ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

朗道

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

理论物理学教程 第七卷

弹性理论（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 武际可 刘寄星 译

高等教育出版社

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

理论物理学教程 第七卷

TANXING LILUN

弹性理论（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 武际可 刘寄星 译

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

第四版序言

本书的基本内容(第一、二、三章以及第五章)与最早的两版(1944 与 1953 年版,那时由于偶然的原因,将弹性理论与流体力学合并为《连续介质力学》)相比,变动很小。这是很自然的,因为弹性理论的基本方程和主要结论早已“定型”了。

在第三版(1965 年)中,补充了关于晶体的位错一章(与 A. M. 科谢维奇合作编写),现在这一章略有改动。

在这一版中,新补进了关于液晶力学的一章;它是与 Л. П. 皮塔耶夫斯基合作编写的。这是连续介质力学中同时具有流体介质和弹性介质力学特点的新领域。因此,在本教程中,把它安排在叙述流体力学和固体的弹性理论之后是合适的。

一如既往,我从与许多朋友和同事讨论本书遇到的问题中获益良多。我要对 Г. Е. 沃洛维克,В. Л. 金兹堡,В. Л. 因登鲍姆,Е. И. 卡茨,Ю. А. 科谢维奇,В. В. 列别捷夫,В. П. 米涅耶夫表示感谢,本书准备过程中采纳了他们许多有益的意见。

E. M. 栗弗席兹
苏联科学院物理问题研究所
1985 年 1 月

摘自《连续介质力学》的序言

……既然本书是由物理学家写的，并且主要是写给物理学家的，我们感兴趣的当然是那些在通常的弹性理论教科书中不论及的问题，这些问题包括热传导、固体的黏性以及一系列关于弹性振动和弹性波的理论问题。同时，我们仅仅十分简要地涉及某些专门问题（例如弹性理论的复杂数学方法、薄壳理论等），因为无论从何种程度上讲，作者们都算不上是这些问题的专家。

Л. 朗道，E. 栗弗席兹

1953 年

符　　号

ρ　物质密度

$\boldsymbol{u}$　位移矢量

$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$　应变张量

σ_{ik}　应力张量

K　全压缩模量

μ　剪切模量

E　拉伸模量(杨氏模量)

σ　泊松比

通过K,μ或E,σ表示纵向声速c_l和横向声速c_t的表达式见§22.

K,μ,E和σ之间的关系式:

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu},\qquad \sigma=\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)},$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\sigma)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

全书采用通常的矢量和张量的指标求和法则:在给定的表达式中,所有重复两次的指标("傀标")表示将该量按指标1,2,3求和.

在第六章中,对坐标的微分算子采用符号∂_i,$\partial_i\equiv\partial/\partial x_i$.

在引用《理论物理学教程》其它各卷的章节和公式时,给出的卷号对应的书名是:

第二卷:《场论》,俄文第八版,中文第一版,

第五卷:《统计物理学Ⅰ》,俄文第五版,中文第一版,

第六卷:《流体力学》,俄文第五版,中文第一版,

第八卷:《连续介质电动力学》,俄文第四版,中文第一版.

目　录

第一章

弹性理论的基本方程

§1 应变张量

弹性理论是把固体作为连续介质处理的固体力学的一个分支.[①]

在作用力的影响下，固体会发生不同程度的形变，即其体积和形状改变. 我们将以如下的方式来从数学上描述物体的形变. 物体中任意一点的位置由该点在某一坐标系中的径矢 $\boldsymbol{r}$（其分量为 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$）来确定. 当物体形变时，一般来说，它的所有的点都发生了位移. 现在我们来考查其中的任一给定点，如果在形变前它的径矢为 $\boldsymbol{r}$，形变后它变为另一径矢 $\boldsymbol{r}'$（分量为 x_i'）. 在形变时，物体上点的位移可以用矢量 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 表示，我们把它记为 $\boldsymbol{u}$，即：

$$u_i = x_i' - x_i. \tag{1.1}$$

矢量 $\boldsymbol{u}$ 称为**形变矢量**（或**位移矢量**）. 不言而喻，点在位移后的坐标 x_i' 是该点在位移前坐标 x_i 的函数. 因此，位移矢量 u_i 也是坐标 x_i 的函数. 作为 x_i 的函数给定矢量 $\boldsymbol{u}$ 后，物体的形变也就完全确定了.

