先进非线性控制理论及其应用

王久和 编著

科学出版社

先进非线性控制理论及其应用

王久和　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书论述了反馈线性化、无源控制理论和自抗扰技术及其在电能质量控制、新能源、电能变换器中的应用。本书分为 4 章：第 1 章介绍数学预备知识；第 2 章阐述状态反馈线性化、输入/输出反馈线性化、零动态设计及其在电能质量控制、新能源中的应用；第 3 章首先介绍无源控制理论的基本概念，随后介绍欧拉-拉格朗日、哈密顿系统的方程及无源控制器设计方法，最后给出无源控制理论在电能质量控制、新能源及电能变换器中的应用；第 4 章论述自抗扰技术及其在电能变换器和电能质量控制中的应用。

本书可供高等院校自动化及相关专业的研究生、教师参考，亦可供从事非线性控制理论、电力电子及电力传动的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

先进非线性控制理论及其应用/王久和编著. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-033243-1

Ⅰ.先… Ⅱ.王… Ⅲ.非线性控制系统 Ⅳ.O231.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 280892 号

责任编辑：刘红梅 杨 凯 / 责任制作：董立颖 魏 谨
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 珍
北京东方科龙图文有限公司制作
http://www.okbook.com.cn

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 2 月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—3 000 字数：227 000

定 价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

在实际工程中，系统都具有非线性特征，同时系统不同程度地受到内部及外部干扰的影响，这就给系统的控制带来了困难。对此，国内外学者采用了不同的控制理论对非线性系统进行研究，如反馈线性化、反步控制法、逆系统、无源控制理论及自抗扰控制技术等。基于反馈线性化控制理论的控制器设计方法是利用非线性控制律，将非线性系统转换成输入与输出为线性关系的线性系统，再由线性理论设计控制器，从而提高系统的动、静态性能；其不足为需要全状态可测量、需要精确抵消动态、会引入控制器奇异性，对参数的依赖性大、控制律复杂。反步控制法的基本思想是将复杂的非线性系统分解成不超过系统相对阶数的子系统，然后为每个子系统设计部分 Lyapunov 函数和中间虚拟控制量，以至于“后退”到整个系统，将它们集成起来完成整个控制律的设计；其不足为计算量大、实时性差。逆系统方法的基本思想是对于给定的系统，先用对象的模型生成一种可用反馈方法实现的原系统的“γ 阶积分逆系统”，并将对象补偿成为具有线性传递关系且已解耦的规范化系统（称为伪线性系统），再用线性系统的各种设计理论来完成伪线性系统的综合。逆系统设计方法的应用前提是系统具有可逆性，其缺点是基于精确的数学模型和系统的参数，且要求系统相对阶的和小于或等于系统的维数，鲁棒性差。无源控制理论是从系统的能量入手，寻求与被控制量相关的能量函数，设计的无源控制律可使能量函数按期望的能量函数分布，从而达到控制目的。利用无源控制理论设计的系统控制器可实现系统的全局稳定性，无奇异点问题，对系统参数变化及外来摄动有较强的鲁棒性，是一种本质上的非线性控制理论。自抗扰控制器由跟踪-微分器、扩张

状态观测器和非线性状态误差反馈控制律三部分组成，其技术核心是把系统的未建模动态和未知外扰作用都归结为对系统的“总扰动”而进行观测并给予补偿。其不足是当控制对象模型阶数大于 3 时，要得到一组满意的非线性函数及相应的参数难度大；同时计算量大，导致控制周期变长，实时性差。

根据上述对几种非线性控制理论的简述，反馈线性化控制理论存在的主要问题是控制律复杂、存在奇异点。对于由控制律复杂导致的实时性问题，可由高速传感器及高速处理器予以解决；对于奇异点，可通过修改算法予以解决。因此，随着高速处理器的迅速发展，定会促进反馈线性化控制理论的发展与应用。无源控制理论基于能量控制的思路对系统进行控制，是一种本质上的非线性控制，因此日益受到国内外学者的关注。自抗扰控制技术能够把系统的未建模动态和未知外扰作用都归结为对系统的“总扰动”而进行观测并给予补偿，还可观测系统的参数，因此，近几年自抗扰控制技术在工程各领域获得了广泛应用。由于反馈线性化控制理论及无源控制理论都需要系统的数学模型及系统的参数，但在实际工程中，系统的数学模型及参数要受到各种干扰及系统工况的影响，某种程度上呈不确定性，因此，可采用反馈线性化、无源控制理论与自抗扰控制技术相结合予以解决。对于高阶系统，可将系统化为若干个低阶子系统，对每个子系统采用自抗扰控制技术。综上，本书由具有发展潜力的反馈线性化控制理论、具有能量控制属性的无源控制理论和对系统内扰及外扰有补偿作用、对变化参数有观测能力的自抗扰控制技术组成；同时也介绍了其在电能质量控制、新能源、电能变换器中的应用。

