高等教育公共基础课教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　易正俊　张良才
主审　穆春来

上册

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

（上册）

主　编　易正俊　张良才

主　审　穆春来

重庆大学出版社

内容提要

本书的编写以培养学生的创新思维能力和应用能力为指导思想.全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用,强调直观性,注重可读性.内容处理新颖,覆盖面广,深入浅出.突出数学思想和数学方法,重在应用和数学建模,淡化各种运算技巧,把学生培养成为极具竞争优势的创新型人才,体现了国内外在教材改革方面的最新进展.

本书分为上下两册.上册内容包括极限论、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及定积分的应用;下册内容包括矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数及微分方程.

本书可作为高等学校非数学专业,尤其是理工类各专业高等数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/易正俊,张良才主编.—重庆:重庆大学出版社,2011.5

ISBN 978-7-5624-6081-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①易…②张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第047150号

高等数学

(上册)

主 编 易正俊 张良才

主 审 穆春来

策划编辑:曾显跃

责任编辑:李定群 高曼琦 版式设计:曾显跃

责任校对:贾 梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023)65102378 65105781

传真:(023)65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:15.75 字数:393千

2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-6081-7 定价:29.00元

前言

本教材以经典微积分为主要内容，主要是训练学生的数学思想和数学方法以及如何从已知世界去探索未知世界，把未知的问题转化为已知的问题进行求解. 多数专业课程的学习都以高等数学为基础，很多实际问题都可归结为数学建模和求解问题. 因此，高等数学为学生的后续课程的学习和科技创新带来重要的价值，成为高校工科、理科专业及经济管理专业的一门重要必修基础课程.

《高等数学》教材在国内已有很多的版本，其内容和体系已经相当成熟. 但由于社会在进步，学科在发展，对高等数学的教学提出了更高的要求. 重庆大学主管教学的各级领导为达到“研究学术，造就人才，佑启乡邦，振导社会”的目的，从学生出发，一切为了学生，关注教材建设的每一个具体环节，强调“以培养创新精神和应用能力为核心”的指导思想，把学生培养成为极具竞争优势的创新型人才.

本教材由重庆大学数学与统计学院具有丰富教学经验的一线教师编写，参考了国内外有关教材，博采众家之长，注重培养学生的创新思维，力争为后续课程的学习奠定扎实的理论基础和应用基础. 本教材的特色主要表现在以下 5 个方面：

1. 充分强调了高等数学基础理论的重要地位，所有基本概念与基本理论尽可能从研究背景引入，选取的是学生熟悉的背景知识，图文并茂，旨在培养学生的创新思维，点燃学生的求知欲.

2. 突出数学思想和数学方法，淡化各种运算技巧. 内容处理新颖，对高等数学教材的内容进行大幅度的调整，主要是依据教材内容的逻辑体系和学生的可接受性，将学生掌握难度较大的基本理论处理成若干个学生易于接受的部分，增加教材的可读性.

3. 例题的选取经过仔细筛选，每个例题都为后面的例题或习题设下伏笔，顺序由易到难，渗透数学建模思想和数学在工程技术中的应用实例. 意在培养学生提出问题，分析问题，解决问题的能力.

4. 重视反例在学生理解和掌握基本概念和基本理论中的重要作用，对读者易误解的概念和理论进行注释.

5. 习题的设置依据学生不同的层次和不同的要求分为 A 组和 B 组. A 组是基础知识训练；B 组是能力提升，对学生的创新思维进行训练.

本书由易正俊教授和张良才副教授担任主编。第 1 章、第 2 章、第 3 章及各章的习题精选由易正俊教授编写；第 4

章和第6章由张良才副教授，张万雄副教授，彭智军讲师编写；第5章由魏曙光副教授编写.

本书由重庆大学数学与统计学院教学院长、博士生导师穆春来教授审定.

本书的出版得到重庆大学教务处、重庆大学数学与统计学院和重庆大学出版社的大力支持，我们表示衷心的感谢.

由于时间较紧，加之编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2011年3月

目录

第 1 章

函数、极限与连续

函数是微积分学研究的基本对象,极限方法是微积分学研究问题的主要方法,本章主要介绍初等函数、函数极限与连续的基本概念及有关的性质与运算法则.

1.1 函 数

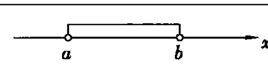
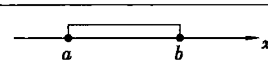
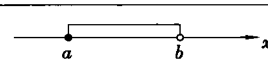
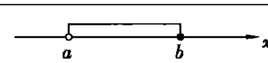
函数是研究变量和变量之间的关系,从一个或者几个变量的值去推知另一变量的值. 函数是数学最基本的概念,也是微积分研究的基本对象. 在研究函数中,经常遇到区间和邻域的概念,在这里先介绍这两个概念作为研究函数的准备知识.

