BOOK 天下图书

万试无忧 WAN SHI WU YOU

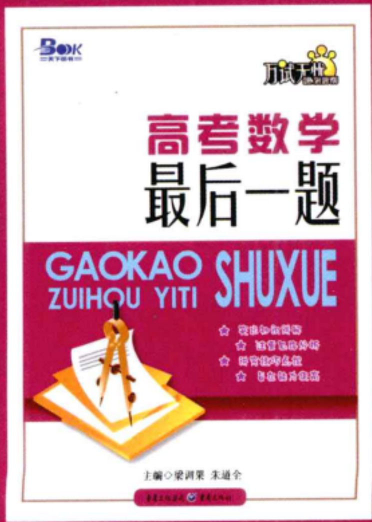
高考数学最后一题

GAOKAO SHUXUE ZUIHOU YITI

★ 突出知识讲解
★ 注重思路分析
★ 讲究技巧点拨
★ 旨在能力提高

主编◇梁训果 朱道全

重庆出版集团 重庆出版社



《高考化学最后一题》 《高考数学最后一题》 《高考物理最后一题》

责任编辑：贾良军
封面设计：钟丹珂

ISBN 978-7-5366-8521-5

定价：20.00元

万试无忧 WAN SHI WU YOU

高考数学最后一题

主　　编：梁训果　朱道全

编　　委：（按音序排序）

陈昌杰　胡　智　梁训课　朱道全

重庆出版集团　重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学最后一题/梁训果,朱道全主编. —重庆:重庆出版社,2007.2(2010.2 再版)

ISBN 978-7-5366-8521-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①梁… ②朱… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024451 号

高考数学最后一题

GAOKAO SHUXUE ZUIHOU YITI

主编:梁训果 朱道全

出 版 人:罗小卫
责任编辑:贾良军
封面设计:钟丹珂
版式设计:池胜祥

重庆出版集团
重庆出版社 **出版**

重庆长江二路 205 号 邮政编码:400016 http://www.cqph.com
重庆升光电力印务有限公司印刷
重庆市天下图书有限责任公司发行 http://www.21txbook.com
重庆市北部新区高新园财富大道 19 号财富三号 B 幢 1-8
邮政编码:401121 电话:023-63659760,63658927,63659920
全国新华书店经销

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:11.5 字数:245 千
版次:2010 年 2 月第 4 版 印次:2010 年 2 月第 4 次印刷
印数:38 421~41 420 册
书号:ISBN 978-7-5366-8521-5
定价:20.00 元

前　言

高考最后一题通常用来考查考生综合分析能力，鉴别考生内在潜力，决定考生能否上高考重点线。如何做好高考最后一题已经成为每位考生关注的焦点，为了满足广大考生的需求，我们特邀数名特级教师及长期从事高三教学的精英执笔编写了此套书，共分为数学、物理、化学三个分册。

本书收集了数十道最近几年全国各地高考中最具代表性的最后一题，体例科学、难度得当、知识性强、分析透彻，具体栏目如下：

[原题再现]　展示高考原题，让考生熟悉题目内容。

[知识解析]　将考题所涉及的教材内容和知识要点进行梳理，对要点的内涵进行剖析，从知识的纵向和横向进行总结，根据题目内容，恰当地设置疑问，启发考生思考，帮助考生准确理解题意，正确找出题目中的隐含条件、临界条件等关键因素。

[真题全解]　规范书写格式，培养考生的书面表达能力，提高得分率。

[补充例题]　通过与高考原题知识结构相关的例题，拓展考生的视野，提升考生的综合、归纳、辨析等能力。

[模拟演练]　通过与高考原题神似的题目，供考生进行模拟演练，强化考生对所学知识的实际应用能力。

我们希望通过此书的出版，能够帮助广大考生取得优异的成绩，进入理想的大学！

编　者

2010 年 2 月

目录

第一部分　数列相关问题

第二部分　平面几何相关问题

第三部分　函数相关问题

模拟演练参考答案

第一部分　数列相关问题

1. 2006 · 福建高考

原题再现

数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅰ)求a_n；

(Ⅱ)若数列$\{b_n\}$满足$4^{b_1-1}\cdot 4^{b_2-1}\cdot 4^{b_3-1}\cdot\cdots\cdot 4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$，求证：$\{b_n\}$是等差数列；

