多边形逼近圆周长的极限方法(割圆术)。但自五代(约10世纪)以后，中国在几何学方面的建树不多。中国几何学以测量与面积体积的量度为中心，古希腊的传统则重视形的性质与各种性质间的相互关系。欧几里得的《几何原本》，建立了用定义、公理、定理、证明构成的演绎体系，成为近代数学公理化的楷模，影响及于整个数学的发展。特别是平行公理的研究，导致了19世纪非欧几里得几何学的产生。欧洲自文艺复兴时期起出现了射影几何学。18世纪，G.蒙日应用分析方法于形的研究，开微分几何学的先河。C.F.高斯的曲面论与B.黎曼的流形理论开创了脱离周围空间以形作为独立对象的研究方法；19世纪F.克莱因以群的观点对几何学进行统一处理。此外，如G.康托尔的点集理论扩大了形的范围；H.庞加莱创立了拓扑学，使形的连续性成为几何研究的对象。这些都使几何学面目一新。

在现实世界中，数与形，如影之随形，难以分割。中国的古代数学反映了这一客观实际，数与形从来就是相辅相成，并行发展的。例如勾股测量提出了开平方的要求，而开平、立方的方法又奠基于几何图形的考虑。二次、三次方程的产生，也大都来自几何与实际问题。至宋元时代，由于天元与相当于多项式概念的引入，出现了几何代数化。在天文与地理中的星表与地图的绘制，已用数来表示地点，不过并未发展到坐标几何的地步。在欧洲，14世纪N.奥尔斯姆的著作中已有关于经纬度与函数图形表示的萌芽，而17世纪R.笛卡儿提出了系统的把几何事物用代数表示的方法及其应用，在其启迪之下，经G.W.莱布尼茨、I.牛顿等的工作，发展成了现代形式的坐标制解析几何学，使数与形的统一更臻完美，不仅改变了几何证题过去遵循欧几里得几何的老方法，还引起了导数的产生，成为微积分学产生的根源。这是数学史上的一件大事。在20世纪中，由于科学与技术上的要求促使数学家们研究运动与变化，包括量的变化与形的变换(如投影)，还产生了函数概念和无穷小分析即现在的微积分，使数学从此进入了一个研究变量的新时代。18世纪以来，以解析几何与微积分这两个有力工具的创立为契机，数学以空前的规模迅猛发展，出现了无数分支。由于自然界的客观规律大多是以微分方程的形式表现的，微分方程的研究一开始就受到重视。微分几何基本上与微积分同时诞生，高斯与黎曼的工作又产生了内在的现代微分几何。19、20世纪之交，庞加莱创立了拓扑学，开辟了对连续现象进行定性与整体研究的途径。对客观世界中随机现象的分析，产生了概率论。第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制理论与数理统计学等学科。实际问题要求具体的数值解答，产生了计算数学。选择最优途径的要求又产生了各种优化的理论、方法。力学、物理学同数学的发展始终是互相影响互相促进的，特别是相对论与量子力学推动了微分几何与泛函分析的成长。此外在19世纪还只用到一次方程的化学和几乎与数学无缘的生物学，都已要用到最前沿的一些高深数学。19世纪后期，出现了集合论，还进入了一个批判性的时代，由此推动了数理逻辑的形成与发展。也产生了把数学看作一个整体的各种思潮和数学基础学派。特别是1900年D.希尔伯特关于当代数学重要问题的演讲，以及30年代开拓以结构概念统观数学的法国布尔巴基学派的兴起，对20世纪数学发展的影响至深且巨。科学的数学化一语也往往为人们所乐道。数学的外围向自然科学、工程技术甚至社会科学不断渗透扩大并从中吸取营养，出现了一些边缘数学。数学本身的内部需要也孳生了不少新的理论与分支。同时其核心部分也在不断巩固提高并有时作适当调整以适应外部需要。总之，数学这棵大树茁壮成长，既枝叶繁茂又根深蒂固。本卷详细地介绍了数学的各个分支与各种流派。

在数学的蓬勃发展过程中，数与形的概念不断扩大，日趋抽象化，以至于不再有任何原始

计数与简单图形的踪影。虽然如此，在新的数学分支中仍有着一些对象和运算关系借助于几何术语来表示。如把函数看成是某种空间的一个点之类。这种做法之所以行之有效，归根结蒂还是因为数学家们已经熟悉了那种简易的数学运算与图形关系。而后者又有着长期深厚的现实基础。而且，即使是最原始的数字如1、2、3、4，以及几何形象如点与直线，也已经是经过人们高度抽象化了的概念。因此，如果把数与形作为广义的抽象概念来理解，则前面提到的把数学作为研究数与形的科学这一定义，对于现阶段的近代数学，也是适用的。

由于数学研究对象的数量关系与空间形式都来自现实世界，因而数学尽管在形式上具有高度的抽象性，而实质上总是扎根于现实世界。生活实践与技术需要始终是数学的真正源泉，反过来，数学对改造世界的实践又起着重要的、关键的作用。理论上的丰富提高与应用的广泛深入在数学史上始终相伴相生，相互促进。但由于各民族各地区的客观条件不同，数学的具体发展过程是有差异的。大体说来，古代中华民族以竹为筹，以筹运算，自然地导致十进位值制的产生。计算方法的优越有助于对实际问题的具体解决。由此发展起来的数学形成了一个以构造性、计算性、程序化与机械化为其特色，以从问题出发进而解决问题为主要目标的独特体系。而在古希腊则着重思维，追求对宇宙的了解。由此发展成以抽象了的数学概念与性质及其相互间的逻辑依存关系为研究对象的公理化演绎体系。

中国的数学体系在宋元时期达到高峰以后，陷于停顿且几至消失。而在欧洲，经过文艺复兴、宗教革命、资产阶级革命等一系列的变革，导致了工业革命与技术革命。机器的使用，不论中外都由来已久。但在中国，则由于明初被帝王斥为奇技淫巧而受阻抑。在欧洲，则由于工商业的发展与航海的刺激而得到发展，机器使人们从繁重的体力劳动中解放出来，并引导到理论力学和一般的运动和变化的科学研究。当时的数学家都积极参与了这些变革以及相应数学问题的解决，产生了积极的效果。解析几何与微积分的诞生，成为数学发展的一个转折点。17世纪以来数学的飞跃，大体上可以看成是这些成果的延续与发展。

20世纪出现各种崭新的技术，产生了新的技术革命。特别是计算机的出现，使数学又面临一个新时代。这一时代的特点之一就是部分脑力劳动的逐步机械化。与17世纪以来数学之以围绕连续、极限等概念为主导思想与方法不同，由于计算机研制与应用的需要，离散数学与组合数学开始受到重视。计算机对数学的作用已不限于数值计算，符号运算的重要性日趋明显(包括机器证明等数学研究)。计算机还广泛应用于科学实验。为了与计算机更好配合，数学对于构造性、计算性、程序化与机械化的要求也显得颇为突出。代数几何是一门高度抽象化的数学，最近出现的计算性代数几何与构造性代数几何的提法，即其端倪之一。总之，数学正随着新的技术革命而不断发展。

线逼近曲线得到的。在1744年的一本书中，他用这一方程解决了大量的泛函的极值问题。这本书标志着变分法作为一个数学分支的诞生。不过这里采用的是J.-L. 拉格朗日于1755年给出的至今仍然普遍采用的变分方法，其基本点是给极值函数y_0以变分η，泛函$J[y]$相应的变分$J[y_0]\eta$应为零。

自由端点问题 把相应最速降线问题泛函(1)的欧拉方程的解用常微分方程的方法解出来得到旋轮线。若参与比较的曲线的端点在直线$x=a_0$和$x=a_1$上，但纵坐标未知，在对变分(5)分部积分时将会有附加项$[F_{y'}\eta]_{a_0}^{a_1}=0$，$\eta$在端点$a_0$和$a_1$的值任意，由此知道

$$\left.\begin{aligned}&F_{y'}(a_0,y(a_0),y'(a_0))=0,\\&F_{y'}(a_1,y(a_1),y'(a_1))=0,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

y自然仍满足欧拉方程。若曲线的右端点在曲线$f(x,y)=0$上滑动，则在a_1应满足横截条件

$$(F-F_{y'}y'):F_{y'}=f_x:f_y\,。\tag{10}$$

这类条件是首先由拉格朗日在1760～1761年的一篇文章中得到的。

条件极值问题 若在使与(1)类似的泛函取给定值

$$K[y]=\int_{a_0}^{a_1}G(x,y,y')\,dx=l\tag{11}$$

的y中求泛函(1)的极值函数和极值，这就是泛函的条件极值问题。类似于多元函数的拉格朗日乘数法，引入泛函

$$\begin{aligned}J[y]+\lambda K[y]&=\int_{a_0}^{a_1}(K(x,y,y')+\lambda G(x,y,y'))\,dx\\&=\int_{a_0}^{a_1}H(x,y,y',\lambda)\,dx,\end{aligned}\tag{12}$$

则存在常数λ使极值曲线y满足相应于H的欧拉方程，这一方程和条件(11)一般就能确定y。

最引人注目的条件极值问题是等周问题，即在给定周长l的平面封闭曲线中选取围出最大面积的曲线。对封闭曲线采用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

相应周长

$$l=\int_0^1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}\,dt,$$

相应面积

$$S=\frac{1}{2}\int_0^1(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt,$$

$$H(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})+\lambda(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}。$$

对两个函数x和y和(8)相应的欧拉方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\dot{y}-\frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2}+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0,\\&-\frac{1}{2}\dot{x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2}+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

解之可得曲线形状为圆周。这一答案是由雅各布第一·伯努利于1701年得到的。在条件(11)之下求泛函极值的问题常冠以等周问题的名字。

另一类条件极值问题中函数y,z服从一个约束

$$\varphi(x,y,z)=0,\tag{14}$$

而求泛函

$$J[y,z]=\int_{a_0}^{a_1}F(x,y,z,y',z')\,dx\tag{15}$$

的极值，这时存在函数$\lambda(n)$使在极值曲线上和函数

$$\Phi(x,y,z,y',z')=F+\lambda\varphi\tag{16}$$

相应的关于y和z的欧拉方程(8)成立。

这类条件极值的典型问题是测地线问题。在曲面$\varphi(x,y,z)=0$上求连结两点$A(x_0,y_0,z_0)$和$B(x_1,y_1,z_1)$的最短弧$\Gamma:y=y(x),z=z(x)$，弧长

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

由上述结果可断言测地线上每一点的主法线与曲面的法线重合。测地线问题由约翰第一·伯努利在1728年向欧拉提出。欧拉当年给出了曲面上测地线微分方程。

泛函极值的充分条件 使泛函的一阶变分为零的函数或等价地相应欧拉方程(和适当边界条件)的解称为泛函的稳定点。泛函的极值点必是稳定点，但反之未必成立，对数值变量的函数就已如此。变分法的第二个基本问题是寻找应该加在稳定点上的条件以保证它是极值点，此即极值点的充分条件。在稳定点这一条件之外再继续寻求一定个数的必要条件，然后再检验这些必要条件是否保证稳定点就是极值点。在函数极值问题中，f在O处取极小值，必须O是稳定点，即$f'(O)=0$，并且二阶导数$f''(O)\geqslant 0$，但显然$f''(O)=0$不能保证O点是f的极小值点，而严格不等式$f''(O)>0$足以保证O是f的极小值点，这正好与泛函极值相对应。

勒让德条件 仍以固定端点的泛函(1)的极小问题为例，限制在允许函数的一维空间$y_0+t\eta$(t为实数)上考虑泛函J，y_0是极小值点，η是任一端点为零的光滑函数，已知y_0满足$\delta J[y_0]=0$，且使二阶变分

$$\begin{aligned}\delta^2J[y_0]\eta&=\frac{d^2}{dt^2}\int_{a_0}^{a_1}F(x,y_0+t\eta,y_0'+t\eta')\,dx\Big|_{t=0}\\&=\int_{a_0}^{a_1}(F_{yy}^0\eta^2+2F_{yy'}^0\eta\eta'+F_{y'y'}^0\eta'^2)dx\geqslant 0。\end{aligned}\tag{17}$$

