"211"大学数学创新课改教材

数学分析 上

◎马建国 编著

科学出版社

"211"大学数学创新课改教材

数学分析(上)

马建国　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书属于“211”大学数学创新课改教材丛书，分为上、下两册。上册共5章，内容包括极限与连续、导数、不定积分、定积分、级数；下册共4章，内容包括傅里叶级数、n维欧氏空间上的微分理论、多元函数的黎曼积分、曲线积分与曲面积分。

本书可作为高等学校数学专业教材，也可作为其他相关专业及科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析：上/马建国编著. 一北京：科学出版社，2011.5

“211”大学数学创新课改教材

ISBN 978-7-03-030906-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… Ⅲ.①数学分析－高等学校－教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第074327号

责任编辑：曾 莉／责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年6月第一次印刷 印张：18

印数：1—3 000 字数：350 000

定价：31.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学分析理论的萌芽可以追溯到阿基米德(前 287—前 212)为计算抛物线弓形的面积而使用的穷竭法,这是使用多边形面积逼近所要计算的面积的方法,直到现在这也是唯一可行的方法. 这种方法就是积分的前身. 17 世纪的牛顿(1642—1727)和莱布尼茨(1646—1716)各自使用了微积分的思想并发现微分与积分的关系,微积分自此诞生. 经过后人特别是以欧拉(1707—1783)和拉格朗日(1736—1813)为代表的 18 世纪数学家的大力推动,微积分得到了迅速的发展并在物理、天文等领域广泛使用. 19 世纪的数学家柯西(1789—1857)、黎曼(1826—1866)、魏尔斯特拉斯(1815—1897)等人对微积分的主要贡献是把数学的严密性注入到微积分理论,构建成以极限和实数理论为基石的微积分大厦. 这就是现在称为数学分析的这门学问的来历.

数学的理论往往不是根据逻辑的次序有条不紊地发展的. 这中间的紊乱是在黑暗中艰难摸索的有力证据. 然而讲述一套成熟的理论要从基础讲起,对于数学分析通常是从实数理论开始. 根据以往的经验,初次学习数学分析的学生渴望尽快学到比较生动的、有应用价值的内容,而对戴德金(1831—1916)和康托尔(1845—1918)的实数理论显然没有做好接受的准备. 因此我们没有一开始就系统介绍实数体系,仅从数轴的直观性质出发导出确界定理、柯西收敛准则等刻画实数空间本质的定理. 在第 1 章结尾,我们简单介绍戴德金和康托尔关于实数构造的理论.

数学思想的表达方式是数学的一个极其重要的组成部分. 笛卡儿(1596—1650)的坐标系使代数与几何有机地结合在一起,从而促进了数学的发展. 自从牛顿和莱布尼茨发明了微积分以后,微积分理论在欧洲大陆蓬勃发展,而英国相对滞后. 有评论说这是因为欧洲数学家得益于莱布尼茨使用的符号系统. 在高斯的曲面理论之后将近一个世纪,曲面的高维类似物——流形才在张量分析这套符号语言的推动下形成理论.

有鉴于以上种种,本书对数学符号的使用非常慎重. 在保留通用符号的前提下,我们尝试对函数的各种极限,如单侧极限、自变量趋于正负无穷时函数的极限、函数值趋于正负无穷的情况等给出统一的定义和记法,并在定理的叙述和证明中不增加篇幅地涵盖多种情况. 多元函数及向量值函数的表示和定义、定理尽量使用一元函数的表达形式,以使读者知道哪些是一元函数理论的简单直白的推广,哪

些是有本质的区别.

为数学分析的应用考虑，绝大多数定理给出尽可能一般的形式并有严密的证明，如洛必达法则、泰勒公式（单变量和多变量）、逆映射定理与隐函数定理、n 元函数积分变量代换公式、格林定理等. 本书也包含数学分析教材不常有的若干内容，如函数的上、下极限及上半连续与下半连续，处处不可微的连续函数，等周不等式，莫尔斯引理，多元函数黎曼可积的勒贝格充要条件等.