1.1.1 区间与邻域

(1)区间

区间包括有限区间和无限区间,有限区间是指区间的两个端点为有限的实数,它包括开区间、闭区间和半开半闭区间,半开半闭区间包括左闭右开区间和右闭左开区间,这些内容在中学已经学过,在这里把它们列成表 1.1.

表 1.1 (有限区间)

区间名称	表示方法	图 像
开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$	
闭区间	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
左闭右开区间	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
左开右闭区间	$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$	

在实际应用中仅有限区间是不够的,还需要引入无限区间,引入无限区间需要引入无穷大“∞”这个符号,无穷大∞包括正无穷大$+\infty$和负无穷大$-\infty$,$+\infty$和$-\infty$仅是两个符号,不代

表任何实数,不能参与数的运算,数轴上的点不能取到无穷大,在有限区间中的一个端点或两个端点趋于无穷大时就得到无穷区间.

若是右端点趋于 $+\infty$ 时,得到的无穷区间为:

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$,其图像如图 1.1 所示.

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$,其图像如图 1.2 所示.

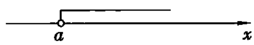


图 1.1

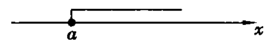


图 1.2

若有限区间的左端点趋于 $-\infty$ 得到的无穷区间为:

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$,其图像如图 1.3 所示.

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$,其图像如图 1.4 所示.

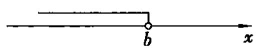


图 1.3

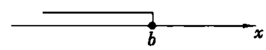


图 1.4

若有限区间的两个端点都趋于无穷大时得到的无穷区间为

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$,即整个实数轴构成的点集.

(2)邻域

满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的 x 值的集合称为以 x_0 为心 δ 为半径的**邻域**,记为 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$,即 $U(x_0,\delta)=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$,也可表示为

$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$,其图像如图 1.5 所示.

满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 值的集合称为以 x_0 为心 δ 为半径的**去心邻域**,记为 $U^0(x_0,\delta)$,即 $U^0(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$,也可表示为

$U^0(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x|x_0<x<x_0+\delta\}$,其图像如图 1.6 所示.

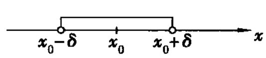


图 1.5　邻域

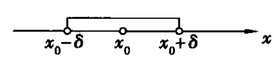


图 1.6　去心邻域

1.1.2　函数的概念

在观察自然现象、经济活动或技术过程中,通常会遇到各种不同的变量,它们之间往往是相互依赖,相互制约. 变量相互之间的关系,在数学上称为函数关系. 正方形的面积是其边长的函数;运动着的物体位置是速度和时间的函数;长方形的面积是其长和宽的函数;理想气体的压力是密度和温度的函数;粮食亩产量是施肥量、光照浓度、二氧化碳浓度等多个因素的函数. 只与一个因素有关的函数称为一元函数,与多个因素有关的函数称为多元函数. 下面给出一元函数的定义.

(1)函数的定义

定义　设有两个变量 x 和 y,如果变量 x 在一定范围 D 内取值时,按照某一对应规则,变量 y 都有确定的值与之对应,则称 y 是 x 的一个函数,记为

$$y=f(x)\qquad x\in D$$

称 x 为自变量,y 为因变量. 集合 D 称为函数的定义域,$f(x)$ 的所有可能取值称为 f 的值域,即 $\{f(x)|x\in D\}$.

两个函数相同是指函数的定义域和对应规则相同，函数与函数中的变量用什么字母来表示无关，但在研究同一个问题中同一个函数要用同一个函数符号表示，不同的函数需要用不同的函数符号表示.

(2)函数的表示法

函数的表示方法有表格法、图像法、解析法、隐函数表示法和参数方程表示法5种，下面分别举例说明函数的5种表示法.

1)表格法

表格法是把自变量的取值和相应的因变量的取值列在一张表格中. 如某商场记录了某一年12个月的电视机月销售量(单位:台)，如表1.2所示.

表1.2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表1.2表示了该商场电视机的销售量 S 与月份 t 之间的函数关系，当 t 在 $1,2,\cdots,12$ 中任取一个数值时，从表中就可确定一个月销售量 S 的对应值.