这里二阶变分的意义是当η和η'的绝对值都很小时，泛函$J[y]$在稳定点y_0的增量$J[y_0+\eta]-J[y]$的二次主部。要使(17)成立，一个必要条件是

$$F_{y'y'}^0\geqslant 0。\tag{18}$$

这里$F_{y'y'}^0$是把稳定点代入$F_{y'y'}(x,y,y')$所得的函数。条件(18)称为勒让德条件。由A.-M. 勒让德在1786年得到，翌年他领悟到这也只不过是个必要条件。建立充分条件的工作，50余年后由C. G. J. 雅可比实现。雅可比条件设强化的勒让德条件$F_{y'y'}^0>0$成立，对二次变分(17)进行分部积分

$$\begin{aligned}\delta^2J[y_0]\eta&=\int_{a_0}^{a_1}\left[\left(-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}^0\eta')+F_{yy}^0-\frac{d}{dx}F_{yy'}^0\right)\eta\right]\eta\,dx\\&=\int_{a_0}^{a_1}(A\eta)\eta\,dx,\end{aligned}\tag{19}$$

梅文鼎、明安图、李潢、李锐、汪莱、焦循、张敦仁、沈钦裴、项名达、罗士琳、徐有壬、戴煦、夏翔鸾、时曰醇、李善兰等人，外国数学家有多禄某(托勒密)、未叶大(F.韦达)、欧几里得、亚奇默德(阿基米德)、若德讷白尔(J.纳皮尔)、奈端(I.牛顿)、华里司(J.沃利斯)、富路玛(P. de 费马)等人。

《畴人传》所有传记并非编辑者自撰，而是“掇拾史书，荟萃群籍，甄(审查)而录之，以为列传”(《畴人传·序》)。每篇传记之末，一般都有评述，其中不乏中肯之见，例如阮元说赵爽：“勾股圆方图注五百余字耳，而后人数千言所不能详者，皆包蕴无遗，精深简括，诚算氏之最也。”对《孙子算经》物不知数题认为：“为九章(算术)所未及，宋秦道古(九韶)数学九章大衍求一法盖创于此也。”对秦九韶改进的正负开方法(高次方程数值解法)认为是古代开平方、开立方的发展，是一脉相承的，阮元说：“读九韶书而后知昔人开方除法固(本来)有一以贯之者，留情九数之士，宜孰(熟)复而研究之也。”对于如何整旧如旧，即用当时具体条件来解释各种数学现象这个问题上，罗士琳对李潢的工作是欣赏的，说：“信古能笃(忠实)，实事求是，其于中西之学，孰优孰劣，早经了了(明瞭)于胸中，故所著九章细草(详细演草)，缉古考注二书，能发古人之真解，与古人息息相通。”

阮元选编《畴人传》时在取材上是慎重的，把科学的数学与迷信的术数严格区别开来。他说，《新唐史》记李淳风能逆推武氏之乱，《宋史》又记刘羲叟能预知辽主死期，这是写传记人的无知，并非数学之所能推测。类似这类材料《畴人传》一律不收。他还把科学的天文学与迷信的占星术区别开来。他说，用天象如日晕、云气、虹霓等来占卜人事吉凶，《畴人传》一概删除。又说，学者应明确造历根本是在实测，实测最重要的是凭借仪表。不致力于此而牵强附会于音律、《周易》，都是无稽之谈。

但是限于认识水平，阮元对数学发展客观规律的看法还存在着不少的缺点，例如他说：“西法实窃取于中国，”“西洋人有在秦汉以前者，……其人之有无，盖未可知，即果有其人……，亦断不可与商高、荣方并列。”又说：“读者因流溯源，知后世造术密于前代者，盖古人之长而为之，非后人之知能出古人之上也。”囿于这些片面的认识，因此他在编辑《畴人传》的工作上就无可避免地造成一定消极影响。

限于具体条件和编辑者业务水平，中国传统数学中好多重要内容在《畴人传》中被遗漏了。例如祖暅球体体积公式推导过程，《孙子算经》物不知数题术文，《张丘建算经》百鸡术、贾宪三角以及增乘开方法，秦九韶大衍求一术等都未见反映，而清代梅文鼎、年希尧、汪莱、李善兰的工作也没有全面反映。

1898年黄钟骏撰《畴人传四编》11卷，以补阮元、罗士琳、诸可宝三书的遗漏，虽续补了270余人，但或无原著，或所著书早经失传，因此，《畴人传四编》在数学史研究上没有起过什么作用。　　(沈康身)

chousuan

筹算　中国古代以筹为工具来记数、列式和进行各种数与式的演算的一种方法。筹，又称为策、筹策、算筹，后来又称之为算子。它最初是小竹棍一类的自然物，以后逐渐发展成为专门的计算工具，质地与制作也愈加精致。据文献记载，算筹除竹筹外，还有木筹、铁筹、骨筹、玉筹和牙筹，并且有盛装算筹的算袋和算子筒。算筹实物已在陕西、湖南、江苏、河北等省发现多批。其中发现最早的是1971年陕西千阳出土的西汉宣帝时期的骨制算筹。

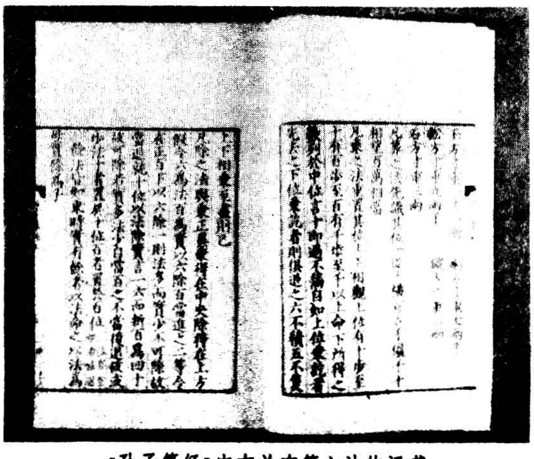
筹算在中国肇源甚古，春秋战国时期的《老子》中就有“善数者不用筹策”的记述。当时算筹已作为专门的计算工具被普遍采用，并且筹的算法已趋成熟。

《汉书·律历志》中有关于算筹的形状与大小的记载：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。”西汉算筹一般是直径为0.23厘米，长约13.86厘米的圆形竹棍，把二百七十一枚筹捆成六角形的捆。而《隋书·律历志》称：“其算用竹，广二分，长三寸。正策三廉，积二百一十六枚成六觚，乾之策也。负策四廉，积一百四十四枚成方，坤之策也。”到了隋代，算筹已是三棱形与四棱形两种，以区别正数与负数。其广约为0.59厘米，长约8.85厘米。这表明从汉到隋，算筹从圆而方，由长变短，以便运用。魏刘徽注《九章算术》称：“正算赤，负算黑，否则以邪正为异。”又《梦溪笔谈》卷八称：“算法用赤筹、黑筹，以别正负之数。”可见早在三国以前，中算家便已用筹的颜色的赤、黑或形状的邪、正(三棱形和四棱形)来区分正、负数了。

算筹记数的规则，最早载于《孙子算经》：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千、十相望，万、百相当。”用算筹表示数目有纵、横两种方式：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表示一个多位数，是把各位数码由高位到低位从左至右横列。各位筹式必须纵横相间：个位、百位、万位等用纵式；十位、千位、十万位等用横式。例如1985用算筹表示



《孙子算经》中有关布筹之法的记载

−1 的位似变换，可看作是以 S 为中心，旋转角为 180° 的旋转变换。

在位似变换下，任何一条直线变为与它平行的直线（图 14），直线 AB 经位似变换得到 $A'B'$，则 $A'B' /\!/ AB$。

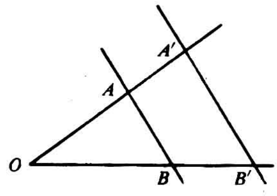


图 14　AB 和 $A'B'$ 关于 O 位似

任意两个不等的圆，都可看作是位似图形，两圆心是对应点。如图 15，圆 O 的半径为 R，圆 O' 的半径为 r。S 和 S' 分别以定比 R/r 外、内分线段 OO'。圆 O 和 圆 O' 分别关于 S 和 S' 位似，它们的位似比为 R/r。

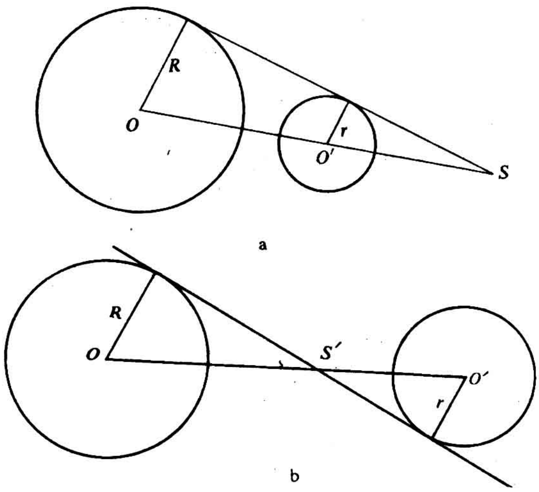


图 15　位似图形

类似地，任意两个不等的球也可以看作是位似图形，并且有两种方法使它们位似。

反演变换　在平面内设有一半径为 R，中心为 O 的圆，对任一异于 O 点的 P 点，将其变换成该射线 OP 上一点 P'，且使 $OP'\cdot OP=R^2$，这个变换叫做平面反演变换。圆 O 叫做反演基圆，圆心 O 叫做反演中心或反演极，R 叫做反演半径或反演幂（图 16）。从定义可知，反演变换将过反演中心的射线变成自身，且在此射线上建立对合对应，它使位于圆内的点变成圆外的点，位于圆外的点变成圆内的点，反演中心变成平面内的无限远点。而反演圆上的点则保持不变。

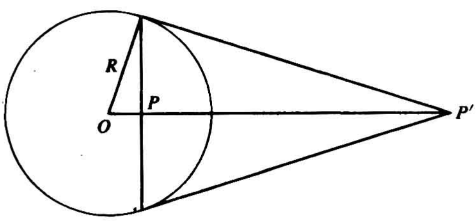


图 16　P 和 P' 关于 O 互为反演点

空间反演变换可以看作是平面反演变换绕反演基圆的直径旋转而得。反演变换下，将不过反演中心的直线或平面，分别变成过反演中心的圆或球面；将不过反演中心的圆或球面，分别变成另一个不过反演中心的圆或球面。反之也成立。

反演变换是反向保角的，即使两线（或两面）所成的角度的大小保持不变，但方向相反。　　（胡　杞）

chudeng shulun

初等数论　（elementary number theory）　数论的一个分支。它以算术方法为主要的研究方法，而区别于数论的其他分支。公元前 6 世纪，古希腊数学家毕达哥拉斯就已研究过整数的可除性问题，例如，当时已经知道正整数中有奇数、偶数、素数、复合数等各种类型的数。并触及其他一些问题，例如对完全数和不定方程 $x^2+y^2=r^2$ 的整数解的探求等等。从此，算术由简单的计算而首先酿成初等数论的内容。公元前 4 世纪，古希腊数学家欧几里得证明了有无穷多个素数，给出了求两个正整数的最大公因数的算法，建立了初等数论中整数可除性的初步理论。到了公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图研究了若干简单的不定方程。在公元前后，中国古代《孙子算经》中提出的问题之一：“今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”即求同余式组 $x\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，$x\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$，$x\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$ 的解。《孙子算经》给出了上述问题适合 $0<x<105$ 的解答。求解一次同余式组的这种算法，就是著名的孙子定理，国际上称之为中国剩余定理。直到 18 世纪，这一定理在西欧才由德国数学家 C. F. 高斯给出。