本书分上、下两册，共 9 章，可按三个学期讲授，每个学期学习 3 章. 虽然篇幅不大，但内容完整充实. 学生只需要中学数学和少量线性代数作为预备知识. 每节后附有难易程度不等的习题，较难的题目一般有提示或详细的解答.

加星号的是选学内容，不学不影响本书其他内容的学习.

本书创新点较多，疏漏和不足之处在所难免，恳请读者和同仁指正，以便再版时予以修订。

马建国
2011 年 3 月

目　录

第 1 章　极限与连续 …… 1

1.1　实数与实数列的极限 …… 1

1.1.1　实数 …… 1

1.1.2　实数列的极限 …… 3

1.2　数列极限的性质与运算 …… 6

1.3　单调有界数列 …… 12

1.3.1　数 e 的定义 …… 12

1.3.2　指数函数 …… 15

1.4　函数极限的定义 …… 19

1.5　函数极限的性质及运算 …… 26

1.6　连续函数 …… 29

1.6.1　介值定理 …… 29

1.6.2　对数函数及反三角函数 …… 32

1.6.3　不连续点的分类 …… 34

1.7　常用的函数极限 …… 37

1.7.1　两个重要极限 …… 37

1.7.2　复合函数的极限 …… 41

1.8　有界闭区间上的连续函数 …… 43

1.8.1　最大最小值定理 …… 43

1.8.2　一致连续与康托尔(Cantor)定理 …… 45

1.9　上极限与下极限 …… 52

1.9.1　数列的上、下极限 …… 52

1.9.2　子列极限与博尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理 …… 54

1.9.3　函数的上、下极限* …… 55

1.10　实数的构造* …… 60

第 2 章　导数 …… 65

2.1　导数与微分 …… 65

2.1.1　导数定义 …… 65

2.1.2　微分 …… 68

2.2 复合函数及反函数的导数 …… 71
2.2.1 复合函数求导 …… 71
2.2.2 反函数求导 …… 73
2.2.3 隐函数求导 …… 74
2.2.4 曲线的参数表示法 …… 75
2.3 高阶导数 …… 78
2.3.1 高阶导数的定义 …… 78
2.3.2 曲线的曲率 …… 81
2.4 微分中值定理 …… 84
2.4.1 罗尔(Rolle)定理 …… 84
2.4.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理 …… 85
2.4.3 确定函数的单调性区间 …… 88
2.5 洛必达法则 …… 94
2.6 泰勒公式 …… 100
2.7 函数的极值 …… 110
2.8 凸函数 …… 114
2.8.1 上凸与下凸 …… 114
2.8.2 詹森(Jensen)不等式 …… 116
2.9 渐近线与作图 …… 122
2.9.1 三种渐近线 …… 122
2.9.2 作图 …… 123

第3章 不定积分 …… 126
3.1 不定积分的概念 …… 126
3.1.1 原函数 …… 126
3.1.2 不定积分的定义 …… 128
3.2 凑微分法 …… 130
3.3 换元法 …… 133
3.4 分部积分法 …… 136
3.5 有理函数积分法 …… 138
3.6 能化为有理函数积分的几种情况 …… 143

第4章 定积分 …… 147
4.1 黎曼积分 …… 147
4.2 函数黎曼可积的条件 …… 149

4.3 定积分的性质 …… 158
4.4 定积分的计算 …… 169
4.4.1 微积分基本定理 …… 169
4.4.2 变量代换公式及分部积分公式 …… 173
4.5 平面图形的面积 …… 180
4.5.1 直角坐标系 …… 180
4.5.2 参数方程 …… 181
4.5.3 极坐标 …… 183
4.6 平面曲线的弧长 …… 185
4.7 旋转体的体积 …… 190
4.8 旋转面的面积 …… 192
4.9 平面曲线的质量与质心 …… 194