本书分为 4 章。第 1 章介绍稳定性理论、函数空间及微分几何知识；第 2 章论述状态反馈线性化、输入/输出反馈线性化、零动态设计及其在电能质量控制、新能源中的应用；第 3 章首先介绍无源控制理论的基本概念，随后阐述欧拉-拉格朗日、哈密顿系统的方程及无源控制器设计方法，最后给出无源控制理论在电能质量控制、新能源及电能变换器中的应用；第 4 章论述自抗扰技术及其在电能变换器和电能质量控制中的应用。

在本书编写过程中，北京科技大学刘贺平教授、胡广大教授提出了许多有益的建议，使本书的内容选取和编写更加合理，保证了本书的质量和科学

性。本书的出版得到了北京市属高等学校人才强教深化计划“学术创新团队建设计划”项目(PHR201007130)的资助。

本书除选用笔者本人的一些研究成果外,还选用了国内外专家学者的反馈线性化、无源控制理论及自抗扰技术方面的研究成果,在此表示衷心的感谢。

由于本人的写作能力和学术水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请读者给予批评指正。

作 者

目　录

第 1 章　预备知识

第 2 章　反馈线性化控制理论及其应用

第3章 无源控制理论及其应用

第 4 章 自抗扰控制技术及其应用

第1章 预备知识

本章主要介绍本书所需的数学基础知识，如稳定性的理论（Lyapunov 稳定理论、LaSalle 不变集定理）、函数空间及微分几何。关于书中涉及的其他基础知识或术语请读者参考有关文献。

1.1 稳定性理论

1.1.1 Lyapunov 稳定性理论

研究由微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},t) \tag{1.1.1}$$

描述的非线性系统。

式(1.1.1)中，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量，$t \in \mathbf{R}$ 为表示时间的参量。

1. 几个概念

设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是原点 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 的一个邻域，$J = [t_0, \infty)$，$t_0 \geqslant 0$ 是初始时刻，则有以下定义。

定义 1.1.1　如果函数 $W: U \to \mathbf{R}$ 满足

$$W(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \tag{1.1.2}$$

且 $W(\mathbf{0}) = 0$，则称 $W(\boldsymbol{x})$ 是正定的。

定义 1.1.2　如果对函数 $H: U \times J \to \mathbf{R}$，存在一个正定函数 $W(\boldsymbol{x})$ 使得

$$H(\boldsymbol{x},t) \geqslant W(\boldsymbol{x}), \quad \forall (\boldsymbol{x},t) \in U \times J \tag{1.1.3}$$

成立，且 $H(\mathbf{0}, T) \equiv 0$，则称 $H(\boldsymbol{x},t)$ 是正定的。如果有

$$H(\boldsymbol{x},t) \geqslant 0, \quad \forall (\boldsymbol{x},t) \in U \times J \tag{1.1.4}$$

且 $H(\mathbf{0},t) \equiv 0$，则称 $H(\boldsymbol{x},t)$ 是半正定的。

类似地可定义负定、负半正定函数。

定义 1.1.3(Lyapunov 函数)　设 $H(\boldsymbol{x},t)$($H: U \times J \to \mathbf{R}$)是连续可微的正定函数，若 $H(\boldsymbol{x},t)$沿微分方程(1.1.1)解的轨迹对 t 求导，其导数为

$$\dot{H}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x},t) \tag{1.1.5}$$

半负定且连续，则称 $H(\boldsymbol{x},t)$是方程(1.1.1)关于平衡点 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 的 Lyapunov 函数，其中$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$为

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}=\left[\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial H}{\partial x_n}\right]$$

2. 稳定定理

1) Lyapunov 稳定定理

对于系统(1.1.1),若存在 Lyapunov 函数 $H(\boldsymbol{x},t):U\times J\to\mathbf{R}$,则 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是该系统稳定的平衡点。