17～19 世纪，P. de 费马、L. 欧拉、J.-L. 拉格朗日、A.-M. 勒让德以及高斯等人的工作大大发展和丰富了初等数论的内容。1640 年，费马提出一个他未给出证明的定理：如果 p 是素数，那么对于任何整数 a，a^p-a 都是 p 的倍数，即所谓费马小定理。欧拉于 1736 年首先证明，又于 1760 年，把它推广到复合数的情形。1772 年，拉格朗日证明了费马提出的又一个定理：每一个正整数都能够表成四个整数的平方和。1798 年勒让德的第一部数论教科书出版。1801 年，高斯著名的《算术研究》一书问世，他在书中证明了二次互反律、原根存在的充分必要条件等结果。这些工作奠定了初等数论的基本内容。二次互反律在数论发展史上起了重要的作用。

初等数论中某些问题的研究，促使形成新的数学分支。如对不定方程和高次互反律的研究，促进了代数数论和类域论的形成和发展。初等数论和数论其他分支一样，至今还有许多没有解决的困难问题。如是否存在奇完全数或无穷多个偶完全数，就是其中著名的问题。近几十年来，初等数论在计算机科学、组合数学、代数编码、密码学、计算方法、信号的数字处理等领域内得到广泛的应用。同时，许多新的问题不断出现，从而促进了初等数论的继续发展。初等数论的内容和方法已是研究近代数学和应用学科所不可缺少的工具。　　（孙　琦）

的可能性就很小，即大多数试验只使 $\frac{\nu_n}{n}$ 与 p 发生较小的偏离。这是历史上第一个严格说明频率稳定性的定律，称为伯努利大数律。大数律这个名称是 S.-D. 泊松于 1837 年给出的。大数律表明，对同一随机变量 X 的 n 次独立观察值 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的平均，将随 n 的增大而收敛于它的数学期望 EX。在数理统计中，就依据这一点而取多次重复观测的算术平均作为 EX 的较精确的估计。特别可以利用频率的稳定性来对事件的概率和随机变量的分布进行估计，还可以利用样本矩向总体矩的收敛，取样本矩作为总体矩的近似而获得参数估计的矩方法（见点估计）。

由于随机变量序列 $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 向常数的收敛可以有多种不同的方式，按其收敛为依概率收敛、以概率 1 收敛或均方收敛（见概率论中的收敛），分别有弱大数律、强大数律或均方大数律。弱大数律又通称为大数律。根据随机变量序列各种收敛之间的关系，由强大数律或均方大数律可以推出弱大数律。

大数律中最重要的一类是讨论独立试验序列的，常见的除了伯努利大数律外，还有下列著名的大数律：

辛钦大数律(1929)　若$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，$EX_n=\mu$ 存在有限，则对任何 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0。$$

波莱尔强大数律(1909)　设 ν_n 是 n 次独立重复试验中某事件 A 出现的次数，$P(A)=p$，则以概率 1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\nu_n}{n}=p$。É. 波莱尔最初只证明了 $p=\frac{1}{2}$ 的情形，以后才证明了对一般的 p 也有同样的结果。

柯尔莫哥洛夫强大数律　若$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，EX_n 存在，则以概率 1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}_n=\mu$。

大数律中涉及到的随机变量序列$\{X_n\}$也可以不是相互独立的。特别对于平稳序列，$\overline{X}$ 可看为序列按时间的平均，而$EX_n=\mu$是同一时刻不同样本的统计平均。这时，$\overline{X}_n\to\mu$ 表明 $\{X_n\}$ 随时间的增长遍历了它的各种可能状态，因而使"时间平均"向"统计平均"收敛。这又称为平稳序列的遍历性，它也是一种大数律。在平稳过程理论中，A. Я. 辛钦和 G. D. 伯克霍夫分别建立了 $\overline{X}_n$ 向 μ 均方收敛和以概率 1 收敛的遍历定理。

不仅有算术平均向常数收敛的大数律，更一般地，对随机变量序列$\{X_n\}$，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，若存在常数序列$\{a_n\}$及趋于无穷的$\{b_n\}$，当 $n\to\infty$ 时使 $Y_n=\frac{1}{b_n}S_n-a_n$ 依概率或以概率 1 收敛于零，则分别称 $\{Y_n\}$是依概率稳定或以概率 1 稳定的。这是大数律的一种推广形式。由于 Y_n 依概率收敛于零与 Y_n 的分布向集中于零的退化分布弱收敛是等价的，因此弱大数律就是讨论 Y_n 的分布向退化分布弱收敛的极限定理（见中心极限定理），可作为普遍极限定理的特例来处理。

切比雪夫不等式　若随机变量的数学期望、方差分别为 EX 及 var X，则对任何 $a>0$，成立 $P(|X-EX|\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a^2}\operatorname{var}X$。这一不等式是证明弱大数律的重要工具。它在 I.-J. 比安内梅 1853 年的论文中已有类似的表述，但直到 1867 年才由 П. Л. 切比雪夫明确叙述和论证。它对随机变量的分布并无特殊要求，仅利用X的方差来对X的取值与 EX 发生较大偏离的概率作出估计，因而有较广泛的适用性。它还有种种推广形式。若X为一随机变量，$f(x)$ 为一非负非降函数，则 $P(X\geqslant a)\leqslant\frac{Ef(X)}{f(a)}$，其中 $Ef(X)$ 表示 $f(X)$ 的数学期望。特别当 $f(x)=x^\lambda$，$x\geqslant0, \lambda>0$，则有 $P(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a^\lambda}E|X|^\lambda$。后者又称为马尔可夫不等式。

柯尔莫哥洛夫不等式　设$\{X_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$是相互独立的随机变量，它们的数学期望、方差分别为 $EX_k=0$，$\operatorname{var}X_k=\sigma_k^2$，又 $S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$，则对任何 $a>0$，成立下列不等式：

$$P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant a\Big)\leqslant\frac{1}{a^2}ES_n^2=\frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2。$$

若 X_k 还是有界的，即 $|X_k|\leqslant c$ 以概率 1 成立，则还有

$$P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant a\Big)\geqslant1-\frac{(c+a)^2}{ES_n^2}。$$

这两个不等式是由 A. H. 柯尔莫哥洛夫在 1928 年建立的，它是证明强大数律的重要工具。此外，利用前者可以推出，对独立的随机变量序列 $\{X_n\}$，若其方差级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{var}X_n<\infty$，则随机变量级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n-EX_n)$以概率 1 收敛；利用后者可以推出，若有界独立随机变量序列的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ 以概率 1 收敛，则其方差级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{vax}X_n$和均值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}EX_n$ 都是收敛的。

这一不等式也有各种不同形式的推广。例如下鞅的极值不等式：设 $\{Y_n\}$为一离散时间下鞅（见鞅），$a>0$，则有

$$P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}Y_k\geqslant a\Big)\leqslant\frac{1}{a}\int_{\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}Y_k\geqslant a\}}Y_n dP。$$

此外，若 $\{X_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 为相互独立的随机变量，$S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$，在不要求 X_k 存在数学期望与方差的情形，仍成立如下的莱维不等式：

$$P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m(S_k-S_n)|\geqslant a\Big)\leqslant2P(|S_n|\geqslant a),$$

式中 $m(S_k-S_n)$ 表示随机变量 S_k-S_n 的中位数（见概率分布）。这些不等式在证明随机变量序列以概率 1 收敛时，都有重要的应用。

波莱尔-坎泰利引理和 0-1 律　设$\{A_n, n\geqslant1\}$为一

它是基于统计量的渐近分布，且有关的统计特性只是近似而非精确的。在应用中，样本大小n总是一个有限数，这里就有一个近似程度如何的问题。如在对$N(\mu,\sigma^2)$中的μ作区间估计的例子中，指定的置信系数为0.95，按大样本理论作出区间估计$(\bar{X}_n-1.96S_n/\sqrt{n}, \bar{X}_n+1.96S_n/\sqrt{n})$，当$n\to\infty$时，其置信系数趋于0.95，但即使$n$很大，置信系数也只是接近而非确切等于0.95。为了在使用它时做到心中有数，需要在n固定的情况下，对真实的置信系数与其近似值0.95的差距作出有用的估计，在大样本方法的使用中，一般都存在此问题。但由于数学上的困难，目前使用的许多大样本方法中，通常很少有有效的误差估计，这是大样本方法的弱点。然而它仍有重要的理论和实际意义：它不仅提供了一批可供选用的统计方法，而且，经验证明，当一个统计方法不具备某些基本的大样本性质（如相合性）时，常常也很难有良好的小样本性质。评价一个统计方法的优良性时，大样本性质是不可忽视的。

相合性，是一项重要的大样本性质。一般地说，统计方法的相合性是指：只要样本大小n足够大，则使用这个统计方法时，可以用任意确切的程度回答所提出的统计推断问题。例如，估计的相合性是表示，当$n\to\infty$时，估计量在一定意义下，如依概率收敛或几乎必然收敛或以r阶平均收敛（见**概率论中的收敛**）于被估计值。检验的相合性是指它在任意指定的备择假设处的功效当$n\to\infty$时趋于1。相合性是最基本也是最容易满足的大样本性质。还有渐近无偏性、渐近有效性（见**点估计**）、和渐近正态性，或更一般地，渐近于某种特殊的极限分布的性质，也都是重要的大样本性质。

大样本统计的发展，依赖于概率论的极限理论，它在一定程度上已构成概率论极限理论的一个方面。1900年K.皮尔森证明了关于拟合优度的χ^2统计量的分布渐近于χ^2分布的著名定理，可以作为大样本理论的发端。更早一些，在概率论中就证明了关于二项分布渐近于正态分布的定理，这个定理也可用于大样本统计方法（求二项分布参数的大样本区间估计），但习惯上把这定理看作是纯粹概率论的定理。自1900年以后，特别是二次大战后的30多年中，大样本理论发展很快，达到了相当深入的地步，重要的结果有：关于拟合优度的χ^2检验渐近于χ^2分布的理论，最大似然估计及一般渐近有效估计的理论，似然比检验及一般渐近有效估计的理论，稳健估计大样本理论以及**非参数统计**中大量的大样本理论。现在，大样本理论在数理统计学中仍是一个活跃的研究方面。（见**假设检验**、**点估计**、**稳健统计**）

参考书目

J. Serfling, *Approximation Theorems in Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

（陈希孺）

daishu fangcheng

代数方程 (algebraic equation) 见**多项式**。

daishu hanshu

代数函数 (algebraic function) 由不可约方程

$$P(z,w)\equiv a_n(z)w^n+a_{n-1}(z)w^{n-1}+\cdots+a_0(z)=0 \quad (1)$$

确定的多值函数，式中$a_j(z)(j=0,1,\cdots,n)$是z的多项式。由(1)式和下列方程

$$\frac{\partial P(z,w)}{\partial w}\equiv na_n(z)w^{n-1}+(n-1)a_{n-1}(z)w^{n-2}+\cdots+a_1(z)=0, \quad (2)$$