第 5 章 级数 …… 197
5.1 数项级数的定义及性质 …… 197
5.2 正项级数收敛判别法 …… 199
5.3 任意项级数收敛判别法 …… 205
5.4 绝对收敛级数的柯西乘积 …… 211
5.5 函数列 …… 214
5.5.1 逐点收敛与一致收敛 …… 214
5.5.2 函数列逐项求积与求导 …… 217
5.6 迪尼定理 …… 222
5.7 函数项级数 …… 227
5.7.1 一致收敛的判别法 …… 227
5.7.2 函数项级数逐项求积与逐项求导 …… 230
5.7.3 一个处处不可微的连续函数 …… 233
5.8 幂级数 …… 237
5.9 函数的幂级数展开 …… 243
5.10 广义积分 …… 251
5.10.1 无穷限的广义积分 …… 251
5.10.2 无界函数的广义积分 …… 256
5.10.3 函数空间 L_R^p …… 260
5.11 魏尔斯特拉斯逼近定理 …… 264

索引 …… 275

第1章 极限与连续

1.1 实数与实数列的极限

1.1.1 实数

人类对数的认识是从整数到有理数，再到实数. 当人们感觉到现有的数不够用的时候，就会想办法引进新的数. 例如，从几何的观点来看，任何一段线段都应该有长度，而且长度应该是一个数. 当人们发现单位正方形的对角线的长度不是任何有理数的时候，就引进了无理数. 因此一段线段的长度要么是有理数，要么是无理数. 另外，出于代数运算的考虑，我们也引进负数. 有理数与无理数统称为实数. 全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$.

数之所以称为数，是由于它们可以进行加、减、乘、除四则运算. 那么实数之间是如何进行运算的呢?加减法无须多说. 借助于几何公理，利用相似三角形对应边成比例这样的定理就可以求出两实数的乘积与商，以及验证运算法则. 例如，欲求两个正数 a,b 的乘积，可考虑两条垂直相交的直线. 记交点为 O. 在水平直线上截 OA 使长度为 a；在竖直线上截 OB 长度为 b，另截 OC 长度为 1. 自 B 引直线平行于 AC，交水平直线于 D，则 OD 的长度即为 a 与 b 的乘积. 从以上关于实数运算的推理我们发现，可以用直线上的点表示实数. 如图 1.1.1 所示，取水平直线上一点表示 0，0 右边与 0 距离为 1 的点表示数 1. 对于正数 a，0 右边与 0 距离为 a 的点表示数 a，0 左边与 0 距离为 a 的点表示数 $-a$，等等. 这样标记上实数的直线称为数轴. 数轴上的点因此可以称为数. 进一步，人们在平面上引入直角坐标系，用两个实数表示平面上的点.

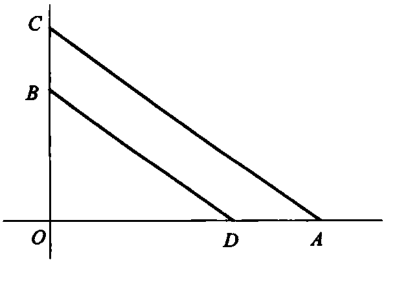

图 1.1.1 a 与 b 的乘积

引进数轴，使我们认识到，实数集作为一个整体，具有某种连续性. 那么，这一连续性的实质又是什么呢?如何刻画和利用这一性质呢?经过

深入地分析，人们发现：如果把水平直线上的所有点分拆成两个非空子集，使得第一个子集中的任何一点位于第二个子集的左边，则或者第一个集合包含右端点，或者第二个集合包含左端点，两者必居其一. 这是实数集区别于整数集和有理数集的地方. 由于数学分析的理论很大程度上建立在这条性质（或者与这条性质等价的性质）上，而且这条性质无法从实数的其他性质（四则运算以及有序性）推出. 我们因此给出下述实数完备性公理.

公理 1.1.1 将实数集 $\mathbf{R}$ 分拆成 A,B 两个非空子集，使得对任意的 $x \in A$ 以及 $y \in B$ 均有 $x < y$，则或者 A 中存在最大数，或者 B 中存在最小数，两者必居其一.

关于实数的运算，希望读者知道实数的 n 次幂 a^n 以及 n 次方根 $\sqrt[n]{a}\,(a>0)$ 的定义及性质. 此外知道下述二项式公式和 n 方差公式

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n, \tag{1.1.1}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b^1 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \tag{1.1.2}$$

关于函数，只把多项式函数和三角函数作为预备知识.

