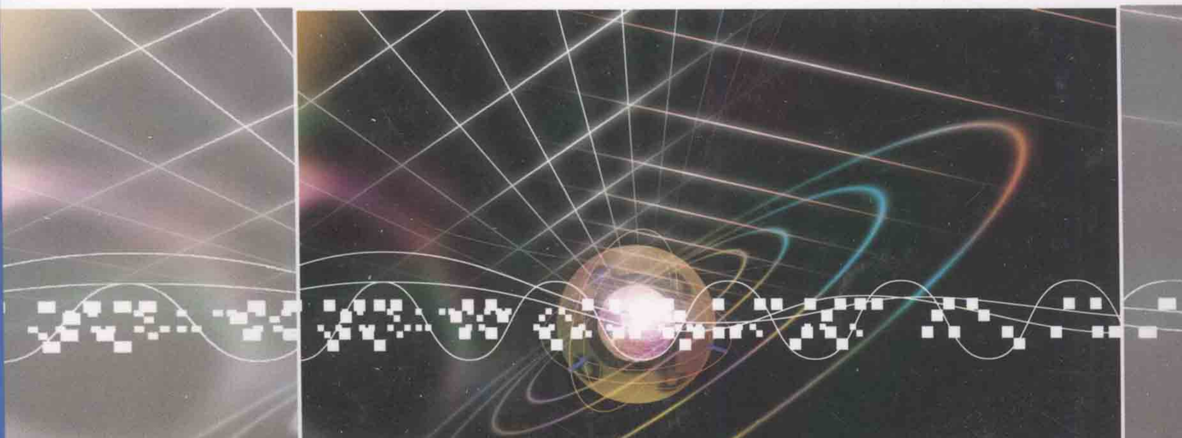
教材

高等院校基础数学精品课程系列丛书　•主编　宋眉眉

线性代数与空间解析几何
分级指导与提高

马仲立　主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等院校基础数学精品课程系列丛书　　●主编　宋眉眉

线性代数与空间解析几何分级指导与提高

马仲立　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲编写而成，是多年教学改革与实践的经验总结．本书主要内容包括行列式、矩阵、n 维向量组、线性方程组、特征值与特征向量、空间解析几何、二次型、线性代数问题的 Matlab 求解等知识．每章内容循序渐进，既考虑到高等院校一般工科学生使用，又根据考研的实际情况，设置了知识结构图、基本要求、内容提要、典型题解析、自测题及自测题解答等环节，不仅适合于普通高等院校理工类、经管类本科各专业的学生使用，还可以作为教学参考用书或考研辅导用书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何分级指导与提高/马仲立主编．—天津：天津大学出版社，2011．2

ISBN 978－7－5618－3835－8

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①马…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料②空间几何：解析几何－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O151．2②O182．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 010880 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　　话　发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
网　　址　www. tjup. com
印　　刷　廊坊长虹印刷有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　9．75
字　　数　250 千
版　　次　2011 年 2 月第 1 版
印　　次　2011 年 2 月第 1 次
印　　数　1－3 000
定　　价　18．00 元

高等院校基础数学精品课程系列丛书
编写委员会

前　言

当前高等教育发展的重点主要是提高质量和优化结构，深化高等学校教学改革，全面提高教学质量，为全面落实教育部对质量工程的要求，加强基础教育，培养具有创新能力的高素质人才，我们悉心组织、设计、编写了这套“高等院校基础数学精品课程系列丛书”，包括《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》及《高等数学分级指导与提高》、《概率论与数理统计分级指导与提高》、《线性代数与空间解析几何分级指导与提高》等.

高等数学、线性代数及概率论与数理统计作为高等院校基础数学课程对培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力及后续专业课程的学习有着非常重要的作用. 本套丛书参照《工科类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲，按照加强基础、培养能力、重视应用的指导方针，力求体现编写者长期讲授高校数学基础课的成功教学经验及多年来在高校数学教学改革中的实践成果，每章内容包括知识结构图、基本要求、内容提要、典型解题析、自测题及自测题解答. 本书特点如下：

①精心组织设计内容，编写过程从基本方法入手，充分考虑到课程内容上的科学性和逻辑性，对传统教学内容在结构内容上进行适当调整，框架安排力求简洁；

②按照教学基本要求，突出重点与难点，注意各章节之间的内在联系及相关专业课的关系，为后续课程的学习打好基础；

③在叙述上力求层次清晰，深入浅出，通俗易懂，便于学生自学；

④本书注重加强基本能力的训练，注意学以致用，基本内容条理清晰，典型题解析详尽，内容设计循序渐进，题型选择丰富多样，大多数题后有注释，指出学生解题时易发生的错误以及解题的相关技巧，部分习题还给出了多种解法，以便开拓学生的解题思路.