当物体形变时，其点与点之间的距离发生改变. 考查无限邻近的两个任意点. 如果在形变前它们之间的径矢是 $\mathrm{d}x_i$，则在形变后这两点之间的径矢变为 $\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$. 形变前这两点的距离为

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2},$$

在形变后变为

$$\mathrm{d}l' = \sqrt{\mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2}.$$

---

① 弹性理论的基本方程是柯西（A-L. Cauchy）和泊松（S. D. Poisson）在 19 世纪 20 年代建立的.

按照通常的求和书写规则,可以写为

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_i^2, \quad \mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}x_i'^2 = (\mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i)^2,$$

以 $\mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$ 代入,我们可将 $\mathrm{d}l'^2$ 改写为

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l.$$

由于右端的第二项中的角标 i 与 k 是傀标,它们可以互换而写成对称的形式

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k.$$

在第三项中,将角标 i 与 l 互换. 这样就可以得到 $\mathrm{d}l'^2$ 的最终表达式为

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2u_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k, \tag{1.2}$$

其中

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1.3}$$

物体形变时长度元的变化就由这些表达式确定. 张量 u_{ik} 称为**应变张量**. 由其定义可知它是对称的,即

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1.4}$$

和任何对称张量一样,可以在每一给定点上把张量 u_{ik} 化为主轴表示. 这就是说,在每一个给定点上,可以选取这样的坐标系——在其中只有对角分量 u_{11},u_{22},u_{33} 不等于零. 这些分量称为应变张量的主值,把它们记为 $u^{(1)}$,$u^{(2)}$,$u^{(3)}$. 但必须注意,虽然在物体某一点上张量 u_{ik} 化归到主轴,一般而言,在所有其它点上的张量仍是非对角张量.

如果把给定点的应变张量化到主轴,则围绕该点的体元内的长度单元(1.2)将具有以下形式:

$$\mathrm{d}l'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k = (1 + 2u^{(1)})\mathrm{d}x_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\mathrm{d}x_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\mathrm{d}x_3^2.$$

我们看到,这个表达式可以分解为三个独立的项. 这就是说,在每一个体元内,物体的形变可以看作按照三个相互垂直方向(张量的主轴方向)的三个独立形变的总和. 这些形变中的每一个都是沿主轴的简单拉伸(或压缩):沿第一主轴的长度 $\mathrm{d}x_1$ 变为

$$\mathrm{d}x_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}\mathrm{d}x_1,$$

另外两轴与此类似. 因此,量

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

是沿第 i 个主轴的相对伸长 $(\mathrm{d}x_i' - \mathrm{d}x_i)/\mathrm{d}x_i$.

实际上,几乎在物体所有的形变情形下应变都是小的. 这就是说,物体中的任何一段距离的变化与这段距离本身相比都是小量. 换句话说,与 1 相比相对

伸长是小量. 以下我们将把所有的应变都看作小应变.

如果物体受到小应变,则可知确定物体内长度相对变化的应变张量的所有分量也是小量. 至于位移矢量 u_i,即使是在小应变的情形下,有时也可能是大的. 例如在细长杆发生很大弯曲的情形下,即杆的两端在空间有显著的位移时,在杆内的拉伸和压缩也是微小的.

除这种特殊情形外①,小应变时位移矢量总是微小的. 事实上,任何"三维"物体(即其尺寸在任何方向上都不特别小的物体)显然不可能发生这样的形变,即其各部分在空间的位移很大,而物体内部却没有强烈的拉伸和压缩.

我们将在第二章中单独讨论细杆. 于是,在其余的对应于小应变的情形,位移矢量及其对坐标的导数也是小的. 因此,一般表达式(1.3)中的最后一项可以看作二阶小量而略去. 这样一来,在小应变情形下,应变张量可以由表达式

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

来确定. 精确到高阶小量,给定点上沿应变张量主轴方向的长度元的相对伸长是

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)},$$

也就是说,它们是张量 u_{ik} 的主值.