我们把经常使用的三角公式列出如下：

和角公式
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

倍角公式
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

积化和差
$$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y),$$
$$2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y),$$
$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$
$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y);$$

半角公式
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

和差化积
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2};$$

万能公式

设 $t=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

关于实数集,有下述区间的定义:$(a,b)=\{x:a<x<b\}$(有界开区间);$(a,+\infty)=\{x:a<x<+\infty\}$,$(-\infty,a)=\{x:-\infty<x<a\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}$(无界开区间);$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$(有界闭区间);$[a,+\infty)=\{x:a\leqslant x<+\infty\}$,$(-\infty,a]=\{x:-\infty<x\leqslant a\}$(无界闭区间);$(a,b]=\{x:a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x:a\leqslant x<b\}$(半开半闭区间).

开区间与闭区间的区别就在于是否包含端点.

1.1.2　实数列的极限

数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 可以看成是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上,取值于 $\mathbf{R}$ 的函数 $n\longmapsto x_n$,其函数值按顺序排成一列.

x_n 称为数列的通项,n 是下标. 数列也简记为$\{x_n\}$. 知道通项公式就知道了数列的每一项. 以下是几个数列的例子:

(1) $x_n=1\ (n=1,2,3,\cdots)$;

(2) $x_n=(-1)^{n+1}n\ (n=1,2,3,\cdots)$;

(3) $x_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2n}\ (n=1,2,3,\cdots)$;

(4) $3,3.1,3.14,3.141,3.1415,\cdots$;

(5) $x_n=1+\dfrac{1}{10^n}\ (n=1,2,3,\cdots)$;

(6) $x_n=(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ (n=1,2,3,\cdots)$.

数列(1)、(3)、(4)、(5) 有一个共性:只要下标 n 足够大,x_n 会任意接近某一固定的数. 数列(2)、(6) 不具有这一性质.

"接近"一词可以由邻域这一数学术语精确地描述.

邻域 对于正数 ε，称区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 为点 a 的 ε 邻域.

显然，a 的 ε 邻域内的点比邻域外的点更接近 a.

"当 n 足够大时，x_n 任意接近 a"可以用数学语言精确描述为：任意给 a 一个邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，必可找到一个自然数 N，当 $n>N$ 时，就有 $x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

例如，可以证明当 n 足够大时，$x_n=[1+(-1)^{n+1}]/(2n)$ 任意接近 0. 实际上，任意给 0 一个邻域 $(-\varepsilon,\varepsilon)$. 由于 $0\leqslant x_n\leqslant 1/n$，所以要想使 $x_n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，只要 $n>1/\varepsilon$ 即可. 记 $[1/\varepsilon]$ 为 $1/\varepsilon$ 的整数部分（不大于 $1/\varepsilon$ 的最大整数）. 令 $N=[1/\varepsilon]$，则当 $n>N$ 时，就有 $n>1/\varepsilon$，从而 $x_n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

注意到 $x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 等价于 $|x_n-a|<\varepsilon$，我们得到以下定义：

定义 1.1.1 如果对任一个 $\varepsilon>0$，都存在一个自然数 N，使得当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$，那么称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 称 a 为此数列的极限. 极限不存在的数列称为发散数列.

为了简便，极限也记为 $\lim x_n=a$ 或 $x_n\to a$（读作 x_n 趋于 a）. $\lim x_n=a$ 的一个等价的说法是，对任一个 $\varepsilon>0$，除了有限项外，其余的 x_n 均属于 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

例 1.1.1 关于前面六个数列的极限，凭直觉容易看出：$\lim 1=1$；$\lim(-1)^{n+1}n$ 不存在；$\lim[1+(-1)^{n+1}]/(2n)=0$；$3,3.1,3.14,3.141,3.1415,\cdots$ 的极限为 π；$\lim\left(1+\dfrac{1}{10^n}\right)=1$；$\lim(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 不存在.

以后，在讨论极限的时候，为了方便，经常使用符号"$\forall$"表示"对任一个"，用符号"$\exists$"表示"存在".