消去w得到的判别式$D(z)$是z的非恒为零的多项式。若z_0不是$D(z)$的零点，则$P(z_0,w)=0$恰有n个判别的根w_j $(j=1,2,\cdots,n)$。若再设z_0不是$a_n(z)$之零点，则由隐函数定理知，存在n个判别的正则函数元素$(w_j(z), B(z_0))$ $(j=1,2,\cdots,n)$属于方程(1)，即在以z_0为心的某个圆$B(z_0)$内满足$P(z, w_j(z))=0$，且$w_j(z_0)=w_j(j=1,2,\cdots,n)$。若$z_0$是$D(z)$之零点，则$P(z_0,w)=0$有重根$w_k$，设其重级为$\lambda_k$，且$\sum_{k=1}^{l}\lambda_k=n$。此时在$z_0$点穿洞的小圆$\dot{B}(z_0)$上$n$个函数元素能分为$l$个循环$(w_{j_k}(z), B(z_0))$ $(j_k=1,2,\cdots,\lambda_k, k=1,2,\cdots,l)$并且当沿着在$\dot{B}(z_0)$中的曲线围绕$z_0$开拓时，同一循环中的函数元素互相置换。设由$w_1(z)$在$\dot{B}(z_0)$中开拓所得之多值函数为$w_\lambda(z)$，则它可表为某个圆$B(z_0)$内收敛的分数幂级数$w_\lambda(z)=w_1+b_\tau(z-z_0)^{\tau/\lambda}+\cdots$，此时$(w_\lambda(z), B(z_0))$是属于方程(1)的代数函数元素。当$z_0=\infty$时，以$\zeta=1/z$代之，若$w_1=\infty$，则以$u=1/w$代之。再者由属于不可约方程(1)的任一函数元素（正则的或代数的）出发可以用解析开拓方法来联接整个函数，即属于方程(1)的函数元素经解析开拓所得的函数元素仍属于方程(1)，并且任两个属于方程(1)的函数元素能经解析开拓互相得到。因此代数函数是在扩充的复平面$\hat{C}=C\cup\{\infty\}$上仅具有有限多个代数分支点和极点的完全解析函数。反之，具有上述特征的完全解析函数，且对于一固定点z_0，仅具有有限个以z_0为中心的函数元素者，满足一不可约代数方程，且除去一个非零的常数因子外，此方程是唯一的。

应用B.黎曼的方法可以构造一个新的曲面以代替z平面，使得在此曲面上代数函数为通常的单值函数，这个曲面即是**黎曼曲面**。相应于代数函数的黎曼曲面是紧的，曲面的亏格即定义为代数函数的亏格。例如，超椭圆曲线$w^2=P(z)$的亏格$p=\left[\frac{m-1}{2}\right]$，其中$P(z)$是$z$的$m$次多项式，$[a]$表示$a$的整数部分。

由方程(1)联系着的z和w的有理函数$R(z,w)$之积分

$$\int R(z,w)\mathrm{d}z$$

称为阿贝尔积分。对于这个积分有一系列标准形式，使得任一这类型的积分能通过适当的变数变换变为其中一个标准形式。这个积分是一多值函数，其多值性不仅产生于R的留数和$w(z)$的多值性，而且还依赖于相应的黎曼

代数得以脱离算术的束缚。

德·摩根在分析学方面给出了形如$\Sigma\frac{1}{\varphi(n)}$的级数的收敛性判别准则,即设

$$e=\lim_{n\to\infty}\frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)},$$

则当$e>1$时,级数收敛,当$e\leqslant 1$时,级数发散。

在逻辑学方面,德·摩根首创了关系逻辑的研究。他提出了论域概念,并用代数方法来研究逻辑演算,建立了著名的德·摩根律,即

$$(A\cap B)'=A'\cup B',\quad (A\cup B)'=A'\cap B'。$$

他还分析了关系的种类和性质,研究了关系命题和关系推理,得到了一些逻辑规律和定理,从而突破了古典的主谓词逻辑的局限性,这对其后数理逻辑的发展有一定的影响。

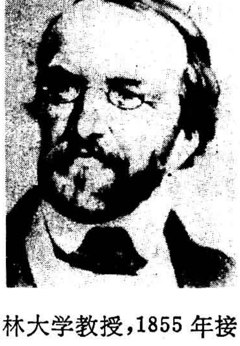
德·摩根撰写了不少算术、代数、三角等方面的教材,他在分析学和逻辑学方面的主要著作有《微积分学》(1842)、《形式逻辑》(1847)等。　　(徐云从)

Dezhage

德扎格,G. (Gérard Desargues 1593～1662) 法国数学家,射影几何学创建者之一。1593年3月20日生于法国里昂,1662年10月卒于同地。曾任军事工程师和建筑师。1630年左右,在巴黎与M.梅森、R.笛卡儿等数学家交往。1636年他的《论透视截线》小册子出版,对透视问题开始有所论述。他最重要的著作是《试图处理圆锥与平面相交情况初稿》,1639年在巴黎出版。里面有许多从植物学借用来的奇怪术语,使人不易理解,加上当时新兴的解析几何具有更大的吸引力,这书后来竟被忘却甚至遗失。直到1845年M.沙勒偶然发现这书的手抄本,才引起人们的普遍重视,把它列为近世纯粹几何学的经典著作。书中引入无穷元素,讨论极点和极线、透射、透视,奠定了射影几何的基础。他所发现的德扎格定理(两三角形对应顶点联线共点,则对应边交点共线)是射影几何的基本定理。　　(梁宗巨)

Dilikelei

狄利克雷,P.G.L. (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805～1859) 德国数学家。对数论、数学分析和数学物理有突出贡献,是解析数论的创始人之一。



1805年2月13日生于德国迪伦,1859年5月5日卒于格丁根。中学时曾受教于物理学家G.S.欧姆;1822～1826年在巴黎求学,深受J.-B.-J.傅里叶的影响。回国后先后在布雷斯劳大学、柏林军事学院和柏林大学任教27年,对德国数学发展产生巨大影响。1839年任柏林大学教授,1855年接任C.F.高斯在格丁根大学的教授职位。

在分析学方面,他是最早倡导严格化方法的数学家之一。1829年,得到给定函数$f(x)$的傅里叶级数收敛的第一个充分条件,办法是研究该级数前n项的和与$f(x)$差的极限性质,后成为一种经典方法。1837年,放弃当时普遍接受的关于函数是用数学符号和运算组成的表达式的观念,提出$y=f(x)$是x与y之间的一种对应的现代观点。同年,证明改变绝对收敛级数中项的次序,不影响级数的和;并举例说明条件收敛级数不具备这种性质。

在数论方面,他是高斯思想的传播者和拓广者。高斯划时代的著作《算术研究》艰深难懂,狄利克雷撰写了《数论讲义》(1863),对之作了明晰的解释并有创见,使高斯的思想得以广泛传播。1837年,他在证明每一个算术序列$\{a+nb\}$(式中a和b互素)包含无穷多个素数时使用了级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-z}$,式中$a_n$、$z$是复数,即现称的狄利克雷级数。这是解析数论的第一篇重要论文。1838～1839年,他得到确定二次型类数的公式。1846年,使用抽屉原理(如在n个抽屉里分放数目大于n的物件,则至少有一个抽屉里的物件数大于1),阐明代数数域中单位数的阿贝尔群的结构。

在数学物理方面,他对椭球体产生的引力、球在不可压缩流体中的运动、由太阳系稳定性导出的一般稳定性等课题都有重要论著。1850年发表了有关位势理论的文章,论及著名的第一边界值问题,现称狄利克雷问题。

狄利克雷的主要论文由L.克罗内克和I.L.富克斯收在《狄利克雷论文集》(1889～1897)中。

(袁向东)

Dilikelei jishu

狄利克雷级数 (Dirichlet series) 又称指数级数,即形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

的级数,简记为$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$,式中$a_n$是复常数;$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty$;$s=\sigma+it$;$\sigma$及$t$是实变数。若(1)收敛,则记其和为$f(s)$。当$\lambda_n=n$时,级数(1)是$e^{-s}$的幂级数,其性质可由幂级数的性质推出,由此启示人们研究一般指数级数的性质。当$\lambda_n=\ln n$时,级数(1)成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$,这是P.G.L.狄利克雷在解析数论中引用的重要级数;在$a_n=1$的最简单的情形,它称为黎曼ζ函数。此外,把狄利克雷级数推广到积分的情形就是拉普拉斯变换,因此两者有很多类似之处。

收敛性 对一般指数级数有阿贝尔型的定理:设级数(1)在一点s_0收敛,则它在任何角域$|\arg(s-s_0)|\leqslant\gamma(<\pi/2)$中一致收敛。这样,如级数(1)在一点$s_0=\sigma_0+it_0$收敛(绝对收敛),则它在任何点$s=\sigma+it(\sigma>\sigma_0)$收敛(绝对收敛)。于是级数(1)属于下列三种情况之一:①存在着有限数$\sigma_c(\sigma_a)$,级数在半平面$\sigma>\sigma_c(\sigma>\sigma_a)$内收敛(绝

$f(2)$，…，从而得出递归可枚举集的所有元素。这便是递归可枚举集名称的来源。$f(x)$叫做该集的枚举函数，可能有两值$f(a)$与$f(b)$是相等的，即容许重复枚举。如果$f(x)$是不减函数或(严格)递增函数，便叫做不减枚举或(严格)递增枚举。

显然，如果x在一个递归可枚举集A内，必可在有限步内判定(只须依次计算$f(0)$，$f(1)$，…，便可)；但如果x不在A内，而A又不是严格递增枚举，则很可能人们永远也不知道这事。根据上述部分递归集的特性，可知递归可枚举集都是部分递归集。反之，如果A为部分递归集，命其特征部分函数为$a(x)$，当A为空集时，它当然不是任何递归全函数的值域，当A非空集时，则在第一阶段对$a(0)$，$a(1)$各计算1步，第二阶段对$a(0)$，$a(1)$，$a(2)$各计算2步，…，第n阶段对$a(0)$，$a(1)$，$a(2)$，…，$a(n)$各计算n步，…，并把首先出现的$a(x)=0$的根取为$f(0)$，以后在每一阶段之末均把在该阶段时所已知的$a(x)=0$的根取为f在新主目处的值，f必为递归全函数，而且A的元素恰巧便是$f(0)$，$f(1)$，…的值。可见非空的部分递归集必是递归可枚举集。一般还把空集也算作递归可枚举集，这样两种集便一致起来了。

可以证明，A为递归可枚举集当且仅当它是某个原始递归函数的值域，又当且仅当它是某个初等函数的值域。另一方面，A为递归可枚举当且仅当它是某个递归部分函数的值域，只须仿照上法，在第n阶段计算$f(0)$，$f(1)$，…，$f(n)$各n步，便可把递归部分函数的值全部都枚举出来了。

已有办法把全体递归部分函数全部枚举起来，因此也可以把它们的定义域或值域全部枚举起来。设把第x个递归部分函数的定义域(值域)记为W_x，则W_x便是全体部分递归集(递归可枚举集)的枚举(注意其中是有重复的)。如命$K=\{x:x\in W_x\}$(即如果x恰巧在第x个部分递归集之内，便把x作为K的元素)，则K是一个递归可枚举集但不是递归集，从而K的补集既不是递归集又不是递归可枚举集。这是人们作出的第一个不是递归可枚举集的例子，它也是一个很重要的集，对它已有充分的研究。

此外，如果f为递归部分函数，A为递归可枚举，则$f^{-1}(A)$也是递归可枚举集。

著名的希尔伯特第10问题是：有没有一个能行方法，可决定任给的一个不定方程$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)=Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是否有整数解?这里$P$、$Q$是两个具有整系数的多项式。这个问题到1970年已经被否定地解决了，即如果把"能行方法"理解为"用计算递归全函数的方法"，那末可以证明：这个能行方法是没有的。因为任何一个部分递归集(递归可枚举集)A，都有两个带整系数的多项式P、Q，使得

$$x\in A\leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n (P(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = Q(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)),$$

特别是当A即集合K时，也可找出相应的两个多项式P、Q。既然K不是递归的，x属于K与否是不能递归地判定的，那末对于"什么样的x能够使$P(x, y_1, \cdots, y_n)=Q(x, y_1, \cdots, y_n)$有解"的问题，也就不能递归地判定了。

上面关于集合的讨论可以推广到n元关系去。就n元关系$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$而言，如果$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$成立当且仅当$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$，则$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$叫做$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的特征部分函数，如果还要求：$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$不成立当且仅当$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=1$，则$f$叫做$R$的特征全函数，简称特征函数。如果关系$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的特征部分函数(也是特征函数)是一个递归全函数，则R叫做递归关系；如果$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的特征部分函数是递归部分函数，则R叫做部分递归关系。有了这些定义以后，以上的讨论完全可以推广到递归关系与部分递归关系方面来。当然，由于函数的值是一个数而不是n元向量，所以"递归可枚举关系"不能定义为某个递归全函数的值域而只能定义为部分递归关系。