(Ⅲ)求证：$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_4}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

知识解析

(1)(知识点1)函数$f(x)$满足$x_0=f(x_0)$的解x_0叫函数$f(x)$的一个不动点. **不动点是数列恒等变形的方法之一.**

例如“$y=2x+1$”，令$x=2x+1$，解得它的一个不动点$x_0=-1$.

又如“已知$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，求通项a_n”. 则可设$y=2x+1$，求得不动点$x_0=-1$，于是在$a_{n+1}=2a_n+1$的两端同减(-1)，得$a_{n+1}+1=2a_n+1+1\Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，作代换：令$x_{n+1}=a_{n+1}+1$，得$x_{n+1}=2x_n$，$x_1=2$，所以数列$\{x_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，故$x_n=x_1\cdot 2^{n-1}=2^n$，即$a_n=2^n-1$.

(2)(知识点2)**反向递推是数列恒等变形的方法之二.**

例如“已知$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，求通项a_n”，我们将a_n用它的前一项a_{n-1}表示，又将a_{n-1}用a_{n-2}表示，直至用a_1表示出a_n. 此即为反向递推.

即$a_n=2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)+1=2^2a_{n-2}+2^0+2^1=\cdots=2^{n-1}\cdot a_{n-(n-1)}+2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}=2^n-1$.(这是等比数列求前$n$项和，直接用公式即可求得)

(3)(知识点3)令$n=1,2,3,\cdots,n$，**n式相加是数列恒等变形的方法之三.**

例如“$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}-a_n=2^n$，求通项a_n”，则令n取$1,2,3,\cdots,n$，于是有

$a_2-a_1=2^1$，

$a_3-a_2=2^2$，

$\cdots$

$a_{n+1}-a_n=2^n$.

把这n式相加，于是错位相消，得$a_{n+1}-a_1=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$，所以，$a_{n+1}=2^{n+1}-1$，故有$a_n=2^n-1$.

(4)(知识点 4)通过**恒等变形使足标一致是数列恒等变形的方法之四.**

例如"$a_1=1,a_2=3,a_{n+1}-a_n=2^n$,求通项 a_n",则可在递推关系式的两端同除以 2^{n+1},使之与足标一致,即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$,作代换:令 $x_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$,得 $x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}$,$x_1=\frac{1}{2}$.

故 $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}$,按知识点(1)求得不动点 $x_0=1$,所以 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}-1$,作代换:令 $b_n=x_n-1$,得 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$,$b_1=x_1-1=\frac{a_1}{2^1}-1=-\frac{1}{2}$,则$\{b_n\}$为等比数列,故 $b_n=b_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $x_n-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 即 $x_n-1=\frac{a_n}{2^n}-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow a_n=2^n-1$.

这里用到了数列变形的方法之四:使足标一致.

(5)(分析第Ⅱ问)设$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,结合第(Ⅰ)问所得 $a_n=2^n-1$,则所给条件 $4^{b_1-1}\cdot4^{b_2-1}\cdot4^{b_3-1}\cdot\cdots\cdot4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ 可以转化为 $2S_n-2n=nb_n$. 为了证明$\{b_n\}$为等差数列,可先将 $2S_n-2n=nb_n$ 化为含 b_n 的式子,再变形为含 b_n 且常数项为 0 的式子:$b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=0$(*).

(6)(知识点 5)**分裂中项是数列变形的方法之五.**

例如(5)中的(*)式,对于相邻三项的递推关系,其常数项为 0,且两端的系数和相等时,可适当分裂中项为两项.