例 1.1.2 设 $a>1$，证明 $\lim\sqrt[n]{a}=1$.

证 首先我们估计 $\sqrt[n]{a}-1$. 根据 n 方差公式(1.1.2)，有

$$a-1=(\sqrt[n]{a}-1)[(\sqrt[n]{a})^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{a}+1],$$

注意到 $\sqrt[n]{a}-1>0$，有 $a-1>(\sqrt[n]{a}-1)n$，即

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$，令 $(a-1)/n<\varepsilon$，解出 $n>(a-1)/\varepsilon$. 记 $N=[(a-1)/\varepsilon]$，则当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$. 此即 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. □

作为练习，证明 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.1.3 设 $q\in\mathbf{R}$ 满足 $|q|<1$，证明 $\lim q^n=0$.

证 若 $q=0$，结论显然成立. 因此设 $0<|q|<1$，这时存在 $a>0$ 使 $|q|<$

$1/(1+a)$，从而有 $|q|^n < 1/(1+a)^n$. 根据二项式公式(1.1.1)，有$(1+a)^n > 1+na$，因此 $|q|^n < 1/(1+na)$. 由此可知，$\forall \varepsilon > 0$，当 n 足够大时，有 $|q^n - 0| < \varepsilon$.

□

习 题 1.1

1. 证明 $\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim|x_n - a| = 0$.

2. 设 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$，证明 $\lim x_n = 1$.

3. 证明 $x_n = \dfrac{n}{2^n}$ 的极限为 0.

4. 把数列 $x_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的前若干项标记在数轴上. 关于此数列的收敛性，你能得出什么结论?

5. (1) 给定数列的通项 x_n，如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$，证明 $\lim x_n$ 不存在；

(2) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = c$，证明 $\lim x_n = c$.

6. 证明 $x_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$的极限不存在.

7. 设两个数列满足 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$，这里 a 是一固定数. 如果 $y_n - x_n \to 0$，证明这两个数列都收敛于 a.

8. 下列哪些说法可以作为“数列 x_n 以 l 为极限”的定义?如果不可以，请找出反例.

(1) $\forall \varepsilon \in (0,1)$，存在实数 A，当 $n > A$ 时 $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$；

(2) $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时 $|x_n - l| < k\sqrt{\varepsilon}$，其中 k 是大于零的常数；

(3) 存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$\forall \varepsilon > 0$ 有 $|x_n - l| < \varepsilon$；

(4) 对任何正整数 N，存在 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$；

(5) 对任何正整数 m，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - l| \leqslant 1/2^m$；

(6) $\forall \varepsilon > 0$，集合$\{n: |x_n - l| \geqslant \varepsilon\}$ 为有限集；

(7) $\forall \varepsilon > 0$，集合$\{n: x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\}$ 为无限集.

9. 以下哪些说法等价于“数列$\{x_n\}$ 不收敛于 l”?

(1) $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N$，可找到 $n > N$ 使 $|x_n - l| > \varepsilon_0$；

(2) $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使$\{n: |x_n - l| \geqslant \varepsilon_0\}$ 为无限集；

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使$\{n: x_n \in (l-\varepsilon_0, l+\varepsilon_0)\}$ 为有限集.

习题答案与提示

3. 提示：$2^n=(1+1)^n>C_n^2$.　4. 收敛.

5. (1) 提示：若 $\lim x_n$ 存在，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim x_n$.

8. (1) 可以；(2) 可以；(3) 不可以；(4) 不可以；(5) 可以；(6) 可以；(7) 不可以.

9. (1),(2).

1.2 数列极限的性质与运算

首先讨论极限的常用性质，然后介绍极限的几个运算法则.

定义 1.2.1 数列 $\{x_n\}$ 称为有上界，如果 $\exists M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n$，均有 $x_n\leqslant M$（称 M 为 x_n 的一个上界）；数列 $\{x_n\}$ 称为有下界，如果 $\exists M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n$，均有 $x_n\geqslant M$（称 M 为 x_n 的一个下界）；数列 $\{x_n\}$ 称为有界数列，如果 $\exists M>0$，使得 $\forall n$，均有 $|x_n|\leqslant M$（称 M 为 x_n 的一个界）.