2) Lyapunov 渐近稳定定理

对于给定的正数 r,令 $U=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$,并记 $J=[0,\infty)$。对于系统(1.1.1),若存在 Lyapunov 函数 $H(\boldsymbol{x},t):U\times J\to\mathbf{R}$ 和负定函数 $W:U\to\mathbf{R}$,使得沿系统(1.1.1)的任意解的轨迹为

$$\dot{H}(\boldsymbol{x},t)\leqslant W(\boldsymbol{x})<0,\quad \forall t\geqslant t_0,\quad \boldsymbol{x}\in U-\{\mathbf{0}\} \tag{1.1.6}$$

且 $H(\boldsymbol{x},t)$具有定常正定解,则 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是该系统渐近稳定的平衡点。

3) Lyapunov 指数稳定定理

对于系统(1.1.1),若 $H(\boldsymbol{x},t):U\times J\to\mathbf{R}$ 是系统的 Lyapunov 函数,且满足

$$r_1\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant H(\boldsymbol{x},t)\leqslant r_2\|\boldsymbol{x}\|^2,\quad \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times J$$

$$\frac{\mathrm{d}H(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\mu\|\boldsymbol{x}\|^2,\quad \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times J$$

式中,$r_1>0,r_2>0,\mu>0$ 为给定常数,则零解 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是指数稳定的。

4) Lyapunov 逆定理[1]

设 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是非线性时变系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$的平衡点,且 $f(\boldsymbol{x},t):U\times J\to\mathbf{R}^n$ 连续可微,雅可比矩阵$\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}$在 $U\times J$ 上有界。如果系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$的零解 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是指数稳定的,即存在常数 $\alpha>0,\beta>0$ 使得不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\alpha\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)},\quad \forall(\boldsymbol{x}_0,t_0)\in U\times J \tag{1.1.7}$$

成立,则一定存在 Lyapunov 函数 $H(\boldsymbol{x},t):U\times J\to\mathbf{R}$ 和常数 $r_1>0,r_2>0,\mu>0,\lambda>0$ 使得下述不等式成立:

$$\begin{cases} r_1\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant H(\boldsymbol{x},t)\leqslant r_2\|\boldsymbol{x}\|^2, & \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times J \\ \dfrac{\mathrm{d}H(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\mu\|\boldsymbol{x}\|^2, & \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times J \\ \left\|\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right\|\leqslant\lambda\|\boldsymbol{x}\|, & \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times J \end{cases} \tag{1.1.8}$$

1.1.2 LaSalle 不变集定理

为判断系统的渐近稳定性，必须验证 Lyapunov 函数 $H(\boldsymbol{x},t)$ 沿系统状态轨迹的严格负定性。在实际系统中，构造出来的 Lyapunov 函数往往只满足 $\dot{H}(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$。对此，可用 LaSalle 不变集定理研究系统的渐近稳定性。下面只给出一些结论，有关证明可以参看文献[1]。

1. 不变集定义

LaSalle 不变集定理主要依据适当的 Lyapunov 函数刻画系统运动的极限集位置，从而利用极限集的不变性考察系统运动的渐近特性。

考察非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.9}$$

式中，$\boldsymbol{f}:U\rightarrow \mathbf{R}^n$ 为连续矢量函数且满足局部 Lipschitz 条件(若存在常数 K，使得对定义域 D 的任意两个不同的实数 x_1,x_2 均有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|<K\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$ 成立，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件)，U 为 $\mathbf{R}^n$ 中含原点的一个区域，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$。

定义 1.1.4　设系统(1.1.9)的解是 $\boldsymbol{x}(t)$，若存在时间序列 $\{t_n\}$，$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}t_n=0$，使得 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\boldsymbol{x}(t_n)=\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一个正向极限点。

定义 1.1.5　设 $M\subset\mathbf{R}^n$，若对任意初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in M$，系统(1.1.9)的解是 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t,\boldsymbol{x}_0)$ 满足

$$\boldsymbol{x}(t)\in M,\quad \forall\, t\geqslant 0 \tag{1.1.10}$$

则称 M 是关于系统(1.1.9)的正向不变集。

显然，对于系统(1.1.9)，平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是一个不变集。对一般的系统，不变集可以包含一个或几个平衡点，也可以是状态空间的一个子集合。

