料统计，某地区某种病(非传染性)的发病率为 0.002，若某单位有 5 000人，求(1)没有人患此病的概率；(2)至少有 2 人患此病的概率.

解　对 5 000 人的观察可以看作是 5 000 重伯努利试验，试 A =“被观察者患此病”，由题意 $P(A)=0.002$，$P(\overline{A})=0.998$.

(1)5 000 人中无人患此病的概率为

$$P_{5\,000}(0)=C_{5\,000}^{0}\times 0.002^{0}\times 0.998^{5\,000}\approx 0.000\,045$$

(2)令 B =“5 000 人中至少 2 人患此病”,则 $\overline{B}$ =“5 000 人中患此病的人数不多于 1 人”

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})=1-[P_{5\,000}(0)+P_{5\,000}(1)]\\&=1-C_{5\,000}^{0}\times 0.002^{0}\times 0.998^{5\,000}-C_{5\,000}^{1}\times 0.002\times 0.998^{4\,999}\\&=1-0.000\,045-0.000\,450\approx 0.999\,5\end{aligned}$$

例 3-8 实验室在器皿中繁殖成 k 个细菌的概率为

$$P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2,\cdots$$

并设所繁殖成的每个细菌为甲类菌或乙类菌的概率相等,求下列事件的概率:

(1)器皿中所繁殖的全部是甲类菌;

(2)已知全是甲类菌,求恰有 2 个甲类菌;

(3)求所繁殖的细菌中有 i 个甲类菌.

解 以事件 A 表示“繁殖的细菌全是甲类菌”,B_k 表示“繁殖了 k 个细菌”($k=0,1,2,\cdots$),A_i 表示“所繁殖的细菌中有 i 个甲类菌”($i=0,1,2,\cdots$).

(1)由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k)P(A\mid B_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^k}{k!}=e^{-\lambda}(e^{\frac{1}{2}\lambda}-1)\end{aligned}$$

$$(2)P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^{-\lambda}(e^{\frac{1}{2}\lambda}-1)}$$

(3)由题意

$$P(B_k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},P(A_i\mid B_k)=C_k^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}=C_k^i\frac{1}{2^k}$$

根据全概率公式

$$\begin{aligned}P_{A_i}&=\sum_{k=i}^{\infty}P(B_k)P(A_i\mid B_k)=\sum_{k=i}^{\infty}e^{-\lambda}C_k^i\left(\frac{1}{2}\right)^k=e^{-\lambda}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{k!}{k!\,i!\,(k-i)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\\&=e^{-\lambda}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k-i}}{(k-i)!}=e^{-\lambda}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!}e^{\frac{1}{2}\lambda}=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!}e^{\frac{1}{2}\lambda}\quad(i=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

四、专业、实践问题的拓展

1.谈谈古典概型应用的广泛性及分类,这些概率模型可以解决哪些问题.如解决 n 个人中至少 2 个人生日相同的问题($n=10,17,23,50$).

2.用伯努利概型解决银行服务窗口问题:

例如:某居民区有 n 个人,设有一个银行,开 m 个窗口,每个窗口都办理业务,假定在每一指定时刻,这 n 个人是否去银行是独立的,每人去银行的概率都是 p,现要求“在营业中任一时刻每个窗口的排队人数(包括正在被服务的那个人)不超过 s”这个事件的概率不小于 a(一般取 $a=0.80,0.90$ 或 0.95)则银行至少开设多少个服务窗口合理? 此模型还可以解决哪些现实问题并举例说明.如碰运气能否通过英语四级考试?

3. 如何理解条件概率,它与无条件概率有何区别？举例说明条件概率(在保险、财务管理、会计、生物、食品等方面)的应用.

4. 阐述了全概率公式,贝叶斯公式,就其应用举例说明(不少于 2 例).

5. 了解小概率事件,通过实例谈谈对小概率事件的认识及小概率原理在生活中的应用.

6. 基于概率本质的一些思考,谈谈概率与直觉的关系,阐述概率的重要性、魅力及对生活的指导.

同步训练题

一、选择题

1. 若事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则(　　).

A. A 和 B 不相容　　B. AB 是不可能事件

C. $AB=\varnothing$ 未必成立　　D. $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$　　(1987 年试题)

2. 设当事件 A 与 B 同时发生,事件 C 也发生,则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　(1992 年试题)

3. 设事件 A,B 相互独立,则 $P(A\cup B)=$(　　).

A. $P(A)+P(B)$　　B. $P(\bar{A})+P(\bar{B})$

C. $1-P(\bar{A})P(\bar{B})$　　D. $1-P(A)P(B)$

4. 设 A 和 B 为任意两个事件,且 $A\subset B$, $P(B)>0$,则下列选项中必然成立的是(　　).

A. $P(A)<P(A|B)$　　B. $P(A)\leqslant P(A|B)$

C. $P(A)>P(A|B)$　　D. $P(A)\geqslant P(A|B)$　　(1996 年试题)

5. 进行一系列独立的试验,每次试验成功的概率为 P,则在成功 2 次之前已经失败了 3 次的概率为(　　).

A. $4P^2(1-P)^3$　　B. $4P(1-P)^3$

C. $10P^2(1-P)^3$　　D. $P^2(1-P)^3$

6. 每次试验成功率为 P, $(0<P<1)$,进行重复试验,直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率为(　　).

A. $C_{10}^4P^4(1-P)^6$　　B. $C_9^3P^4(1-P)^6$

C. $C_9^4P^4(1-P)^5$　　D. $C_9^3P^3(1-P)^6$

7. 若 $P(B|A)=1$,则下列命题中正确的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $B\subset A$　　C. $A-B=\varnothing$　　D. $P(A-B)=0$

8. 设一次试验中事件 A 发生的概率为 p,现重复进行 n 次独立试验,则事件 A 至少发生一次的概率为(　　).

A. $1-p^n$　　B. p^n

C. $1-(1-p)^n$　　D. $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

9. 随机事件 A 与 $\bar{B}$ 相互独立,则下面结论成立的是(　　).

A. $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$　　B. $(1-P(B))P(\bar{A})=P(\bar{B}\cap\bar{A})$

C. $P(\bar{A})P(B)\neq P(B)P(\bar{A})$　　C. $P(\overline{A\cup B})=(1-P(B))(1-P(\bar{A}))$