但是对递归关系而论，有下列的结果，这是讨论递归时所没有的。

① $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为部分递归关系当且仅当有一个$n+1$元递归关系或部分递归关系W使得$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)\leftrightarrow \exists x_0 W(x_0, x_1, \cdots, x_n)$。

② $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为部分递归关系当且仅当有一个$n+m$元递归或部分递归关系W使得$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)\leftrightarrow \exists t_1 \exists t_2 \cdots \exists t_m W(t_1, t_2, \cdots, t_m, x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

③ A为部分递归集当且仅当有一个二元递归或部分递归关系W使得$x\in A\leftrightarrow \exists y W(x, y)$。

(莫绍揆)

diguilun

递归论 (recursion theory)　数理逻辑的一个分支，研究问题类是否存在解的算法；如果不存在，那么不可解的程度如何。

在古代中国、希腊就有了算法概念，并且给出了算法的例子。后来古阿拉伯、古印度的人们也着手寻求算法。中世纪阿拉伯数学家花拉子米(al-Khowarizmi)在算法的研究上有突出贡献，因此现在英文的算法一词algorithm就是由他的名字得来的。

16世纪，代数里已出现了大量算法，人们希望在其他领域也能找到算法。为了得到用代数工具描述的几何证明的算法，R.笛卡儿创造了坐标系。为了得到判定一切科学命题，起码是一切数学命题真假的算法，G.W.莱布尼茨创造了数理逻辑。

但是有些问题经过了长时期的研究，还是找不到解决它们的算法。例如希尔伯特第10问题，半群上字的问题，谓词演算中的任一闭合式公式是否为一定理的问题，等等。因此人们怀疑是否这些问题找不到解决它们的算法。为了证明解决这些问题的算法不存在，这就要求把算法概念予以精确化，使其能作为数学对象来处理。但是过去数学家对算法只有朴素的直观概念，并无精确的数学定义，因此产生了建立算法的精确数学定义的问题。20

计。在一般条件下，最大似然估计是BAN估计。

渐近有效估计 当样本大小为n时，C-R不等式的右边(即C-R下界)就是$v^2(\theta)/n$。在BAN估计定义中，并未要求估计量$\hat{g}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的方差存在，如果去掉渐近正态性的要求，而要求$\hat{g}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的方差存在且渐近于C-R下界，则得到克拉默于1946年定义的渐近有效估计的概念。不少情况下，BAN估计也是渐近有效估计。1960年印度统计学家R.R.巴哈杜尔提出另一种渐近有效性的概念，还可以用于假设检验问题。近年来，日本统计学家竹内啓又在两个方面发展了估计的渐近有效性概念：一是渐近分布不必是正态分布；二是收敛于渐近分布的阶不必是$1/\sqrt{n}$。

点估计理论是数理统计学得到较多和较深入发展的一个方面。在小样本方面，1955年C.施坦提出了一个反例，证明当维数大于2时，多维正态分布均值向量的通常估计(样本均值)在平方损失下不可容许。这个简单的但出乎意料的反例启发了关于点估计的容许性的一系列研究。在大样本方面，值得提到的发展还有自适应估计、稳健估计及非参数估计方面许多深入的结果。

参考书目

H.克拉默著，魏宗舒等译：《统计学数学方法》，上海科学技术出版社，上海，1966。(H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.)

成平等著：《参数估计》，上海科学技术出版社，上海，1985。

(成 平)

dianguocheng

点过程 (point process) 描述随机点分布的随机过程。很多随机现象发生的时刻、地点、状态等往往可以用某一空间上的点来表示。例如，服务台前顾客的到来时刻，真空管阴极电子的发射时刻，可表为实轴上的点。又如，天空中某一区域内星体的分布，核医疗中放射性示踪物质在人体器官的各处出现，不同能级地震的发生，都可用二维以上空间的点表示。点过程就是描述这类现象的理想化的数学模型。它在随机服务系统、交通运输、物理学和地球物理学、生态学、神经生理学、传染病学、信息传输、核医疗学等很多方面都有应用。

20世纪60年代以前，点过程的研究着重于一维情形，即实轴上的点过程，方法是比较初等的，内容多为考虑泊松过程的种种推广。以后逐渐扩充到多维及更一般的空间，并与迅速发展的随机测度论及鞅论相结合，无论在内容或方法方面都有了根本性的进展。

一维点过程 在点过程的研究中，一维点过程在理论与应用上都占有重要的位置，它的统计规律可以通过三种不同的方式来描述：①点数性质：设$N[s,t)$表示落在区间$[s,t)$上随机点的数目，$N(A)$表示落在集合A上随机点的数目，令$\mathscr{B}$表示实轴上的波莱尔域(见概率分布)，则$(N(A),A\in\mathscr{B})$是定义在$\mathscr{B}$上的随机测度，这时它只取非负整数值，称为随机计数测度。若把开始观测的时刻记为t_0，则$\{N_t=N[t_0,t),t\geqslant t_0\}$是一随机过程，称为计数过程。它的概率分布就可以刻画一维点过程。②间距性质：设随机点依次出现的时刻为$T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots$，取$T_0=t_0$，$\tau_n=T_n-T_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，它们是相邻两随机点的时间间距，于是$\{\tau_n\}$是一非负随机变量序列。它的概率分布也可用来刻画一维点过程。若$\{\tau_n\}$相互独立且同分布，则点过程称为更新过程。③平均发生率与发生强度：单位时间(或距离)内随机点的平均出现次数称为平均发生率。确切地说，t时的平均发生率为$\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{EN[t,t+\delta)}{\delta}$。更本质的概念是发生强度。设$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant t_0\}$为一给定的非降$\sigma$域族，$\mathscr{F}_t$可以理解为到$t$时为止过程的历史或某种外部随机因素所产生的事件全体。发生强度一般可定义为$\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{P(N[t,t+\delta)>0\mid\mathscr{F}_t)}{\delta}$，它不一定存在，如果存在，可能是常数，也可能是$t$的函数，也可能是一随机过程。如果是一随机过程，则它可能依赖于点过程过去的历史(称为自激点过程)，也可能依赖于外部的随机因素(称为重随机点过程)。对于泊松过程，平均发生率与发生强度是一致的。

一般点过程的数学模型 设E为可分完备距离空间(它是普通实空间的推广，见度量空间)，$\mathscr{E}$为E上由全体开集产生的σ域。$\mathscr{B}\subset\mathscr{E}$是全体有界可测集。$\mu$为定义于$(E,\mathscr{E})$上的测度，如果当$B\in\mathscr{B}$时有$\mu(B)<\infty$，则称$\mu$为局部有限测度；如果$\mu$恒取非负整数值或$\infty$，则称$\mu$为计数测度。以$\mathscr{N}$表示全体局部有限计数测度(局部有限性反映事件的发生不是稠密的)。当$a=0,1,2,\cdots,B\in\mathscr{B}$时，一切形如$\{\mu:\mu\in\mathscr{N},\mu(B)\leqslant a\}$的$\mathscr{N}$的子集产生的$\sigma$域记作$\mathbf{N}$。从概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(\mathscr{N},\mathbf{N})$的任一可测映像$\xi$，称为$(E,\mathscr{E})$上的点过程。每一$\omega$对应一计数测度$\xi(\omega,\cdot)\in\mathscr{N}$，而对每一$A\in\mathscr{E}$，$\xi(\cdot,A)$为整值随机变量。概率测度$P$通过映像$\xi$诱导出一$(\mathscr{N},\mathbf{N})$上的一个概率测度$P_\xi$：$P_\xi(C)=P(\{\omega:\xi(\omega,\cdot)\in C\})$，$C\in\mathbf{N}$，它就是点过程$\xi$的概率分布。对于点过程，也有相当于一般随机过程的柯尔莫哥洛夫存在定理。

简单性、有序性和无后效性 局部有限计数测度μ称为简单的，如果对每一$x\in E$有$\mu(\{x\})\leqslant1$，以$\mathscr{N}_s$表其全体。点过程ξ称为简单的，P_ξ(如果$\mathscr{N}_s$)$=1$；称为有序的，如果对任一$\varepsilon>0$，存在E的分割：$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=E,A_i\in\mathscr{B}$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，使$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_\xi(\{\mu:\mu(A_i)>1\})<\varepsilon$。从有序性可以推出简单性，而对相当广泛的一类点过程二者等价。如果对任何正整数k，任何非负整数$l_1,l_2,\cdots,l_k$以及任何两两不交集$A_1,A_2,\cdots,A_k\in\mathscr{B}$，有$P_\xi(\{\mu:\mu(A_1)=l_1,l_2,\cdots,\mu(A_k)=l_k\})=\prod\limits_{i=1}^{k}P_\xi(\{\mu:\mu(A_i)=l_i\})$，则$\xi$称为无后效的。对于一维情形，无后效性等价于独立增量性。特别，泊松过程是有序的无后效点过程。

点过程的变换 点过程经不同的变换，可以产生新的点过程或随机测度。主要的有：①一维点过程时间轴

重要的。这类矩阵还有一些重要性质，例如，若矩阵A是严格对角优势或不可约弱对角优势的，则A是非奇异的；若A还是埃尔米特矩阵，且对角元皆为正数，则A是正定的。又如用直接法或迭代法解系数矩阵为对角优势矩阵的线性代数方程组时，可以保证算法的稳定性或收敛性。

参考书目

R. S. 瓦格著，蒋尔雄等译：《矩阵迭代分析》，上海科学技术出版社，上海，1966。(R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.)

D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.

（匡蛟勋）

duikang moni

对抗模拟 (war gaming simulation) 研究作战和对抗过程的仿真实验，即对于一个在特定冲突态势下的对抗过程，根据预定的规则、步骤和数据加以模仿复现，以取得统计结果，为决策者选择合理方案提供实用的建议。它起源于18世纪末普鲁士军队中的兵棋游戏，后来经过改进和完善，发展成为沙盘演习。19世纪下半叶，世界各国军队普遍采用它作为军官战术训练和研究作战方法的重要手段。模拟作战指挥的一般方法如下：扮演红、蓝两方的指挥员及参谋人员在标志有地形、地貌和适当比例尺的沙盘或地(海)图上，根据事先给定的任务和情况，设想以及导演仲裁人员的指导，利用各种代表兵力、兵器或军舰、飞机并涂有颜色的小模型来部置兵力、分析战况、制定决心计划，且以适当的通知方式请示报告和下达命令、指示等。导演仲裁人员通常同时扮演双方上级领导及下级部队，且负责整个模拟过程的时间控制、推演指导、评定每次作战行动中双方胜败和伤亡结局以及情况通报等。在传统的作战模拟中，一切推理判断、数学计算，图像显示都是手工或机械辅助的，20世纪50年代以来，则逐步由电子计算机辅助所代替。

1951～1959年美国约翰·霍普金大学的R. E. 齐默尔曼等人首次研究成功了“CARMONETTE-I”模型。这是描述营级坦克战的计算机化对抗模拟。以后，经过不断的扩充、修改，先后建立了2～6版模型。这门技术在一些国家中已经发展成相当规模，如美国就有战略的、陆海空军的、联合军兵种的、后勤的以及电子战等方面的模型，在70年代后期至少有一百几十种之多。

对抗模拟主要用于发现武器系统的缺陷，评价作战方案，检验某些新概念在不同的紧急情况下的可能效果、参量的灵敏度分析，为更高一级的或解析的模型提供数据、训练指挥人员、实兵演习的预演等。按其目的可分为教育训练的和分析研究的；按其规模可分为战略的、战役的和战术的；按模拟中人机结合程度可分为有人干预的和无人干预的；按结局判定方法可分为严格的(即由数学方法计算的)和经验的；按所模拟的行动性质可分为确定型的和随机型的。