让我们来考虑任意一个无限小的体元 $\mathrm{d}V$,并确定它在物体形变后的大小 $\mathrm{d}V'$. 为此,选取所考虑点上的应变张量的主轴作为坐标轴. 这时长度元 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ 在形变后将变为 $\mathrm{d}x_1' = (1 + u^{(1)})\mathrm{d}x_1$ 等等. 体积 $\mathrm{d}V$ 等于乘积 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$,而体积 $\mathrm{d}V'$ 等于 $\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'$,于是

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}).$$

略去高阶小量,我们得到

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}).$$

众所周知,张量主值之和 $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ 是一个不变量,它在任何坐标系中都应当等于张量的对角分量之和

$$u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}.$$

于是,

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1 + u_{ii}). \tag{1.6}$$

我们看出,应变张量对角分量之和给定了体积的相对变化:$(\mathrm{d}V' - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V$.

应变张量的分量在球坐标或柱坐标中的表示经常比其在笛卡儿坐标系的表示更便于应用. 这里我们给出在这两个坐标系里以位移矢量各分量导数表示的应变张量分量的表达式以便参考. 在球坐标 r,θ,φ 中,我们有

① 除了细杆的形变,薄板弯曲成柱面的形变也应当归入这一类. 这时还应当排除"三维"物体在形变时伴随有绕某个轴转动有限角度的情形.

$$\left.\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},\\
u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_0}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},\\
2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},\\
2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

在柱坐标 r,φ,z 中

$$\left.\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},\\
2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

§2 应力张量

在未形变的物体中,分子的分布处于热平衡状态. 这时物体各部分之间处于力学平衡. 这就是说,从物体内分离出一个体元,那么物体其余部分作用在这个体元上的所有力的合力等于零.

当发生形变时,分子的分布将会改变,从而物体将不再处于原来所处的平衡状态. 于是就产生了使物体回复平衡状态的力. 形变时产生的这些内力称为**内应力**. 如果物体没有形变,则其中就没有内应力.

内应力是由分子力引起的,即物体内分子间相互作用引起的. 对于弹性理论来说,分子力具有极小的作用半径是十分重要的. 分子力的影响范围在产生该力的分子附近仅能达到分子间距离的数量级. 但作为宏观理论的弹性理论,只考虑远较分子之间距离为大的距离. 因此,在弹性理论中应当认为分子力的"作用半径"等于零. 也可以说,在弹性理论中,引起内应力的力是从任何一点出发仅能影响其邻近点的"近距作用"力. 因此,作用在物体任何部分上的来自其相邻部分的力,仅作用在这部分物体的表面上.

此处有必要附加一条补充说明:当物体形变伴随有宏观电场出现时,上面的论断就不再适用了. 这些物体(热电体和压电体)将在本教程第八卷中研究.

从物体上分离出某一块体积,并考虑作用在其上的合力. 一方面,这个合力

可以表示为体积分

$$\int \boldsymbol{F} \mathrm{d}V,$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 是作用在物体的单位体积上的力*. 另一方面,被考虑体积本身的不同部分的相互作用不会产生非零的合力,因为根据牛顿第三定律,作用力与反作用力在求和时相互抵消. 因此所求的作用在给定体积上的合力,可以仅看作是这块体积周围的物体作用在其上的力之和. 但如上所述,这些力是通过体积表面作用于体积的,因此这一合力可以表为作用于该体积的每一面元上的力的总和,亦即表示为沿该体积表面的某一积分.

于是,对于物体的任一块体积,其内应力合力的三个分量中的每一个 $\int F_i \mathrm{d}V$ 都可以变换为沿该体积表面的积分. 由矢量分析知,在任一体积上作标量的积分时,如果这个标量是某一矢量的散度,体积分就可以变换为面积分. 我们现在遇到的是矢量的积分而不是标量的积分. 因而矢量 F_i 应当是某个二阶张量的散度,即 F_i 应具有形式①

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

这样,作用在某个体积上的力,可以写为如下包围该体积的闭曲面上积分的形式:②

$$\int F_i \mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik} \mathrm{d}f_k. \tag{2.2}$$

张量 σ_{ik} 称为**应力张量**. 从(2.2)可以看出,$\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 是作用于面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 上的力的第 i 个分量. 在平面 xy, yz, zx 上选定面元就可以看到,应力张量分量 σ_{ik} 是作用在垂直于 x_k 轴的单位面积上的力的第 i 个分量. 这样,在垂直于 x 轴的单位面积上,作用有与它垂直(指向 x 轴的方向)的力 σ_{xx} 和(指向 y 轴和 z 轴的)切向力 σ_{yx} 和 σ_{zx}.