丛书由宋眉眉、薛方津、刘玉波整体设计. 本书由马仲立主编. 主要内容包括：行列式、矩阵、n 维向量组、线性方程组、特征值与特征向量、空间解析几何、二次型及附录(线性代数问题的 Matlab 求解). 具体分工是：第 1 章由马仲立编写，第 2、5 章及附录由李茂编写，第 3、4 章由侯卫华编写，第 6、7 章由姜文玲编写.

宋眉眉审核了全部书稿，薛方津、刘玉波、荀长义对书稿提出了许多修改意见并吸取了同行专家的许多宝贵经验和建议，在此一并致谢!

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编者

2010 年 6 月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 知识结构图

- 行列式
  - 基本概念
    - 全排列
    - 逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$
    - 奇偶排列
    - n 阶行列式 $\begin{cases} D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ D=\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \end{cases}$
  - 性质
    - 余子式 M_{ij}
    - 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
    - 代数余子式的性质 $\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases} \\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases} \end{cases}$
    - 行列式的性质
  - 计算
    - 用定义计算 $D=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}$
    - 利用性质计算
    - 用展开法计算 $\begin{cases} D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,3,\cdots,n) \\ D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,3,\cdots,n) \end{cases}$
  - 克拉默法则 $x_i=\dfrac{D_i}{D},i=1,2,\cdots,n$

1.2 基本要求

①了解排列及逆序数的概念,会计算排列的逆序数.

②理解行列式的定义,并能用定义计算一些特殊的行列式.

③掌握行列式的性质;能熟练地利用行列式的性质计算行列式;掌握计算行列式化三角行列式的方法及递推法.

④掌握行列式的按行(列)展开定理,能熟练地利用展开定理计算行列式.

⑤了解克拉默法则,会用克拉默法则解线性方程组.

1.3 内容提要

1.3.1 基本概念

1. 全排列及逆序数

①由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$,称为一个 n 级全排列.

②在一个排列中,如果较大的数字排在较小的数字的左边,则称这两个数构成一个逆序.

③一个 n 级排列的所有逆序之和,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

④若一个 n 级排列的逆序数为偶数(或奇数),则称此排列为偶排列(或奇排列).

⑤若交换排列中的任何两个数字,则改变排列的奇偶性.

2. 行列式的定义

①
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
$$= \sum_{q_1q_2\cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

式中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$, $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 均表示对所有 n 级排列求和.

行列式的展开项中共有 $n!$ 项,每项都是由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积构成,其符号取决于排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 或 $q_1q_2\cdots q_n$ 的奇偶性.

②特殊行列式:

上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.3.2 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式的值变号.

推论 若行列式有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行(列)都乘以数 k,等于用数 k 乘以该行列式.

推论 1 行列式某一行(列)所有公因子可以提到行列式符号外面.

推论 2 若行列式中一行(列)元素为零,则行列式的值为零.

推论 3 若行列式有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式中的某一行(列)是两组数之和,则这个行列式等于相应的两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5 将行列式中某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上,行列式的值不变.

1.3.3 行列式按行展开

①余子式和代数余子式:将 n 阶行列式中元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素划掉,剩余的元素按原位置顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij},并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$为 a_{ij}的代数余子式,记为 A_{ij}.

②k 阶子式:在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$中,任意选定 k 行、k 列($1\leqslant k\leqslant n$),位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按原来顺序构成一个 k 阶行列式,称为行列式 D 的一个 k 阶子式.

③行列式按一行(列)展开:n 阶行列式等于它的任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和.

n 阶行列式中某一行(列)的元素与另一行(列)相应元素的代数余子式乘积之和等于零.

设 n 阶行列式为 D,则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

④特殊行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

⑤范德蒙行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中记号“$\prod$”表示同类因子的乘积.

1.3.4 克拉默法则

①如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则这个方程组有唯一解,并表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其余各列均不变的行列式.