无人干预的战术模拟通常可表述如下：假设甲、乙两方分别拥有兵力(兵器)类集$i\in\{1,2,\cdots,I\}$和$j\in\{1,2,\cdots,J\}$。每一兵力在任一时刻的状态，由生存状态、空间状态和行动状态组成，其中首要的是生存性，令甲方第i类兵力和乙方第j类兵力的现存数分别为非负整数$U_i(t)$和$V_j(t)$。其次是由双方互相跟踪、开始或停止射击、搜索和规避等组成的行动状态，甲方记为$A_i(t)$，乙方记为$B_j(t)$。每一现存兵力还伴随有一定的空间状态，由位置坐标、航速、航向等组成，甲方记为$W_i(t)$，乙方记为$Z_j(t)$。上述各种状态在$t=0$时初始值都是给定的。模拟从初始状态出发，在包括诸如运动、观察、火力运用等三种决策规则集$\{R_M,R_S,R_F\}$的控制下按时间向前推演。由于每一方的决策随时影响着另一方的决策，所以一般采用固定时间步长Δt的推演。每种决策控制一组几何的、代数的、概率的、方程的或逻辑的解算，使每一方的现在状态转移为新的状态。运动规则R_M(包括引导占位、迂回规避的运动方程、运动误差等的计算)对空间状态W_i或Z_j起作用；观察规则R_S(包括观察方式、发现目标判定、空间状态测量等计算)对行动状态A_i或B_j起作用；火力规则R_F(包括目标威胁估计、武器分配、射击效果判定等计算)对生存状态U_i或V_j以及其他有关状态起作用。模拟过程可归结为如下的递推公式：

$$U_i(t+\Delta t)=U_i(t)-\alpha\Delta t,\quad V_j(t+\Delta t)=V_j(t)-\beta\Delta t,$$
$$W_i(t+\Delta t)=W_i(t)+\lambda\Delta t,\quad Z_j(t+\Delta t)=Z_j(t)+\mu\Delta t,$$

这里α、β及λ、μ分别表示甲、乙两方在时刻t的对抗状态，因受决策规则集$\{R_M,R_S,R_F\}$的作用而引起的单位时间内消灭数和空间状态增量。每次模拟到时刻T，如果下列终止条件之一成立，即

① 某种现存兵力少于规定限额，即有某个i,$U_i(T)\leqslant\gamma_i$；或者有某个j,$V_j(T)\leqslant\delta_j$，其中γ_i,δ_j是给定的非负整数；

② 甲方或乙方的所有现存兵力的空间状态进入了规定的终止对抗区域W_i^*或Z_j^*，即对于所有满足$U_i(T)\neq0$的i，$W_i(T)\in W_i^*$；或对于所有满足$V_j(T)\neq0$的j，$Z_j(T)\in Z_j^*$；

③ 模拟时间T超过规定值T^*，即$T\geqslant T^*$，则模拟推演结束，且转入数据处理；否则将模拟时刻T增加一时间步长ΔT到新的模拟时刻T再返回上列递推式算出新状态，依此推演直到一终止条件成立为止。由于双方的武器射击、发现目标的结果以及空间状态误差等因素是随机的，因此，各种状态U_i、V_j、W_i、Z_j和模拟时刻T等皆属随机变量，模拟过程属随机过程。根据数理统计方法和规定的置信度要求，可合理地确定模拟的总次数。由于模拟中使用的许多常数往往是假定的，故模拟所得结果的解是近似预测性的。

参考书目

R. L. Ackoff, ed., *Progress in Operations Research*, John Wiley & Sons, New York, 1961.

P. W. Zehna, at al., *Selected Methods and Maclels in Military Operations Research*, U. S. Naval Poslgraduale School, Monterey, California, 1972.

（凌如镛）

中的任何紧子集K,集合$\hat{K}=\{z\in\Omega \mid |f(z)|\leqslant\sup_K|f|,\forall\Omega$上的全纯函数$f\}$也是$\Omega$中的紧子集。这种性质称为全纯凸性。嘉当-苏伦定理是用全纯凸来刻画全纯域,但更自然的是能给出域的几何刻画。进一步的研究表明，域的全纯性和它的某种凸性有关，在这点上，通常的欧氏空间中的凸域具有一定的借鉴作用。欧氏空间R^n中的凸域(一域称为凸的,如果连接其中任何两点的线段也整个在该域之中),其充要条件是该域上存在一个二阶连续可微的函数u,满足：当$x\to$域的边界时，$u(x)\to\infty$；并且对任何实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,有$\sum\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\lambda_i\lambda_j\geqslant0$。以此为背景，哈托格斯与列维引进了拟凸域的概念。为了说明这一概念,称定义于Ω上的二阶连续可微的函数$u(z)$是穷竭的,如果当$z\to$边界时，$u(z)\to\infty$；$u(z)$是多重次调和的,如果对于任何复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,它在$\Omega$中任意点都满足$\sum\frac{\partial^2u(z)}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\lambda_i\bar{\lambda}_j\geqslant0$。于是有定义：具有穷竭的多重次调和函数的域,称为拟凸域。

根据嘉当-苏伦定理,不难证明全纯域是拟凸域。困难的、长期未决的是其反面：拟凸域是否一定是全纯域?这就是所谓列维问题。列维问题的肯定性解答当$n=2$时由岡潔最先给出(1942),其一般情况分别由岡潔、伯格曼和F.诺盖独立证明(1953～1954)。列维问题的解决引出了大量的,至今仍很活跃的推广性研究。其中,最具重要性的是格劳尔特的工作。它涉及的是对复流形而言的列维问题。全纯域在复流形中的类似概念称为施泰因流形。简单地说,施泰因流形是这样的复流形:它是全纯凸的，它上面具有足够多的全纯函数以致可以区别不同的点,并给出每一点的局部坐标。于是,对复流形而言的列维问题就变成了:什么样的复流形是施泰因流形?格劳尔特对此的回答(1958)是:容许光滑的、穷竭的强多次调和函数存在的复流形是施泰因流形。

解决列维问题的另一种方法是$\bar\partial$算子的L^2估计,它在60年代中期得到了迅速的发展。事实上,包括列维问题在内的许多函数论问题，如下面要提到的库辛问题与龙格型定理及复向量丛上的嘉当定理等，都可以化归为$\bar\partial$问题：证明一般的（即可能是非齐次的）柯西-黎曼方程$\bar\partial u=\alpha$(满足条件$\bar\partial\alpha=0$)解的存在性与正则性。从一般的柯西-黎曼方程，自然地得出由（p, q)微分形式的希尔伯特空间到（$p,q+1$）微分形式的希尔伯特空间的微分算子,即$\bar\partial$算子。它及它的共轭算子$\bar\partial^*$都是线性的稠定的闭算子。1950年，D.C.斯潘塞在企图将霍奇理论推广到开流形时,首先提出了著名的$\bar\partial$-纽曼问题:证明方程$(\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial)\varphi=\alpha$的解的存在性与正则性。这是研究$\bar\partial$问题十分有效的手段。因为若加上条件$\bar\partial\alpha=0$,在知道了这个方程的解$\varphi$以后,就可以将$\bar\partial$问题的解表示成$u=\bar\partial^*\varphi$。通过一系列先验估计，J. J.科恩从1963年开始,对于几类重要的拟凸流形,特别是强拟凸流形，彻底解决了$\bar\partial$-纽曼问题。1965年，L.赫尔曼德尔在微分形式的希尔伯特空间引入权函数来直接研究$\bar\partial$问题,取得了很大成功。权函数的引入避开了$\bar\partial$-纽曼问题中处理解的边界正则性的难点，使得对于一般的施泰因流形直接得到了内部存在性与正则性。因此在某种意义上,它比$\bar\partial$-纽曼问题更适于多复变函数论的应用。同时,$\bar\partial$算子理论的发展,不仅为复流形，特别是施泰因流形的研究提供了强有力的工具，而且促进了拟微分算子理论的诞生及超定微分方程等分支的发展。

库辛问题与龙格型定理　推动多复变函数论发展的内在逻辑之一是寻求单复变函数论中的哪些基本事实可以推广到多复变中来。还在多复变发展的早期，法国数学家库辛就提出了单复变中两个经典定理（外尔斯特拉斯定理和米塔-列夫勒定理)如何推广的问题，这就是库辛问题。单复变中的外尔斯特拉斯定理是说,对C中域Ω而言,永远存在这样的全纯函数，它以指定的点集(当然假定是离散的)为自己的零点集,并且重数等于指定的重数。米塔-列夫勒定理说,对C中域Ω而言，永远存在这样的亚纯函数,它以指定的点集为自己的极点集,并且重数等于指定的重数。为了说明库辛问题，先解释什么是多复变的亚纯函数。定义于区域中的复值函数如果它在任何点的局部都可以表为两个全纯函数之商并且分母不恒为零,这样的函数称为亚纯函数。库辛第一问题：$\{U_\alpha\}$是区域Ω的一组开集覆盖，对每一α，有一定义于U_α的亚纯函数f_α满足,当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时,$f_\alpha-f_\beta$是$U_\alpha\cap U_\beta$上的全纯函数(换言之，$f_\alpha$和$f_\beta$在定义域相交的部分有相同的极点)。是否存在整个定义于Ω的亚纯函数f，使对每一α,$f-f_\alpha$在U_α上是全纯的?库辛第二问题:设$\{U_\alpha\}$是域Ω的开集覆盖。如果对每一U_α，有一定义于其中的全纯函数f_α满足,如$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，$\frac{f_\alpha}{f_\beta}$是$U_\alpha\cap U_\beta$上不取零值的全纯函数(即$f_\alpha$和$f_\beta$在定义域相交的部分有相同的零点)。是否存在一个整体定义于Ω的全纯函数f,使对每一α，f/f_α在U_α上为一不取零值的全纯函数？对库辛问题的解决作出最主要贡献的是岡潔。它们的解决一方面与全纯域的理论有关，一方面与层及层的上同调理论有关。岡潔对库辛问题的解答如下:如果Ω是全纯域,库辛第一问题是永远可解的。但即使是全纯域，库辛第二问题并不一定永远可解，它的可解性还依赖于一定的拓扑条件。其可解的一个充分必要条件是,它在连续函数的范畴内可解，即如果能找到一个定义于Ω的连续函数g，使对每一α，$\frac{g}{f_\alpha}$在U_α上为一不取零值的连续函数。上述对库辛问题的解答揭示了一个在多复变研究中具有指导性的哲理：许多涉及全纯性范畴的问题的可解性常常依赖于连续性范畴的相应问题的可解性，虽然这并不是业已证明的原理,但却是经常有效的。

龙格型定理研究的是全纯函数的逼近。单复变中最简单的龙格定理如下:如K是复平面C中一个有界闭集，f是一定义于K的某邻域的全纯函数，那么f一定可以用

建立了一些关于有效解和弱有效解的判别准则。在多目标规划的研究中，目标空间并不限于欧氏空间 R^m，例如，目标函数是表示一国经济增长的一个动态模型的所有轨线，则目标空间就是一个希尔伯特空间。目前，目标空间是抽象的巴拿赫空间或希尔伯特空间的情形，已有不少研究。

一个与多目标问题（VMP）相关联的单目标问题

$$(\mathrm{P}_\lambda)\qquad \min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$$

是引人重视的，其中 λ_i 叫做权系数，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 叫做权向量。通常要求权系数满足 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ 或 $\|\lambda\|=1$（依 R^m 中任意选定的模）使之规范化。记 $\Lambda=\{\lambda\in R^m\mid\forall\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\}$，$\Lambda^+=\{\lambda\in R^m\mid\forall\lambda_i>0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\}$，则有以下的基本定理：

设 $\tilde{x}\in X$ 是（P_λ）的最优解，$\lambda\in\Lambda$，则 $\tilde{x}$ 是（VMP）的弱有效解；若 X 是凸集，$f(x)$ 是 X 上的凸函数，且 $\tilde{x}$ 是（VMP）的弱有效解，则存在某一 $\lambda\in\Lambda$ 使 $\tilde{x}$ 是（P_λ）的最优解。若 $\lambda\in\Lambda^+$，$\tilde{x}$ 是（P_λ）的最优解，则 $\tilde{x}$ 是（VMP）的真有效解；若 X 是凸集，$f(x)$ 是 X 上的凸函数，且 $\tilde{x}$ 是（VMP）的真有效解，则存在某一 $\lambda\in\Lambda^+$ 使 $\tilde{x}$ 是（P_λ）的最优解。