这里有必要对力 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 的符号加以说明. 在(2.2)中沿表面的积分是由物体的其余部分作用于该表面围定的体积上的力. 反之,由该体积作用于其周围部分表面的力具有相反的符号. 因此,比方说,内应力作用到物体全部表面上的力是

---

* 在连续介质力学中,力主要分为体积力(按照体积分布的力)和面力(按照面积分布的力),并且封闭曲面上的面力可以通过场论公式化为体积力的形式. 作者在本书中没有特意区分源自面力的体积力和其它的体积力,这为理解本书相关内容带来一定困难. 此处的体积分仅指源自面力的体积力. ——译者注

① 面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 沿闭曲面的外法线方向. 闭曲面上的积分变换为体积分时,用算子 $\mathrm{d}V \cdot \partial/\partial x_i$ 取代 $\mathrm{d}f_i$.

② 严格地讲,确定作用在形变后物体的体积上的合力时,积分不应当按原来的坐标 x_i,而应当按形变后的点的坐标 x_i' 进行. 同样,导数(2.1)应当对 x_i' 来取. 但由于是小应变,对 x_i 和对 x_i' 的导数之间相差高阶小量,因此所有求导都可以对坐标 x_i 进行.

$$-\oint \sigma_{ik} \mathrm{d}f_k,$$

这里积分遍历物体的表面，而 $\mathrm{d}f$ 指向外法线方向.

我们来确定作用于物体某部分的力所产生的矩. 我们知道，力 $\boldsymbol{F}$ 的矩可以写成二阶反对称张量，其分量为 $F_i x_k - F_k x_i$，这里 x_i 是力的作用点的坐标①. 因此，作用于体元 $\mathrm{d}V$ 的力矩为 $(F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V$，而作用在整个体积上的力矩是

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V.$$

如同作用于任何体积的合力一样，这些力矩也应表示为沿体积表面的积分. 把 F_i 的表达式(2.1)代入，就得到

$$M_{ik} = \int\left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i\right)\mathrm{d}V = \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l}\mathrm{d}V - \int\left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V.$$

注意在上式右端第二项中，导数 $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_l}$ 是单位张量 δ_{kl}；而第一项中积分号下的部分是某一张量的散度，故这一积分可变换为面积分；结果得到

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\mathrm{d}f_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\mathrm{d}V. \tag{2.3}$$

只有在应力张量为对称张量，即

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{2.4}$$

时，张量 M_{ik} 才能够用面积分表出. 因为这时体积分项消失了(关于(2.4)这一重要的结果的论证，我们在本节末还要讨论). 作用于物体的某个体积上的力矩于是就可以写成如下简单的形式：

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\mathrm{d}f_l. \tag{2.5}$$

在物体各向均匀受压时，应力张量很容易写出. 这时，作用于物体每一单位表面积上的压力，即压强的大小是相同的，且压强指向物体表面的内法线方向. 如果把这个压强记为 p，则作用在面元 $\mathrm{d}f_i$ 上的力为 $-p\mathrm{d}f_i$. 另一方面，这个力可以通过应力张量表示，应具有 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 的形式. 把 $-p\mathrm{d}f_i$ 写为 $-p\delta_{ik}\mathrm{d}f_k$ 的形式，可以看出，在各向均匀受压时，应力张量具有如下形式：

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{2.6}$$

这个应力张量所有不等于零的分量都等于压强.

在任意形变的一般情形下，应力张量的非对角分量也不等于零. 就是说，在物体内的每一面元上，不仅作用有垂直于面元的力，还有与面元相切的使平行面元彼此错开的“剪切”应力.