2)图像法

把自变量的取值和相应的因变量的取值作为平面直角坐标系中的一个点的坐标，这些点构成的几何图形就是用图像法表示的函数关系. 如某气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化情况. 图1.7所示为温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，它形象地表示了温度 T 随时间 t 变化的函数关系：对于某一确定 $t(0\leqslant t\leqslant 24)$，就有一个确定的 T 值与之对应.

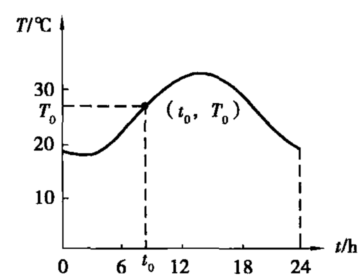


图1.7

3)解析法

函数的对应关系借助于数学表达式来表达的函数表示法称为解析法. 如 $y=2x+1$，$y=\arcsin x$，$y=\sqrt{\ln(x-1)}$ 等.

4)隐函数表示法

一般遇到函数的形式为 $y=f(x)$，$y=f(x)$ 形式的特点是：等号的左端是因变量的符号，右端是含有自变量的表达式，当自变量取定义域内的任意一值，由这个式子能确定对应的函数值，用这种式子表达的函数称为显函数；有些函数的对应关系是由含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，如 $x^2+y^2=1$，$x^3+y^3-3xy=0$ 等，函数关系隐含在方程中. 一般地，如果存在一个定义在某区间上的函数 $y=f(x)$，使得 $F[x,f(x)]\equiv 0$，则称函数 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

有时能从 $F(x,y)=0$ 中解出一个变量，这样隐函数就变为显函数了. 如从方程 $x^2-y=1$ 解出 $y=x^2-1$. 但不是任何一个隐函数都可以显化，如把方程 $e^y-xy=e^x$ 所确定的隐函数显化是不可能.

5)参数方程表示法

函数的对应关系由参数方程所确定，给定一个参数值就能确定相应的 (x,y). 一般形式如下：

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

例如,圆 $x^2+y^2=1$ 可表示为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可以表为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

(3)分段函数

分段函数是不能用一个解析式来表达的函数,在不同的范围内需要用不同的解析式来表达的函数.如下面的函数都是分段函数.

1)Dirichlet 函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

2)符号函数:函数的取值只与自变量的符号有关.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

3)取整函数:$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

$$f(x) = [x] = \begin{cases} & \vdots \\ -1 & -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & 0 \leqslant x < 1 \\ & \vdots \\ k & k \leqslant x < k+1 (k \text{ 为整数}) \\ & \vdots \end{cases}$$

(4)函数定义域的求法

函数定义域的确定一般分为两种情况:对于反映实际问题的函数关系,定义域由实际问题所界定;对于纯数学上的函数关系,其定义域为使得函数表达式有意义的自变量取值的集合.

例 1.1 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

解 要使得函数解析表达式有意义,必有 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{5}\leqslant1$,$25-x^2>0$ 同时成立,即 $-4\leqslant x\leqslant 6$, $-5<x<5$ 同时成立.

所以函数的定义域为 $-4\leqslant x<5$.

例 1.2 已知函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求$f(x+a)+f(x-a)$$(a>0)$的定义域.

解 要使得函数解析表达式有意义,必使 $0\leqslant x+a\leqslant1$,$0\leqslant x-a\leqslant1$ 同时成立,即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,$a\leqslant x\leqslant1+a$ 同时成立.因此有:

(1)当 $0<a\leqslant1-a$,即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant1-a$.

(2) 当 $a>1-a$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为空集.

1.1.3　函数的特性

(1) 单调性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$.

若对任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加；

若对任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少.

例如函数 $y=x^3$，$y=\arctan x$ 等在定义域中都是单调增加的.

有许多函数在整个定义域中并不呈现单调性，但在其定义域中的某个子区间上却上是单调的，如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是单调增加的，$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上是单调减少的.

(2) 有界性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$.

若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in D$ 时，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

其中"$\forall$"表示"任意"，"$\exists$"表示"存在".

如 $|\sin x|\leqslant 1$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$；$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $y=\sin x$ 与 $y=\arctan x$ 在其定义域内都是有界函数.

若存在两个常数 A 和 B，使得

$$A\leqslant f(x)\leqslant B\qquad x\in D$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界. 其中 A 为 $f(x)$ 的下界，B 为 $f(x)$ 的上界.

注意：①函数一旦有界，函数的界值不唯一，如 $|\sin x|\leqslant 1$，$M=1$；$|\sin x|\leqslant 2$，$M=2$.

②不是每个函数都有界，有些函数有界，有些函数是没有界的.