又如"$x_1=1,x_2=2$,且满足 $2x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$,求通项 x_n". 由于它的常数项为 0,是相邻三项的递推关系,且两端的系数和相等. 故将中项分裂为 $2x_{n+1}-x_{n+1}$,经过化简后可实现换元. 所以 $2(x_{n+2}-x_{n+1})=-(x_{n+1}-x_n)$,作代换得 $2A_{n+1}=-A_n$.

所以$\frac{A_{n+1}}{A_n}=-\frac{1}{2}$,$A_1=x_2-x_1=1$,所以数列$\{A_n\}$是等比数列.

故 $A_n=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

即 $x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,令 $n=1,2,3,\cdots,n$. 再将 n 式相加,

得 $x_{n+1}-x_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow x_n=1+\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$.

(7)(分析第Ⅲ问)求数列前 n 项和的一般思路是先将通项变形,然后求和.

在第(Ⅲ)问中设前 n 项和为 T_n,其通项 $c_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$,先将通项分离常数,变形为 $c_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{n+1}-1)}<\frac{1}{2}$,然后,令 n 取 $1,2,3,\cdots,n$. 再 n 式相加,即证得 $T_n<\frac{n}{2}$.

同理,欲证左端,$T_n>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$,仍然先分析通项 c_n. 记分母为 $y=2(2^{n+1}-1)$,则在 $n>1$ 时,y 递增,所以 c_n 在 $n>1$ 时递增,所以 $c_n\geqslant c_1=\frac{1}{3}$. 而求证式的左端还需继续变形,$c_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\cdot2^n-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot2^n+2^n-2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot2^n}$,然后令 n 取 $1,2,3,\cdots,n$,把 n 式相加,得 $T_n>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$,所以有 $T_n>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$.

故$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<T_n<\frac{n}{2}$,即$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$.

(8)(补讲知识)例如:

①已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n+1}$,求数列$\{a_n\}$的通项;

②数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=4-\frac{4}{a_n}$,求$\{a_n\}$的通项.

下面分析这两个问题:

①令n取$1,2,3,\cdots,n$,然后将n式相乘,

得$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n+1}$,错位相消得$a_{n+1}=\frac{n+2}{2}$.

所以$a_n=\frac{n+1}{2}$.

②求得不动点$x_0=2\Rightarrow a_{n+1}-2=4-\frac{4}{a_n}-2$.

两端同时颠倒可得$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n-2+2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{a_n-2}+\frac{1}{2}$,所以$\left\{\frac{1}{a_n-2}\right\}$是等差数列,

所以$\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{3-2}+(n-1)\frac{1}{2}\Rightarrow a_n=\frac{2n+4}{n+1}$.

在补讲知识中,n式相乘是数列恒等变形的方法之六.

两端同时颠倒,是数列恒等变形的方法之七.

真题全解

(Ⅰ)因为$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,由前面的分析,可以转化为求它的不动点.

易求得不动点为-1,

所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

所以$\{a_n+1\}$是以$a_1+1=2$为首项,2为公比的等比数列.

故$a_n+1=2^n$.

即$a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅱ)**(方法1)**

因$4^{b_1-1}\cdot4^{b_2-1}\cdot\cdots\cdot4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$.

即$4^{(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n}=2^{nb_n}$.

所以$2[(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n]=nb_n$,　①

$2[(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})-(n+1)]=(n+1)b_{n+1}$.　②

②$-$①,得$2(b_{n+1}-1)=(n+1)b_{n+1}-nb_n$,

即$(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0$,　③

$nb_{n+2}-(n+1)b_{n+1}+2=0$.　④

④$-$③,得$nb_{n+2}-2nb_{n+1}+nb_n=0$,

即$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$,

所以$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n(n\in\mathbf{N}^*)$,

故$\{b_n\}$是等差数列.

(方法 2) 由前面的证明有：

$(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0$.

令 $n=1$，得 $b_1=2$.

设 $b_2=2+d(d\in\mathbf{R})$，下面用数学归纳法证明 $b_n=2+(n-1)d$.