---

① 力 $\boldsymbol{F}$ 的矩由矢量积 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$ 来确定. 两个矢量的矢量积是二阶反对称张量，其分量已在正文里写出.

当物体处于平衡时,在物体每一个体元上内应力必须相互抵消,即必须有 $F_i=0$. 这样,形变后物体的**平衡方程**具有如下形式:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{2.7}$$

如果物体处于重力场中,则作用在物体单位体积上的内应力与重力 $\rho \boldsymbol{g}$ 之和 $\boldsymbol{F}+\rho \boldsymbol{g}$ 应等于零(ρ 是密度①),$\boldsymbol{g}$ 是重力加速度矢量,其方向竖直向下;在这种情形下,平衡方程的形式为:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0. \tag{2.8}$$

至于直接施加于物体表面的外力(通常,它们也是引起物体形变的根源),它们将出现在平衡方程的边界条件中. 令 $\boldsymbol{P}$ 为作用于物体表面单位面积上的外力,于是作用在面元 $\mathrm{d}f$ 上的外力是 $\boldsymbol{P}\mathrm{d}f$. 平衡时,外力必须与作用在同一面元上的内应力 $-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 相抵消. 于是应当有

$$P_i\mathrm{d}f-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k=0.$$

把 $\mathrm{d}f_k$ 写为 $\mathrm{d}f_k=n_k\mathrm{d}f$ 的形式,这里 $\boldsymbol{n}$ 是指向表面外法线的单位矢量,由此得

$$\sigma_{ik}n_k=P_i. \tag{2.9}$$

此即为处于平衡的物体表面应当满足的条件.

我们现在引进一个确定形变物体中应力张量平均值的公式. 为此,将方程(2.7)乘以 x_k 并对物体整个体积求积分,便得:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l}x_k\mathrm{d}V=\int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\mathrm{d}V-\int \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\mathrm{d}V=0.$$

把第一个等号右端第一项变换为沿物体表面的积分;第二项的积分中注意 $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_l}=\delta_{kl}$,由此得

$$\oint \sigma_{il}x_k\mathrm{d}f_l-\int \sigma_{ik}\mathrm{d}V=0.$$

将式(2.9)代入上式第一个积分中,即得

$$\oint P_ix_k\mathrm{d}f=\int \sigma_{ik}\mathrm{d}V=V\overline{\sigma}_{ik},$$

这里 V 是物体的体积,而 $\overline{\sigma}_{ik}$ 是在整个物体上应力张量的平均值. 利用关系式 $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$,可以把这个式子写成对称的形式:

$$\overline{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2V}\oint(P_ix_k+P_kx_i)\mathrm{d}f. \tag{2.10}$$

于是,应力张量的平均值可以直接由作用于物体的外力来确定,而无需先去求

① 严格地说,物体形变时其密度是会改变的. 但在小形变情形计入这种改变只会得到高阶小量,故这种改变不重要.

解平衡方程.

现在让我们返回前面已经作过的对应力张量对称性的证明上来，这个证明需要进一步准确化. 那里所提的物理条件，即张量 M_{ik} 可以只由面积分来表达，不仅当张量 σ_{ik} 的反对称部分（即式(2.3)中在体积分内的表达式）为零时能满足，而且当它们是某一散度，即

$$\sigma_{ik}-\sigma_{ki}=2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl},\quad \varphi_{ikl}=-\varphi_{kil} \tag{2.11}$$

时也能满足. 这里 φ_{ikl} 是对前两个指标为反对称的任意张量. 在这种情形下，这一张量被表示为导数项 $\partial u_i/\partial x_k$，并且相应地，应力张量中出现了位移矢量的高阶导数项. 我们在这里所讨论的弹性理论中，所有这些项都应当被看作高阶小量而略去.