通过带权系数的问题（P_λ），可以把非线性规划的许多结果移置到多目标规划中来。权系数是一种类型的拉格朗日乘子，利用线性泛函来分离集合的一切理论都可用于此处。对无限维的情形，对鞍点和对偶定理都可进行研究。从计算方法上来说，求（VMP）的有效解或弱有效解，可归为求参数规划问题（P_λ）的最优解。当 λ 遍迹 Λ^+ 或 Λ 时，将产生所有的有效解或弱有效解。但是，对于（VMP）的一个给定的有效解或弱有效解，选择一个适当的权向量 λ 并非易事。这是用权系数求解的弱点。

以下定理在实用中可以检验一个点的有效性，并用来产生一个有效解或判定问题的有效解不存在。

命

$$(\mathrm{P}_{\bar{x}})\qquad \Psi=\inf\sum_{i=1}^{m}f_i(x)$$
$$f(x)\leqslant f(\bar{x}),$$
$$x\in X,$$

其中 $\bar{x}$ 是 X 中的一个给定点。① $\bar{x}$ 是（VMP）的有效解的充分必要条件为 $\bar{x}$ 是（$\mathrm{P}_{\bar{x}}$）的最优解。②若 Ψ 是有限的，并且 $\tilde{x}\in X$ 是（$\mathrm{P}_{\bar{x}}$）的最优解，则 $\tilde{x}$ 是（VMP）的有效解。③若 X 是凸集，$f(x)$ 是 X 上的凸函数，问题（$\mathrm{P}_{\bar{x}}$）无有限的最小值存在，则（VMP）不存在真有效解。这些结果是 R. E. 温德尔和 D. N. 李于 1977 年得到的。

1978 年，H. P. 本森给出有效解与真有效解之间关系的一个结果：设 $f(x)$ 是凸集 X 上的凸函数，$S=\{s\in R^m\mid s\leqslant f(x)$ 对某一 $x\in X$ 成立$\}$ 是闭集，则任意非真有效解必是某一真有效解序列的极限。此外，用 E 表示所有有效解的集合，E_p 表示所有真有效解的集合，若 $f(x)$ 在闭凸集 X 上是连续的和凸的，则有关系 $f(E_p)\subseteq f(E)\subseteq\overline{f(E_p)}$，其中一横表示闭运算。

多目标规划的算法 把多目标规划问题归为单目标的数学规划（线性规划或非线性规划）问题进行求解，即所谓标量化的方法，这是基本的算法之一。

① 线性加权和法 对于多目标规划问题（VMP），先选取向量 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$，要求 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，作各目标线性加权和 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$，然后求解单目标数学规划问题

$$\min_{x\in X}\lambda^{\mathrm{T}}f(x),\qquad(1)$$

设 $\tilde{x}$ 是问题（1）的最优解，则可以证明 $\tilde{x}$ 是问题（VMP）的有效解。若选取向量 $\lambda\geqslant 0$，则相应的问题（1）的最优解 $\tilde{x}$ 是多目标规划问题（VMP）的弱有效解。向量 λ 的各个分量 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 通常叫做权系数。它的大小反映了各相应分目标在问题中的重要程度。一般，对权系数的不同选取，可以得到问题（VMP）的不同的有效解或弱有效解。如何选取权系数，对于不同的问题可以有不同的处理方法。

② 理想点法 为了求解多目标规划问题（VMP），先依次极小化各个分目标。设求得第 i 个目标的极小值 $f_i^*=\min_{x\in X}f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则得到 R^m 中的一个点 $f^*=(f_1^*,f_2^*,\cdots,f_m^*)^{\mathrm{T}}$。由于点 f^* 的各个分量对于相应的分目标而言是最理想的值，故称 f^* 为问题（VMP）的理想点。选取权系数 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，并作偏差（函数）

$$\|F(x)-F^*\|_p=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(f_i(x)-f_i^*)^p\right\}^{1/p}\quad(1\leqslant p<+\infty),$$

最后求解数学规划问题

$$\min_{x\in X}\|F(x)-F^*\|。\qquad(2)$$

问题（2）的最优解是问题（VMP）的有效解。理想点法的基本思想是在某种意义下使向量目标函数与所考虑问题的理想点的偏差为极小，来求出多目标规划问题的有效解。在上述偏差中，p 的不同取值代表了不同意义的偏差。当取 $p=2$，$\lambda_i=1$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则偏差就为距离 $\|F(x)-F^*\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}[f_i(x)-f_i^*]^2}$。这种情形，理想点法也叫做最短距离法。

③ 分层求解法 对于问题（VMP），假若目标函数 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^{\mathrm{T}}$ 的各个分目标可以按其在问题中的重要程度排出先后次序，并设这个次序为：$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$。先对第一个目标进行极小化：$\min_{x\in X}f_1(x)$，设得到的最优解为 x^1。然后，按下述格式依次分层对各目标进行极小化：

$$\min_{x\in X_k}f_k(x),\quad k=2,3,\cdots,m,\qquad(3)$$

式中 $X_k=\{x\mid x\in X_k,\ f_k(x)=f_i(x^i),\ i=1,2,\cdots,k-1\}$。设 $k=m$ 时得到问题（3）的最优解 x^m，则在每一 $X_k\neq\varnothing$ 的条件下，x^m 是多目标规划（VMP）的有效解。在实用中，为了保证每一 $X_k\neq\varnothing$，常把上述 X_k 中的等式约束作适当的宽容，即给出一组所谓宽容量 $\delta_i(i=1,2,\cdots,$

个函数便表现为变量 u 按照这个对应关系随着动点 P 在定义域 S 上变化而变化：

$$u=f(P)\quad (P\in S)。\qquad (1)$$

这样，二元函数的概念便同一元函数的一致。

如图1，当动点 P 由一个位置 $P(x,\ y)$ 变到另一个位置 $P_1(x_1,y_1)$ 时，这变化由它的位移向量 $\overrightarrow{PP_1}=\{x_1-x,\ y_1-y\}=\{\Delta x,\Delta y\}=\Delta P$ 来刻画，这变化的大小便由这向量的长度 $|\Delta P|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 来度量。相应的 u 的变化 $\Delta u=f(P_1)-f(P)=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$，其大小由 $|\Delta u|$ 来度量。于是多元函数(1)在一点 P 处的连续性也同一元函数的一致，即在 P_1 无限趋近于 P 的过程中，$|\Delta u|$ 随着 $|\Delta P|$ 而无限变小。这就是说，对于每一个正数 ε 都存在一个正数 δ 使得

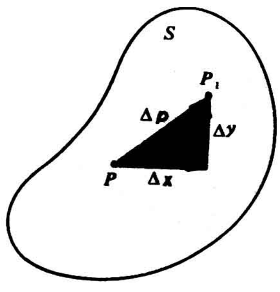


图1 二维的变量变化

$$|\Delta u|<\varepsilon \quad 只要 \quad |\Delta P|<\delta。\qquad (2)$$

这导致多元连续函数的基本性质也同一元连续函数的一样：在一有界闭集 S 上处处连续的一个函数至少在某一点处达到最小值 m，又至少在某一点处达到最大值 M；其连续性在整个集合 S 上是一致的(即(2)中的 δ 不依赖于 P 而对于 S 上的每个点 P 都有效)；并且，如果 S 是连通的(即 S 上每两点都能够用完全位于 S 上的一条折线连接起来)，则每一个中间值 $\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$ 都是某一点处的函数值。

函数(1)的连续性，作为一个局部性质，它在 S 的每个内点处都可以分解成一元的情形。如图2，只要函数(1)在一点 P 的某个邻域(δ)内处处连续，则(根据上述基本性质)必定在其内部的一个方邻域$[\delta]$上一致连续，而在这个方邻域上的变化量具有图1所启示的向量分解式

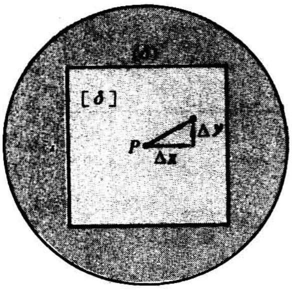


图2 二维邻域

$$\Delta u=\Delta_x u+\Delta_y u,\qquad (3)$$

式中 $\Delta_x u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$，$\Delta_y u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)$ 分别作为一元函数

$$g(x)=f(x,y),\quad h(y)=f(x+\Delta x,y)\qquad (4)$$

的变化量，其连续性分别关于 y 或 $x+\Delta x$ 是一致的(即相应于(2)中的 δ 不依赖于 y 或 $x+\Delta x$)。

偏导数 连续性(2)的进一步研究，是要在变化量分解式(3)的基础上，利用一元函数(4)来阐明，在 $|\Delta P|$ 趋向0的过程中，变化量 Δu 随 Δx、Δy 趋向0的依赖关系。这就要用到一元函数(4)的变化率，即导数 $g'(x)$、$h'(y)$。假定它们在 $P(x,\ y)$ 的附近都存在，并分别记为 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x+\Delta x,y)$。通常也写成

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}。$$

这种对自变量之一(其余作为参变量)的导数称为偏导数。利用这些偏导数的存在和一元微分学的中值定理，可以把(3)写成

$$\Delta u=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x+\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta y+\alpha(\Delta x),$$

式中 θ 介于0到1之间，α 为无限小量。当偏导数 f'_y 连续时，可以进一步写成

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\qquad (5)$$

α、β 为无限小量。

全微分 分解式(5)表明，在点 P 处，变化量 Δu 随着 Δx、Δy 趋向0的过程中，存在着近似线性的依赖关系

$$\Delta u=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\qquad (6)$$

式中主要部分的系数 A、B 不依赖于 Δx、Δy，而余项部分的系数 α、β 是无限小量。对此我们说函数 u 在点 P 处是可微的，并称这个线性主要部分为 u 的一个(全)微分，且记为

$$du=A\Delta x+B\Delta y。\qquad (7)$$

但在关系(6)中令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y=0$ 或 $\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$，即可推出

$$A=\frac{\partial u}{\partial x},\quad B=\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以只要微分存在，它的系数就必然是偏导数，因而是唯一的。然而，在某些特殊情形，这些偏导数都存在，关系(6)却不成立；所以，不同于一元函数的情形，只有偏导数的存在还不能保证微分存在。

不过，公式(6)的推导已经表明，这些偏导数的连续性可以保证微分存在。这时就说函数是连续可微的。最基本的连续可微函数就是自变量本身作为 $P=(x,\ y)$ 的函数：

$$x=\varphi(P),\quad y=\psi(P)。\qquad (8)$$

这时 $dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x$，$dy=0\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y$。因此 u 的微分可以写成

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy。\qquad (9)$$

这样，微分的定义等式(7)就由微分与差分的关系变成了纯粹是微分之间的关系。这微分关系式(9)以相同的线性系数代表着差分的近似关系(5)，并成为分解式(3)的分解过程的完成形式，微分形式。

变量替换 在微分形式(9)中，变量 x、y 既然当作动点 P 的函数，如(8)所示，它们也就是动点 P 在任一别的坐标系(r,s)中的坐标的函数：

$$x=\varphi(r,\ s),\ y=\psi(r,s)。\qquad (10)$$

假定这些坐标函数也在其定义域 S' 上是处处连续可微的，也就是说，出现在下列微分等式中的系数都是连续的：

对称的。从上面的考虑可知，椭圆和双曲线还必须关于二焦点连线F_1F_2的垂直平分线对称。这条垂直平分线与圆锥曲线的轴的交点就是圆锥曲线的中心C。因此对椭圆或双曲线而言，适当的坐标系是把圆锥曲线的轴作为x轴，而过中心C的垂线作为y轴的直角坐标系。还可以x轴同上面一样，而y轴是过一个顶点(轴与曲线的交点)的切线。还可以取圆锥曲线的轴作为极轴的零方向，而一个焦点作为极点的极坐标系(见坐标系)，则对于三种圆锥曲线都是适合的。对于双曲线而言，还可以形成一个很自然的斜角坐标系，这个坐标系的轴就是相交于中心的两条渐近线。