显然，数列 $\{x_n\}$ 有界当且仅当既有上界又有下界，或所有项都含在某个有界的区间中.

1.1.2 小节中的 6 个数列，只有数列(2) 是无界的.

定理 1.2.1 收敛数列必有界.

证 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么存在一个自然数 N，使当 $n>N$ 时，就有

$$x_n\in(a-1,a+1).$$

取一个正数 M 足够大，可使 $[-M,M]$ 包含区间 $(a-1,a+1)$ 以及点 $x_1,\cdots,x_N$，从而数列所有项都含有 $[-M,M]$ 中，即 $\forall n$ 有 $|x_n|\leqslant M$. □

定理 1.2.2 收敛数列的极限必唯一.

证 假如数列 $\{x_n\}$ 既收敛于 a，又收敛于 b，且 $a\neq b$.

分别取 a,b 的互不相交领域 $(a-\varepsilon_1,a+\varepsilon_1)$ 与 $(b-\varepsilon_2,b+\varepsilon_2)$. 那么当 n 足够大时，x_n 应该同时属于这两个互不相交邻域. 这不可能. □

定理 1.2.3 若 $\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，且 $a>b$. 则存在一个 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$.（反过来，若 $x_n\geqslant y_n(\forall n)$，且 $\lim x_n$，$\lim y_n$ 存在，则 $\lim x_n\geqslant\lim y_n$.）

证 分别取 a,b 的互不相交邻域 $(a-\varepsilon_1,a+\varepsilon_1)$ 与 $(b-\varepsilon_2,b+\varepsilon_2)$. 由于 $a>b$，所以第一个邻域中的数总大于第二个邻域中的数.

根据 $\lim x_n=a$，可知 $\exists N_1>0$，使得当 $n>N_1$ 时，$x_n\in(a-\varepsilon_1,a+\varepsilon_1)$. 同理，$\exists N_2>0$，使得当 $n>N_2$ 时，$y_n\in(b-\varepsilon_2,b+\varepsilon_2)$.

记 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，$x_n\in(a-\varepsilon_1,a+\varepsilon_1)$ 与 $y_n\in(b-\varepsilon_2,b+\varepsilon_2)$ 同时成立，从而有 $x_n>y_n$. □

思考题　如果 $\forall n$，有 $x_n<y_n$，且 $\lim x_n$ 及 $\lim y_n$ 都存在. 问是否一定有 $\lim x_n<\lim y_n$？请举例说明.

下面的定理在计算极限方面表现十分出色，称之为夹逼定理.

定理 1.2.4　设三个数列满足 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，而且 $\lim x_n=\lim y_n=a$，则 $\lim z_n=a$.

证　由于 $\lim x_n=\lim y_n=a$，因此，$\forall\varepsilon>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$；存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$y_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，x_n,y_n 同时属于$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 又因为 z_n 介于 x_n 与 y_n 之间，故也有 $z_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. □

例 1.2.1　记$\left[\frac{n}{2}\right]$为$\frac{n}{2}$的整数部分，求 $\lim\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$.

解　由$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}$，得到

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{1}{2}.$$

根据夹逼定理可得 $\lim\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{1}{2}$.

例 1.2.2　设 $2\leqslant x_n\leqslant 100(n=1,2,\cdots)$，计算 $\lim\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}$.

解　根据题设，可知 $x_1,\cdots,x_n$ 的平均值不小于 2，且不大于 100，因此有

$$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\sqrt[n]{100}.$$

利用例 1.1.2 以及夹逼定理，得到

$$\lim\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}=1.$$

定义 1.2.2　对于数列$\{x_n\}$，

(1) 若$\lim x_n=0$，则称 x_n 为无穷小量.