②如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则这个方程组只有零解.

1.4 典型题解析

例 1-1 求排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1$ 的逆序数,并判断奇偶性.

解 在排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1$ 中,将每一个数与它前面的数比较,确定能否构成逆序.

对第 1 个数 n,前面没有数,逆序数为 0;对第 2 个数 $n-1$,前面有一个数 n 与其构成逆序,逆序数为 1;对第 3 个数 $n-2$,前面有 2 个数 $n-1$、n 与其构成逆序,逆序数为 2;…,对第 n 个数 1,前面有 $n-1$ 个数 $2,3,\cdots,n$ 与其构成逆序,逆序数为 $n-1$,故排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

注 在求排列的逆序数时,可用排列中的每个数与它前面的数作比较,看是否构成逆序,确定出逆序数后将排列中所有数的逆序数相加,即可得到所求排列的逆序数.

例 1-2 (1)在 5 阶行列式中,确定项 $a_{23}a_{35}a_{41}a_{12}a_{54}$ 的符号.

(2)写出 4 阶行列式中带正号且包含因子 a_{32} 与 a_{13} 的项.

解 (1)因为 $a_{23}a_{35}a_{41}a_{12}a_{54}=a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$,此时列下标的排列为 23514,且 $\tau(23514)=4$,故此项 $a_{23}a_{35}a_{41}a_{12}a_{54}$ 为正号.

(2)由行列式的定义可知,包含因子 a_{32} 和 a_{13} 的项必为 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 及 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$,其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(3124)=2$,$\tau(3421)=5$,从而 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 应带正号,$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ 应带负号,于是所求项为 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$.

注 此类题一般将该项各因子的次序重新调整,使其行标为自然顺序,之后再求出列标排列的逆序数,即为所求. 也可将原排列的行标、列标的排序分别求逆序,其和的奇偶性与该项符号的奇偶性相同.

计算高阶行列式总体上有两条基本途径：一是利用行列式的性质将所求行列式化成上三角形、下三角形、范德蒙行列式等已知结果的行列式；二是利用行列式的性质结合展开定理，将行列式降阶计算. 展开时应尽量选择含 0 元素最多的某行（或列）展开.

计算中如何利用行列式的性质是关键. 常用的方法有提取公因子法、其余所有行（列）均加到一行（列）上、逐行（列）相减、升阶法、拆项法、递推法、归纳法等.

1. 定义法

例 1－3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义，$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

此行列式 D 的非零项中，第 1 行的非零元素只有 $a_{1,n-1}=1$，故 $p_1=n-1$. 同理 $p_2=n-2$，$p_3=n-3,\cdots,p_{n-1}=1,p_n=n$，这样的 $p_1p_2\cdots p_n$ 只有一个 n 元排列 $(n-1)(n-2)\cdots 1n$，故 D 只有一个非零项，即

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}&=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}1\cdot 2\cdots(n-1)n\\&=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.\end{aligned}$$

注 一般对含有 0 元素较多的行列式考虑用定义法计算，在行列式的一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，求出非零元素的列下标 $p_1p_2\cdots p_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

例 1－4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解法 1 由行列式定义：$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$第 1 行中非零元素只有 $a_{11}=x,a_{12}=y$，故 $p_1=1,2$，同理 $p_2=2,3,\cdots;p_{n-1}=n-1,n;p_n=1,n$.

下面求 $p_1p_2\cdots p_n$ 在上述取值下的所有排列.

当 $p_1=1$ 时，若 $p_2=3$，则 $p_3=4,\cdots,p_{n-1}=n,p_n=1$，此时不能组成 D 中一项.

故当 $p_1=1$ 时，$p_2=2$，从而 $p_3=3,\cdots,p_n=n$. 由此组成自然顺序排列 $123\cdots n$. 对应 D 中的一个非零项

$$(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}=x^n.$$

当 $p_1=2$ 时，$p_2=3,p_3=4,\cdots,p_{n-1}=n,p_n=1$. 它组成一个排列 $23\cdots(n-1)n\cdot 1$，对应 D 中另一个非零项

$$(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{13}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}y^n.$$

D 的非零项只有两项存在,故

$$D=x^{n}+(-1)^{(n-1)}y^{n}.$$

解法 2 此行列式利用展开法更易计算.