然而，原则上重要的是，即使在这些项不略去，应力张量也可以化为对称形式[①]. 问题在于这个张量的定义(2.1)并不唯一，而允许其它的变换形式

$$\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl},\quad \chi_{ikl}=-\chi_{ilk}, \tag{2.12}$$

这里 χ_{ikl} 是按后两个角标为反对称的任意张量；显然，用以确定力 $\boldsymbol{F}$ 的导数 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 和 $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$ 是恒等的. 如果 σ_{ik} 的反对称部分具有式(2.11)的形式，则非对称的 σ_{ik} 可以经过这种形式的变换化为对称形式. 对称张量具有形式

$$\tilde{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2}(\sigma_{ik}+\sigma_{ki})+\frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk}+\varphi_{kli}). \tag{2.13}$$

实际上，由张量

$$\chi_{ikl}=\varphi_{kli}+\varphi_{ilk}-\varphi_{ikl}$$

容易确认，差 $\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}$ 具有式(2.12)的形式（P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan, 1972）.

§3　形变热力学

考虑任意一个形变的物体，并假定其形变的变化方式是位移矢量 u_i 改变一个小量 δu_i；现在来确定内应力在这一变化时所作的功. 力 $F_i=\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 乘以位移变动 δu_i 并沿整个物体体积积分，有：

$$\int\delta R\mathrm{d}V=\int\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\mathrm{d}V.$$

这里我们用符号 δR 表示内应力在单位体积物体上所作的功. 作分部积分，得到

$$\int\delta R\mathrm{d}V=\oint\sigma_{ik}\delta u_i\mathrm{d}f_k-\int\sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V.$$

① 按照微观理论的普遍结果（对照本教程第二卷 §32）.

考虑在无穷远处不发生形变的无限介质,我们把第一个积分的积分曲面推向无穷远处,在那里 $\sigma_{ik}=0$,所以积分值为零. 利用张量 σ_{ik} 的对称性,第二个积分可以重新写为:

$$\int \delta R \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V = -\int \sigma_{ik}\delta u_{ik}\mathrm{d}V.$$

于是我们有

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik}. \tag{3.1}$$

这就是按照应变张量变化确定功 δR 的公式.

如果物体的形变足够小,则在引起形变的外力停止作用后,物体将恢复到形变前的状态. 这种形变称为**弹性形变**. 在大形变时撤去外力并不能使形变完全消失,而是剩下使物体的状态不同于力作用以前状态的所谓的**残余形变**. 这样的形变称为**塑性形变**. 今后(除第四章外)我们将只考虑弹性形变.

我们进而假定,形变的过程足够缓慢,以致每一瞬时在物体内都能够建立对应于物体所处外界条件的热平衡状态(实际上,这一假定几乎总是满足的). 这样的过程称为热力学可逆过程.

今后我们规定,所有的热力学量,如熵 S、内能 $\mathscr{E}$ 等等都是对物体的单位体积来说的,而不是像在流体力学中那样是对单位质量来说的,并且用相应的大写字母来表示.

关于这一点,有必要作以下的说明. 严格地讲,必须对形变前后的单位体积加以区分;因为一般说来它们包含有不同数量的物质. 除去第四章外,我们今后在提到热力学量时,总是对于形变前的单位体积来说的,亦即相对于原来的体积中所含的物质数量说的,这些物质在形变后可以占据与原来不一样的体积. 按照这个规定,例如,物体的总能量总是将 $\mathscr{E}$ 沿未形变物体的体积积分得到的.

内能的无限小变化 $\mathrm{d}\mathscr{E}$,等于单位体积物体获得的热量与内应力所作功 $\mathrm{d}R$ 之差. 在可逆过程中热量等于 $T\mathrm{d}S$,这里 T 是温度. 这样,$\mathrm{d}\mathscr{E}=T\mathrm{d}S-\mathrm{d}R$;把式(3.1)中的 $\mathrm{d}R$ 代入,就得到

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S + \sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}. \tag{3.2}$$

这就是物体形变时的基本热力学关系.

在物体各向均匀受压时,应力张量 $\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}$(2.6). 这时

$$\sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik} = -p\delta_{ik}\mathrm{d}u_{ik} = -p\mathrm{d}u_{ii}.$$

但我们知道(参看(1.6)),应变张量对角分量之和 u_{ii} 是形变时体积的相对变化. 如果考虑单位体积,则 u_{ii} 正好是这个体积的变化,而 $\mathrm{d}u_{ii}$ 就是体元的变化 $\mathrm{d}V$. 这时,热力学关系就表现为通常的形式