(1)当 $n=1,2$ 时，等式成立.

(2)假设当 $n=k(k>2)$时，$b_k=2+(k-1)d$ 成立，那么，

$$b_{k+1}=\frac{k}{k-1}b_k-\frac{2}{k-1}=\frac{k}{k-1}[2+(k-1)d]-\frac{2}{k-1}$$
$$=2+kd=2+[(k+1)-1]d.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据(1)和(2)，可知 $b_n=2+(n-1)d$ 对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

因为 $b_{n+1}-b_n=d$，

所以$\{b_n\}$是等差数列.

(Ⅲ)因为$\dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{2^k-1}{2\left(2^k-\frac{1}{2}\right)}<\dfrac{1}{2}$，$k=1,2,\cdots,n$，

所以$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

又$\dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2^{k+1}-1)}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^k+2^k-2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots,n,$$

所以$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}.$$

所以$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

补充例题

数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$ 且 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0(n\geqslant1)$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)求$\left\{\dfrac{a_n}{a_n-\frac{1}{2}}\right\}$的前 n 项和 S_n.

分析：(1)题目给出的递推关系形如 $c\cdot a_{n+1}\cdot a_n+d\cdot a_{n+1}+e\cdot a_n+f=0$，我们可以变形为 $a_{n+1}=\dfrac{-e\cdot a_n-f}{c\cdot a_n+d}$，然后利用不动点的办法把它变成一个比较特殊的递推关系，就可以求出通项. 先求出 $a_{n+1}=\dfrac{-2a_n-5}{8a_n-16}$，再考虑函数 $y=\dfrac{-2x-5}{8x-16}$，令 $y=x$，求出不动点为 $x=\dfrac{1}{2}$或 $x=\dfrac{5}{4}$. 我们

随便取其中一个都可以，比如取 $x=\frac{1}{2}$，于是，原等式可变形为 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-2a_n-5}{8a_n-16}-\frac{1}{2}$，整理得 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-6\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{8a_n-16}$. 将等式两边同时颠倒，再分离变量，有 $\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{a_n-\frac{1}{2}}$，作代换：令 $b_n=\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$，得 $b_{n+1}=2b_n-\frac{4}{3}$，求出它的不动点 $x_0=\frac{4}{3}$，这时有 $b_{n+1}-\frac{4}{3}=2\left(b_n-\frac{4}{3}\right)$，这是一个等比数列，问题(Ⅰ)也就解决了.

(2)先对通项变形再求和.

由 $\frac{a_n}{a_n-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{4}{3}}}=\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\cdot 2^n$，

得 $S_n=\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\cdot 2^1+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\cdot 2^2+\cdots+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\cdot 2^n$.

这是一个特殊数列求和，直接利用公式即可.

解答：(Ⅰ)因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0(n\geqslant 1)$，所以有 $a_{n+1}=\frac{-2a_n-5}{8a_n-16}$.

考虑函数 $y=\frac{-2x-5}{8x-16}$，令 $y=x$，可以求得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{4}$.

所以在 $a_{n+1}=\frac{-2a_n-5}{8a_n-16}$ 的两边同时减去 $\frac{1}{2}$，则有

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-2a_n-5}{8a_n-16}-\frac{1}{2}\Rightarrow a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-6\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{8a_n-16}.$$

两边同时颠倒，有 $\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=\frac{8a_n-16}{-6\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}$，分离变量得 $\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{a_n-\frac{1}{2}}$，令 $b_n=\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$，则有 $b_{n+1}=2b_n-\frac{4}{3}$，在它的两端同时减去 $\frac{4}{3}$ $\left(\text{大家思考一下为什么要减去}\frac{4}{3}\right)$，得 $b_{n+1}-\frac{4}{3}=2\left(b_n-\frac{4}{3}\right)$.

显然 $\left\{b_n-\frac{4}{3}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

所以 $b_n-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1}\Rightarrow b_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{4}{3}$.