定义 1.1.6　若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $T>0$ 使得

$$\inf_{p\in M}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,\quad \forall\, t>T \tag{1.1.11}$$

则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 随时间 t 趋向于集合 M，记作 $\boldsymbol{x}(t)\rightarrow M$。

设系统(1.1.9)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 是有界的，则对任意给定的初始条件 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(0)$，存在时间序列 $t_n\rightarrow\infty(n\rightarrow\infty)$，使得

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\boldsymbol{x}(t_n)=\boldsymbol{x}'_0 \tag{1.1.12}$$

即存在正向极限点 $\boldsymbol{x}'_0$ 与之对应。

令 L^+ 表示系统(1.1.9)所有正向极限点组成的集合(称正向极限集)，可以证明 L^+ 是有界闭集。

引理 1.1.1 若系统(1.1.9)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是有界的，那么正向极限集 L^+ 是系统(1.1.9)的正向不变集[1]，且

$$\boldsymbol{x}(t) \rightarrow L^+ \tag{1.1.13}$$

2. LaSalle 不变集定理

定理 1.1.1 设 $\Omega \subset U$ 是系统(1.1.9)的有界正向不变集。若存在定义在 U 上的连续可微函数 $H: U \rightarrow \mathbf{R}$，满足

$$\dot{H} \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{1.1.14}$$

那么，该系统对应于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 随时间 t 趋向于 M，即

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \lim_{t \to \infty} \varphi(t, \boldsymbol{x}_0) \in M \tag{1.1.15}$$

式中，M 是集合 $E = \{\boldsymbol{x} \mid \dot{H}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 所包含的最大不变集。

LaSalle 不变集定理的几何解释如图 1.1.1 所示。由 $H(\boldsymbol{x})$ 的单调性容易理解 $\boldsymbol{x}(t)$ 将趋近于 $\dot{H} = 0$ 的集合 E。该定理的意义就在于能够得出 $\boldsymbol{x}(t)$ 不仅趋近于 E，而且最终会进入 E，并进一步趋近于不变集 M(准确地讲，趋近于 L^+)。因此，如果能够判断系统在 E 中的不变集只包含原点，那么，即使无法验证 $\dot{H}(\boldsymbol{x})$ 的严格负定性，也同样能够得出平衡点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的结论。

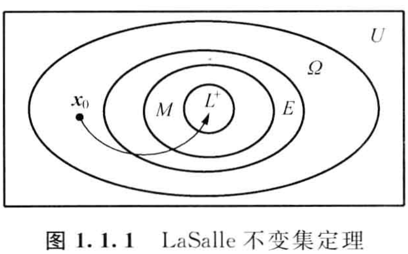

图 1.1.1 LaSalle 不变集定理

考察时变非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.1.16}$$

式中，$\boldsymbol{f}: U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}(U \subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 t 的连续向量函数，且对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$。

定理 1.1.2 对时变系统(1.1.16),若存在连续可微的函数 $H:U\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$ 满足

$$\begin{cases}\gamma_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant H(\boldsymbol{x},t)\leqslant\gamma_2(\|\boldsymbol{x}\|),\\ \dot{H}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x},t)\leqslant -W(\boldsymbol{x}),\end{cases}\quad \forall(\boldsymbol{x},t)\in U\times\mathbf{R}^+ \tag{1.1.17}$$

式中,$\gamma_1(\|\boldsymbol{x}\|)$ 和 $\gamma_2(\|\boldsymbol{x}\|)$ 是单调增加且 $\gamma(0)=0$, $\lim\limits_{a\to\infty}\gamma(a)=\infty$ 的函数,$W(\boldsymbol{x})$ 是半正定连续函数。则系统(1.1.16)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有界且满足

$$\lim_{t\to\infty}W(\boldsymbol{x}(t))=0 \tag{1.1.18}$$

若 $W(\cdot)$ 是正定函数,则系统(1.1.16)的平衡点 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的。

1.2 L_q 函数空间

1.2.1 L_q 空间及其扩展[2~4]

定义 1.2.1 对任意正整数 q,如果满足 $\int_0^\infty|f(t)|^q\mathrm{d}t<\infty$,则称可测函数 $f(t)$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 属于集合 $L_q[0,\infty)=L_q$,记为 $f\in L_q$。若有 $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|<\infty$,则称可测函数 $f(t)$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 属于集合 $L_\infty[0,\infty)=L_\infty$,记为 $f\in L_\infty$。