如函数 $y=x^2$ 在其定义域内有下界无上界，而 $y=1-x^2$ 在其定义域内有上界无下界；$y=x^3$ 在其定义域内既无上界也无下界.

定理 1　函数在 D 上有界的充要条件是函数在 D 既有上界又有下界.

证　充分性：若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则存在常数 A 和 B，使得

$$A\leqslant f(x)\leqslant B\qquad x\in D$$

取 $M=\max\{|A|,|B|\}$

（"max"表示"取最大"；类似的"min"表示"取最小"），则 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in D$.

必要性：$f(x)$ 在 D 上有界，则 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in D$，取 $A=-M$，$B=M$，则得不等式为

$$A\leqslant f(x)\leqslant B\qquad x\in D$$

(3) 奇偶性

设 $f(x)$ 是定义在原点的一个对称区间 I 上.

若 $f(-x)=-f(x)$，$\forall x\in I$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$，$\forall x\in I$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例 1.3　判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性.

解 因为$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以原函数为奇函数.

例1.4 设$f(x)$是定义在原点的一个对称区间上,把$f(x)$表成一个奇函数与一个偶函数的和.

解 因为$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

显然$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数.

所以$f(x)$可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于y轴对称;两个奇函数的和为奇函数,两个偶函数的和为偶函数;两个偶函数的乘积、两个奇函数的乘积为偶函数,一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数.

(4)周期性

对函数$f(x)$,$x\in D$,如果存在常数$T>0$使得

$$f(x+T)=f(x)\qquad \forall x\in D$$

则称$f(x)$是以T为周期的周期函数,通常说周期函数的周期是指最小正周期.

如$y=\sin x$,$y=\cos x$是周期函数,$2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$都是它的周期,2π是它的最小正周期,$y=\tan x$是以π为周期的周期函数. 并非每一个函数都有最小正周期,如Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是一个周期函数,任何正有理数都是它的周期,因不存在最小的正有理数,所以它无最小正周期.

1.1.4 反函数与复合函数

(1)反函数

在自由落体运动中,路程s与时间t的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.1}$$

式中,s是因变量,t是自变量. 从式(1.1)中将t解出

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \tag{1.2}$$

此时s成了自变量,t成了因变量,则式(1.1)和式(1.2)的两个函数称为互为反函数.

定义1 设函数$y=f(x)$的值域为R_f. 若$\forall y\in R_f$,都可以从$y=f(x)$确定唯一的x值与之对应,则得到一个定义在R_f上以y为自变量,x为因变量的函数$x=f^{-1}(y)$,称为函数$y=f(x)$的反函数. 通常记为$y=f^{-1}(x)$. .

函数$y=f(x)$和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图形在同一坐标系中关于$y=x$对称. 但不是任

意一个函数都有反函数,具有反函数的函数一定是一对一的.

定理 2(反函数存在定理)　如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上是单调增加(减少)的,则它的反函数

$$x = f^{-1}(y) \qquad y \in R_f(R_f \text{为} y = f(x) \text{的值域})$$

存在,并且其反函数也是单调增加(减少)的.

(2)复合函数

设 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=2x^2+3$. 将后一函数代入前一函数得 $y=\sqrt{2x^2+3}$,这种将一个函数代入另一个函数的运算就称为函数的"复合"运算. 但不是任意两个函数都可以进行复合运算,如 $f(u)=\arcsin u, u=x^2+2$ 就不能构成复合函数,因为函数 $u=x^2+2$ 的值域与函数 $f(u)=\arcsin u$ 的定义域的交集是一个空集.

一般地,复合函数采用下面的定义:

定义 2　设函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$,如果 $u=\varphi(x)$ 的值域部分地或全部落在 $y=f(u)$ 的定义域中,则称 $y=f(\varphi(x))$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. $y=f(u)$ 称为外函数, $u=\varphi(x)$ 称为内函数, u 称为中间变量.

例 1.5　设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,求 $f[f(x)]$.

解　对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$.

例 1.6　设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $g[f(x)]$.

解　$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x) & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2 & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x & x\geqslant 0\\ 2+x^2 & x<0\end{cases}$.

1.1.5　初等函数

(1)基本初等函数

在初等数学中已经讲过的下面几类函数:

①幂函数: $y=x^{\alpha}$ (α 为任意给定的实数).

②指数函数: $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$ 为一常数).

③对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$ 为一常数).

④三角函数:

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

⑤反三角函数:

$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

它们分别是 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 的反函数. 其主值区间分别为

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < \operatorname{arccot} x < \pi$$

以上这 5 类函数统称为**基本初等函数**,请读者画出它们的图像,并从图形中认识它们的几何特性.