所以 $a_n=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2^n+4}+\frac{1}{2}\quad(n\geqslant 1)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得$\dfrac{a_n}{a_n-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\cdot 2^n+\dfrac{4}{3}}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\cdot 2^n+\dfrac{4}{3}}}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot 2^n$，

所以 $S_n=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot 2^1+\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot 2^2+\cdots+\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot 2^n$

$=\dfrac{5n}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot(2^1+2^2+\cdots+2^n)$

$=\dfrac{5n}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}$

$=\dfrac{1}{3}(2^n+5n-1)$.

2. 2006 · 全国高考Ⅱ

原题再现

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求 a_1,a_2；

（Ⅱ）求$\{a_n\}$的通项公式.

知识解析

(1)（知识点 1）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之和为“$-\dfrac{b}{a}$”，两根之积为“$\dfrac{c}{a}$”. 所以在本题中已知一根为 S_n-1，其包含两层意思：

其一，方程的另一根为 a_n+1-S_n 或$\dfrac{-a_n}{S_n-1}$，所以有 $a_n+1-S_n=\dfrac{-a_n}{S_n-1}$；

其二，S_n-1 适合方程，即有 $(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$，然后化简得 $S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

(2)（知识点 2）对于既含有 S_n 又含有 a_n 的情况，我们通常用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 来把它变成“同名”. 因此将 $S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$ 变形整理得 $S_n\cdot S_{n-1}-2S_n+1=0$，由前面讲过的知识，它可以用不动点的方法变形为特殊数列：

由 $x\cdot x-2x+1=0$ 得不动点为 $x_0=1$.

于是先把 $S_n\cdot S_{n-1}-2S_n+1=0$ 变形为 $S_n=\dfrac{-1}{S_{n-1}-2}$，然后两端同时减 1，

得 $S_n-1=-\dfrac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}-2}$，

两端同时颠倒得$\dfrac{1}{S_n-1}=\dfrac{1}{S_{n-1}-1}-1$，

显然$\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$为等差数列.

(3)(分析第Ⅱ问)由前面可以求出 S_n,然后由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 可求出 a_n.

(4)(知识点 3)对于求数列通项我们也可以先求出一些特殊项,然后再找出它的特点,猜想出它的公式,最后用数学归纳法加以证明.这也是求解数列问题的常用方法之一.

真题全解

(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$x^2-a_1x-a_1=0$ 有一根为 $S_1-1=a_1-1$,

于是$(a_1-1)^2-a_1(a_1-1)-a_1=0$,解得 $a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n=2$ 时,$x^2-a_2x-a_2=0$ 有一根为 $S_2-1=a_2-\frac{1}{2}$,

于是$\left(a_2-\frac{1}{2}\right)^2-a_2\left(a_2-\frac{1}{2}\right)-a_2=0$,解得 $a_2=\frac{1}{6}$.

(Ⅱ)**(方法 1)**　由题设可得$(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$,

即 $S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$,代入上式得

$S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$,　　①

由(Ⅰ)知 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$,$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

又由①式可得 $S_3=\frac{3}{4}$.

由此猜想 $S_n=\frac{n}{n+1}$,$n=1,2,3,\cdots$.

下面用数学归纳法证明这个结论.

(1)$n=1$ 时已知结论成立.

(2)假设 $n=k$ 时结论成立,即 $S_k=\frac{k}{k+1}$,

当 $n=k+1$ 时,由①式得 $S_{k+1}=\frac{1}{2-S_k}$,即 $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$,

故 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上,由(1)(2)可知 $S_n=\frac{n}{n+1}$对所有正整数 n 都成立.

于是当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$,

又 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$,

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$,$n=1,2,3,\cdots$.

(方法 2)　由已知条件可得:方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 的另外一根为 $x_2=a_n+1-S_n$ 或 $x_2=\frac{-a_n}{S_n-1}$.