定义 1.2.2 称向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}=[f_1\quad f_2\quad\cdots\quad f_n]^{\mathrm{T}}$ 属于集合 L_q,若其每个分量 $f_i\in L_q$, $i=1,2,\cdots,n$,并定义

$$\|\boldsymbol{f}\|_q=\left(\int_0^\infty|\boldsymbol{f}(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\quad q=1,2,\cdots,\infty \tag{1.2.1}$$

定义 1.2.3 对任意函数 $\boldsymbol{f}(t)$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$,给定任意正数 τ,若

$$\boldsymbol{f}_\tau(t)=\begin{cases}\boldsymbol{f}(t), & t\leqslant\tau,t\in\mathbf{R}^+\\ 0, & t>\tau\end{cases} \tag{1.2.2}$$

则称 $\boldsymbol{f}_\tau(t)$ 为 $\boldsymbol{f}(t)$ 在$[0,\tau]$处的截断函数。任意给定 $q=1,2,\cdots,\infty$,对于一切可测函数 $\boldsymbol{f}(t)$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$,当 $\boldsymbol{f}_\tau(t)\in L_q$ 对于所有满足 $0\leqslant\tau<\infty$ 的 τ 成立时,则 $\boldsymbol{f}$ 属于 L_{qe}。L_{qe} 称为 L_q 的扩展或扩展 L_q 空间。

定义 1.2.4 称算子 $G:L_{qe}\mapsto L_{qe}$ 为因果的,若

$$(Gu)_\tau = (Gu_\tau)_\tau, \quad \forall \tau \geqslant 0 \tag{1.2.3}$$

因果性是指 t 时刻在算子作用下系统的输出与 t 时刻以后的输入无关，只取决于 t 时刻当前和以前的输入。

1.2.2 L_q 稳定性和 L_q 增益

定义 1.2.5 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$，若 $u \in L_q \Rightarrow Gu \in L_q$，则称 G 为 L_q 稳定的。

定义 1.2.6 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$，则称 G 具有不超过 γ_q 的有限 L_q 增益，若存在常数 b_q 使得

$$\|(Gu)_\tau\|_q \leqslant \gamma_q \|u_\tau\|_q + b_q, \quad \forall u \in L_{qe}, \forall \tau \geqslant 0 \tag{1.2.4}$$

成立。

引理 1.2.1 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$，则 G 具有不超过 γ_q 的有限 L_q 增益的充分必要条件是存在常数 b_q 使得

$$\|Gu\|_q \leqslant \gamma_q \|u\|_q + b_q, \quad \forall u \in L_q \tag{1.2.5}$$

成立。

证明 必要性。令式(1.2.4)中 $\tau \to \infty$ 即知结论成立。

充分性。对任意常数 $\forall \tau \geqslant 0$，由 $u \in L_{qe}$ 即知 $u_\tau \in L_q$。根据式(1.2.5)有

$$\|Gu\|_q \leqslant \gamma_q \|u\|_q + b_q \tag{1.2.6}$$

由因果算子定义可知 $(Gu_\tau)_\tau = (Gu)_\tau$，根据式(1.2.6)有

$$\|(Gu)_\tau\|_q = \|(Gu_\tau)_\tau\|_q \leqslant \|Gu_\tau\|_q \leqslant \gamma_q \|u_\tau\|_q + b_q \tag{1.2.7}$$

从而结论成立。

显然，如果系统具有 L_q 增益，则它必然是 L_q 稳定的，反之亦然。

定理 1.2.1 设算子 $G: L_{2e} \mapsto L_{2e}$ 有 L_2 增益 $\gamma(G)$，则

$$\gamma(G) = \inf\{\gamma \mid u \in L_{2e}, \forall \tau \geqslant 0, \exists b(\gamma), \|Gu_\tau\|^2 \leqslant \gamma^2 \|u_\tau\|^2 + b(\gamma)\} \tag{1.2.8}$$

证明见参考文献[2]。

当 $q=2$ 时，L_q 空间、L_q 稳定性和 L_q 增益就变成了 L_2 空间、L_2 稳定性和 L_2 增益。由于 L_2 范数为