(2) 若 $\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，使得当 $n>N$ 时，就有 $|x_n|>M$，则称 x_n 为无穷大量，记为 $\lim x_n=\infty$. 特别是，用 $\lim x_n=+\infty$ 表示，$\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，使得当 $n>N$ 时，就有 $x_n>M$；用 $\lim x_n=-\infty$ 表示，$\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，使得当 $n>N$ 时，就有 $x_n<-M$.

值得强调的是，$\lim x_n = \infty$ 并不表示数列$\{x_n\}$极限存在或者收敛，而是数列发散的一种.

例 1.2.3 n 以及$(-1)^{n+1}n$ 为无穷大量，然而 $x_n = [1+(-1)^{n+1}]n$ 不是无穷大量. 这表明两个无穷大量之和未必是无穷大量.

例 1.2.4 设 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 证明$\lim x_n = +\infty$.

证 如果 $m = 2^{k+1}-1$，则

$$\begin{aligned} x_m &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right) \\ &> 1+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^k}{2^{k+1}} = 1+\frac{k}{2}. \end{aligned}$$

$\forall M>0$，取 k_0 使 $1+\frac{k_0}{2}>M$. 记 $N = 2^{k_0+1}-1$，则上面不等式表明 $x_N > 1+\frac{k_0}{2}>M$，从而当 $n>N$ 时，$x_n > x_N > M$.

定理 1.2.5 极限运算有下列法则：

(1) 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，则$\{x_n \pm y_n\}$也收敛，且

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n.$$

特例：$\lim(c \pm y_n) = c \pm \lim y_n$.

(2) 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，则$\{x_n y_n\}$也收敛，且

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n.$$

特例：$\lim(cy_n) = c\lim y_n$.

(3) 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，$\lim y_n \neq 0$，则$\{x_n/y_n\}$也收敛，且

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

(4) 若 x_n 为无穷小量(或无穷大量)，则 x_n^{-1} 为无穷大量(或无穷小量).

(5) 若 x_n 有界，y_n 为无穷小量，则 $x_n y_n$ 也为无穷小量.

证 (1) 设 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，证明 $\lim(x_n+y_n) = a+b$.

注意到

$$\begin{aligned}|(x_n+y_n)-(a+b)| &= |(x_n-a)+(y_n-b)| \\ &\leqslant |x_n-a|+|y_n-b|,\end{aligned}$$

那么 $\forall \varepsilon>0$,要想 $|(x_n+y_n)-(a+b)|<\varepsilon$,只要 $|x_n-a|<\varepsilon/2$ 和 $|y_n-b|<\varepsilon/2$ 同时成立就可以了.

由于 $\lim x_n=a$,故存在 N_1,使得当 $n>N_1$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon/2$,类似存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,有 $|y_n-b|<\varepsilon/2$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

类似可证 $\lim(x_n-y_n)=\lim x_n-\lim y_n$.

(2) 因为收敛的数列是有界的,所以存在 $M>0$,使 $|y_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 注意到

$$\begin{aligned}|x_ny_n-ab| &= |(x_ny_n-ay_n)+(ay_n-ab)| \\ &\leqslant |y_n||x_n-a|+|a||y_n-b|,\end{aligned}$$

因此 $$|x_ny_n-ab|\leqslant M|x_n-a|+|a||y_n-b|.$$

如同我们在证明(1)中所做的那样,$\forall\varepsilon>0$,可以找到 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$ 同时 $|y_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2|a|}$. 这时 $|x_ny_n-ab|<\varepsilon$.

(3) 记 $\lim y_n=b\neq 0$,以及 $\lim x_n=a$. 可以先证明 $\lim\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{b}$,再根据(2),得到

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\lim\left(x_n\cdot\frac{1}{y_n}\right)=a\cdot\frac{1}{b}.$$

欲证 $\lim\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{b}$,考虑

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|y_n-b|}{|by_n|}.$$

因 $\lim by_n=b\lim y_n=b^2>0$,故可取到 ε_0 满足 $0<\varepsilon_0<b^2$(如 $\varepsilon_0=b^2/2$). 另外根据 $by_n\to b^2$,可知存在一个 N_1,使得当 $n>N_1$ 时,有

$$by_n\in(b^2-\varepsilon_0,b^2+\varepsilon_0),$$