所以 $a_n+1-S_n=\dfrac{-a_n}{S_n-1}$，整理得 $S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

因为当 $n>2$ 时有 $a_n=S_n-S_{n-1}$，

所以 $S_n^2-2S_n+1-(S_n-S_{n-1})S_n=0\Rightarrow S_n\cdot S_{n-1}-2S_n+1=0\Rightarrow S_n=\dfrac{-1}{S_{n-1}-2}$.

在等式两端同时减 1 得 $S_n-1=-\dfrac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}-2}$，

两端同时颠倒得 $\dfrac{1}{S_n-1}=\dfrac{1}{S_{n-1}-1}-1$，

显然 $\left\{\dfrac{1}{S_n-1}\right\}$ 是公差为 -1，首项为 -2 的等差数列.

所以有 $\dfrac{1}{S_n-1}=-2-n+1$，所以 $S_n=-\dfrac{1}{n+1}+1=\dfrac{n}{n+1}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

又 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1\times 2}$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$n=1,2,3\cdots$.

3. 2006 · 北京高考

原题再现

在数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_1，a_2 是正整数，且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，$n=3,4,5,\cdots$，则称 $\{|a_n|\}$ 为“绝对差数列”.

(Ⅰ)举出一个前 5 项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前 10 项)；

(Ⅱ)若“绝对差数列” $\{|a_n|\}$ 中，$a_{20}=3$，$a_{21}=0$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n=1,2,3,\cdots$，试判断当 $n\to\infty$ 时，a_n 与 b_n 的极限是否存在，如果存在，求出其极限值；

(Ⅲ)证明：任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

知识解析

(1)(知识点 1)读懂题意，正确理解所给定义. 首先我们理解差数列，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_{n+2}=c_{n+1}-c_n$，则称数列 $\{c_n\}$ 为一个差数列. 而绝对差数列是在它的基础上加上绝对值. 也即绝对差数列所有的项均非负.

(2)(分析第Ⅰ问)要找一个前 5 项不为 0 的绝对差数列，根据定义先要确定 a_1，a_2 的值，注意到前 5 项不为 0，所以尽量把 a_1 的值取小点，而把 a_2 的值取大点就可以了. 如取 $a_1=1$，$a_2=5$，则 $a_3=4$，$a_4=1$，$a_5=3$，$a_6=2$，$a_7=1$，$a_8=1$，$a_9=0$，$\cdots$.

(3)(知识点 2)熟悉极限的定义及运算.

(4)(分析第Ⅱ问)由 $a_{20}=3,a_{21}=0$ 得 $a_{22}=3,a_{23}=3,a_{24}=0,\cdots$ 发现从第 20 项后,数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列,而摆动数列的极限是不存在的.

(5)(分析第Ⅲ问)要证绝对差数列总有无穷多个 0 项,需证明两个方面:

①存在性.即绝对差数列中一定有 0 项.

这里用反证法进行证明,假设 $\{a_n\}$ 中没有 0 项,由 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$ 得,对于任意的 n 都有 $a_n\geqslant 1$,

所以 $a_n=\begin{cases}a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1,\\ a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1.\end{cases}$

所以 a_n 要么比 a_{n-1} 至少小 1,要么比 a_{n-2} 至少小 1.

令 $c_n=\begin{cases}a_{2n-1}(a_{2n-1}>a_{2n}),\\ a_{2n}(a_{2n-1}<a_{2n}),\end{cases}$ $n=1,2,3,\cdots$,则数列 $\{a\}$ 为一个递减数列.故存在某一项小于 0,矛盾.

②无穷性.即 0 项有无穷多个,从分析第Ⅰ问中就可以发现绝对差数列从某一项开始就变成了一个周期数列.因此只需证明在每一个周期里面含有 0 项就可以解决问题.