按第 1 列展开(下列行列式中,空白处元素均为 0)

$$D=x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ & & & & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & & \\ x & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^{n}+(-1)^{n-1}y^{n}.$$

2. 三角形法

利用性质将行列式化为上、下三角形行列式计算.

例 1 -5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

解 D_n 中各列之和均为 $a+n-1$,将各列均加到第 1 列,提出公因子 $a+n-1$ 后,再用性质即可将行列式化为三角形行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{r_i-r_1}(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

注 此题为各行(列)之和均相等的情况,将各列(列)加到第 1 列(行),提出第 1 列(行)的公因子,再利用性质即可化为三角形行列式.

例 1-6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \text{其中 } x_i\neq a_i(i=1,2,\cdots,n).$$

解 由其他各行减去第 1 行,再分别从第 1 列至第 n 列提出公因子 (x_1-a_1)、(x_2-a_2)、…、(x_n-a_n).

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j).$$

注 利用性质构造各列公因子,提出公因子时,虽然第 1 行出现分式,但再将 a_{11} 以下元素化为 0 后即为三角行列式了.

3. 降阶法(按行、列展开法)

降阶法是在行列式某行(列)中含有较多 0 元素时,按此行(列)将行列式展开,n 阶行列式即可降为 $n-1$ 阶行列式. 以此类推,$n-1$ 阶再降为 $n-2$ 阶,直至降至 2 阶行列式算出结果. 一般情况下,所求行列式某行(列)中不一定含有较多 0 元素,可用性质将行列式转化成满足展开降阶的条件. 降一次后,一般即可化为三角形行列式或其他易得结果的行列式.

例 1-7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

解 按第 n 行展开

$$D_n = a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} +$$

$$a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} +$$

$$a_{n-2}(-1)^{n+3}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$a_2(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$a_1(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + x^n.$$

注 此行列式并未按有较多元素为 0 的行展开,最后一行虽元素全不为 0,但按其展开后的 n 个 $n-1$ 阶行列式均为上(下)三角形式,更易求出结果.

例 1-8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解 从第 2 行起,每行的 (-1) 倍均加到上一行上去.

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_{n-1}-r_n}]{\substack{r_1-r_2 \\ r_2-r_3}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ c_3-c_2 \\ c_2-c_1}]{\substack{c_n-c_{n-1} \\ c_{n-1}-c_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \end{vmatrix} = (1-x)^n + (-1)^{n-1}x^n.$$

注 行列式相邻两行的对应元素之差或为 0 或为 1,只有一个元素为 $1-x$,因此用逐行相减可化出许多 0、1 元素,再用展开法降阶,即可得所求结果.

4. 升阶法(加边法)

在原行列式的基础上再添加一行和一列,使原来 n 阶行列式变为 $n+1$ 阶行列式,这种计算行列式的方法称为升阶法(或加边法). 这里要求加边后的行列式与原行列式的值相等. 升阶法的一般格式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

例 1-9 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{r_4+r_1\\ r_5+r_1}]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ 1 & x_1-a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_2-a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3-a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_4-a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-x_1)(a_2-x_2)(a_3-x_3)(a_4-x_4)\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-a_1}{a_1-x_1} & \dfrac{-a_2}{a_2-x_2} & \dfrac{-a_3}{a_3-x_3} & \dfrac{-a_4}{a_4-x_4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_1+c_4\\ c_1+c_5}]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3}}\prod_{i=1}^{4}(a_i-x_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{4}\dfrac{-a_j}{a_j-x_j} & \dfrac{-a_1}{a_1-x_1} & \dfrac{-a_2}{a_2-x_2} & \dfrac{-a_3}{a_3-x_3} & \dfrac{-a_4}{a_4-x_4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{4}(a_i-x_i)\left[1+\sum_{j=1}^{4}\frac{a_j}{x_j-a_j}\right].$$

注 本例题的结果可推广到 n 阶行列式.

本例题还可以分别用第 2、3、4 行减去第 1 行,然后分别从第 1 列提出 a_1-x_1,第 2 列提出 x_2-a_2,第 3 列提出 x_3-a_3,第 4 列提出 x_4-a_4 来做.

一般地,行列式的阶数越高运算就越复杂. 但是恰当选择所增加的行、列元素,可使高一阶的行列式更便于化简、计算.

例 1-10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

解 利用加边法