真题全解

(Ⅰ)$a_1=3,a_2=1,a_3=2,a_4=1,a_5=1,a_6=0,a_7=1,a_8=1,a_9=0,a_{10}=1$.(答案不唯一)

(Ⅱ)因为在绝对差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{20}=3,a_{21}=0$,所以自第 20 项开始,该数列是 $a_{20}=3,a_{21}=0,a_{22}=3,a_{23}=3,a_{24}=0,a_{25}=3,a_{26}=3,a_{27}=0,\cdots$ 即自第 20 项开始,每三个相邻的项周期地取值 3,0,3.所以当 $n\to\infty$ 时,a_n 的极限不存在.

当 $n\geqslant 20$ 时,$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$.

(Ⅲ)证明:根据定义,数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现零项.证明如下.

假设 $\{a_n\}$ 中没有零项,由于 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$,所以对于任意的 n,都有 $a_n\geqslant 1$,从而有

当 $a_{n-1}>a_{n-2}$ 时,$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1(n\geqslant 3)$;

当 $a_{n-1}<a_{n-2}$ 时,$a_n=a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1(n\geqslant 3)$.

即 a_n 的值要么比 a_{n-1} 至少小 1,要么比 a_{n-2} 至少小 1.

令 $c_n=\begin{cases}a_{2n-1} & (a_{2n-1}>a_{2n}),\\ a_{2n} & (a_{2n-1}<a_{2n}),\end{cases}$ $n=1,2,3,\cdots$

则 $0<c_n\leqslant c_{n-1}-1(n=2,3,4,\cdots)$.

由于 c_1 是确定的正整数,这样减少下去,必然存在某项 $c_n<0$,这与 $c_n>0(n=1,2,3,\cdots)$ 矛盾.从而 $\{a_n\}$ 必有零项.

记 $a_{n-1}=A(A\neq 0)$,若第一次出现的零项为第 n 项,则自第 n 项开始,每三个相邻的项周期地取值 $0,A,A$,即

$$\begin{cases}a_{n+3k}=0,\\ a_{n+3k+1}=A,k=0,1,2,3,\cdots\\ a_{n+3k+2}=A,\end{cases}$$

所以绝对差数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个为零的项.

补充例题

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$. 我们知道当a取不同的值时，得到不同的数列，如当$a=1$时，得到无穷数列：$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots$；当$a=-\frac{1}{2}$时，得到有穷数列：$-\frac{1}{2},-1,0$.

(Ⅰ)求当a为何值时$a_4=0$；

(Ⅱ)设数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1$，$b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证$a$取数列$\{b_n\}$中的任一个数，都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$；

(Ⅲ)若$\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant 4)$，求$a$的取值范围.

分析：(1)由$a_1=a$，$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，可以求出a_4，又因为$a_4=0$，所以a的值就可以求出.

(2)证明一个数列为有穷数列，就是要证明这个数列的项有限. 由于这个数列的递推公式为$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，所以只有在某一项为0时，后面的项就不存在，这个数列的项就是有限项了. 所以现在的问题就变成了求数列某一项的值为0的问题.

(3)由$\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant 4)$，求$a$的取值范围，我们必须找到一个与$a$有关的不等式，怎么才能找到这个不等式呢？由$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$，可以求出$1<a_{n-1}<2$，一直这样下去，就可以求出$a_4$的范围了，也就得到了一个与$a$有关的不等式.

解答：(Ⅰ)因为$a_1=a$，$1+\frac{1}{a_1}=a_2$，

所以$a_2=\frac{a+1}{a}$，$a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{2a+1}{a+1}$，$a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{3a+2}{2a+1}$，

故当$a=-\frac{2}{3}$时，$a_4=0$.

(Ⅱ)因为$b_1=-1$，$b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}$，所以$b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$，

当$a=b_1$时，$a_2=1+\frac{1}{b_1}=0$，

当$a=b_2$时，$a_2=1+\frac{1}{b_2}=b_1$，$a_3=0$，

当$a=b_3$时，$a_2=1+\frac{1}{b_3}=b_2$，

所以$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_2}=b_1$，

故$a_4=0$，

…

一般地，当$a=b_n$时，$a_{n+1}=0$，可得一个含有$n+1$项的有穷数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$.