抛物线方程 取x轴为抛物线的轴，而y轴为过顶点的切线(图3)，令抛物线的焦点与准线的距离为p(称为抛物线的半参数)，则得到抛物线的顶点型方程

$$y^2=2px\ (p>0)。$$

这时抛物线的焦点是

$$F\left(\frac{p}{2},0\right),$$

准线是

$$l:\ x=-\frac{p}{2}。$$

方程 $x^2=2py$, $y^2=-2px$, $x^2=-2py$ (其中$p>0$)也都表示抛物线。

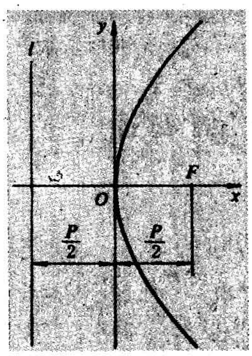


图3 抛物线

椭圆方程 取x轴与椭圆的轴一致，而y轴与两个顶点之间线段V_1V_2的垂直平分线一致(图4)。y轴与椭圆相交于称为第二对顶点的两点W_1与W_2。长度$|V_1V_2|=2a$叫做长轴，长度$|W_1W_2|=2b$叫做短轴；则得到椭圆的中心型方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$。这时椭圆的焦点是$F_1(c,\ 0)$，$F_2(-c,\ 0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$，准线是l_1:$x=\frac{a^2}{c}$，l_2: $x=-\frac{a^2}{c}$，离心率$e=\frac{c}{a}$。方程$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b)$也表示椭圆。

双曲线方程 与椭圆类似地建立坐标系，可以得到双曲线的中心型方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。双曲线没有短半轴，且只有两个顶点$V_1$，$V_2$(图5)。长度$|V_1V_2|=2a$叫做实轴。由于两个焦点之间的距离大于两个顶点间的距离，所以存在由$b^2=c^2-a^2$给出的正数b。$2b$叫做虚轴。双曲线的焦点是$F_1(c,\ 0)$，$F_2(-c,\ 0)$。准线是l_1:$x=\frac{a^2}{c}$，l_2: $x=-\frac{a^2}{c}$，离心率$e=\frac{c}{a}$。

数b的意义可以从下面整理过的方程中看出：

$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)\qquad \frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}。$$

当$x\to\infty$时，这个表达式的极限值是$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}$，以这两极限值作为斜率的两条直线$y=\pm\frac{b}{a}x$就是双曲线的渐近线。只考虑第一象限的情况，从渐近线上的一点(ξ,η)，其中$\xi>a$，向x轴作一垂线，它与双曲线相交于点$P(x,\ y)$。由于$\xi=x$，并且从$\eta=\frac{b}{a}x$与$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$有$y<\eta$。由于从双曲线方程可以得出$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{-1}$，在$x\to\infty$时，$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\to\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$，或者当$x\to\infty$时，$\left[\left(\frac{b}{a}\right)x-y\right]=\eta-y\to0$。由此得知$x$越大，则差$\eta-y$越小。当$x\to\infty$时，双曲线任意地接近直线$y=\frac{b}{a}x$。这条直线就是双曲线的渐近线。从直角边为$a$和$b$及斜边为$c$的直角三角形可以求得它对$x$轴的倾角。如果把双曲线的两条渐近线作为坐标轴，则双曲线的方程是$xy=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{c^2}{4}=$常数。形如$xy=$常数$(\neq0)$的任何函数都表示双曲线。与椭圆的情况类似，方程$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$也表示双曲线。

方程的一般形式 通过以上圆锥曲线方程的建立，得知任何一种圆锥曲线(抛物线、椭圆、双曲线)关于直角坐标系的方程都是二元二次方程，因此圆锥曲线可以称为二次曲线。这一结论对于仿射坐标系也是成立的。反过来要说明二次曲线的各种可能情况，则需对一般二元二次方程进行讨论。两个变量x和y的一般二次方程的形式是

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

式中a，b，c，d，e，f是任意实数而且a，b，c不全是零。这个方程在直角坐标系里定义了一条曲线。可以用坐标变换的方法化简方程，从而认识这个方程所表示的曲线。化简的步骤是：首先通过坐标系的旋转消去混乘项(xy项)，旋转角θ的选取应满足$\tan2\theta=\frac{2b}{a-c}$，这时方程化为形式：$Ax'^2+Cy'^2+2Dx'+2Ey'+F=0$。这意味着圆锥曲线的轴与坐标轴平行了。然

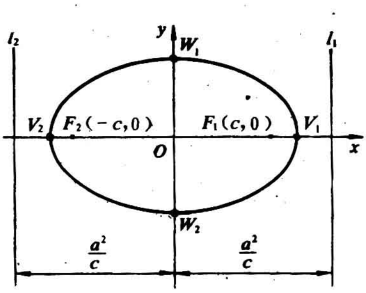


图4 椭圆

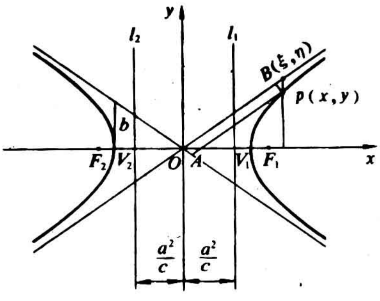


图5 双曲线及其渐近线

$y_2,\cdots,y_n$)是 x 在 V 某一基底下的坐标；$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\varphi(x,x)$在 V 的任意基底下的对应矩阵 A 的全体特征值。埃尔米特矩阵必有 n 个线性无关的特征向量。令以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角元的对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=MAM^*$，则 M 的列向量依次为各 λ_j 对应的 A 的特征向量，将这些向量正交化，即得所求的酉矩阵。实二次型为埃尔米特型的特例，所以也可用此方法求出实二次型的正交矩阵。

二次型的理论在物理学、几何学、概率论等学科中都已得到了广泛的应用。在二次型的研究中已由域上二次型的算术理论发展到环上二次型的算术理论，它们与代数数论、数的几何等都有密切的联系。此外，在多重线性代数中使用二次型还可定义比外代数更广的克利福特代数。 （佟文廷）

ercixing de suanshu lilun

二次型的算术理论 (arithmetic theory of quadratic form) 主要研究“以型表型”的问题。设 D 是域 K 或 K 中含有单位元素 1 的环，以 I 记 K 或 D。所谓 I 上的二次型，是指 n 个变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x$ 的二次齐次式

$$f(x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}\in I,$$

简称为型 f。当 K 的特征非 2 时，常记 $f_{ii}=a_{ii}$，$f_{ij}=f_{ji}=\frac{1}{2}a_{ij}(i\neq j)$，而写 $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j$。此时将 f 的系数矩阵 (f_{ij}) 记为 F，将 x 视为列矩阵，便有 $f=x^{\mathrm T}Fx$，其中 $x^{\mathrm T}$ 表 x 的转置阵。F 的秩 n_f 和行列式 d_f，分别称为型 f 的秩和行列式。F 为满秩，则称 f 为非奇异的；F 为降秩，则称 f 为奇异的。对给定的 I 上 n 元型 f 和 m 元型 $g(m\leqslant n)$，若存在 $b_{jj}=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj})$，$b_{ij}\in D$，$j=1,2,\cdots,m$，使 $f\left(\sum_{j=1}^{m}y_jb_j\right)=g(y)$；或者说，当 K 的特征非 2 时存在 $n\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})$，使 $B^{\mathrm T}FB=G$，其中 G 是型 g 的系数矩阵，则称 f 可在 D 上表出型 g，且 B 称为 f 表 g 的一个表法。当 $m=1$ 时，由 $f(yb)=g(y)=ay^2$ 可得 $f(b)=a\in I$，此时称 f 可在 D 上表出 I 中元素 a。知 a 求 b 即所谓以型表“数”。当 $a=0$ 而 $b\neq0$，f 非奇异时，则称 f 为 I 上的零型。例如，有理数域上的三元二次型$x^2+y^2-z^2$ 是整数环上的零型，且有表法（3,4,5）（商高定理）。当非奇异型 f 可在 I 上表出 I 的所有非零元素时，则称 f 为 I 上的泛型。当 $m=n$ 时，若型 f 和 g 可在 D 上互相表出，则称 f 与 g 是在 D 上等价的，记 $f\underset{D}{\sim}g$。I 上诸型可分成若干在 D 上的等价类。若 f 与 g 同类，则 $n_f=n_g$，$d_f=d_g\tau^2$，$\tau\in D$，简记为 $d_f\underset{D}{\sim}d_g$；且可在 D 上表出之型相同。但是，表数相同的型不一定是等价的。

最早对二次型进行系统研究的是 C. F. 高斯。二次型的算术理论在不定方程中有大量的应用，也应用于组合设计和结晶学。

型的性质与选取型的系数所在的基域 K 和环 D 有关。在有理数域 Q 和 p 进数域 Q_p，以及它们包含的整环上所得的结果，大都可以推广到一般的整体域和局部域上。

域上的二次型 设 K 是任意一个特征非 2 的域，则有以下重要结果：

① K 上秩为 n 的型均在 K 上等价于一个对角型 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2$，式中 a_i 是 K 中无平方因子的非零元素。

② E. 维特于1936年证明了消去定理：若非奇异 l 元型 $f\underset{K}{\sim}f_1$，则 $f+g(x_{l+1},\cdots,x_n)\underset{K}{\sim}f_1+g_1(x_{l+1},\cdots,x_n)$的充分必要条件为 $g\underset{K}{\sim}g_1$。

③ C. L. 西格尔于 1941 年证明了 K 上的零型必为 K 上的泛型。反之不常真。由此可知，非奇异 n 元型 f 可在 K 上表出 K 中的元素 a 的充分必要条件为 $n+1$ 元型 $f-ax_{n+1}^2$ 是 K 上的零型。于是把表数问题化为表零问题。

④ K 上非奇异 n 元型 f 可在 K 上表出非奇异 m 元型 g 的充分必要条件为存在 $n-m$ 元型 h，使得 $f\underset{K}{\sim}g+h(x_{m+1},\cdots,x_n)$。当 $K=C$ 为复数域时，秩为 n 的型均在 C 上等价于单位型 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，故 $f\underset{C}{\sim}g$ 的充分必要条件为 $n_f=n_g$。f 为零型的充分必要条件为 $n_f\geqslant2$。当 $K=R$ 为实数域时，秩为 n 的型 f 均在 R 上等价于某个形如 $\sum_{i=1}^{s}x_i^2-\sum_{j=1}^{n-s}x_{s+j}^2$ 的对角型。数 $s=s_f$，称为型 f 的正惯性指标。由消去定理可知，$f\underset{R}{\sim}g$ 的充分必要条件是 $n_f=n_g$，$s_f=s_g$。通常把$s=0$ 或 n 的型，称之为定型；$s=n$的型，称之为正定型；$0<s<n$ 的型，称之为非定型。f 是零型的充分必要条件为 f 是非定型。当 $K=F_q$ 是一个有限域时，秩为 n 的型均在 F_q 上等价于某个对角型$x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+ax_n^2$，式中 a 为 1 或某个非平方数。$f\underset{F_q}{\sim}g$ 的充分必要条件为 $n_f=n_g$，$d_f\underset{F_q}{\sim}d_g$；$f$ 是零型的充分必要条件为 $n_f\geqslant3$ 或 $n_f=2$ 而$-d_f$ 是平方数。当 $K=Q_p$ 是 p 进数域时为判别型在 Q_p 上等价性及表数问题，H. 哈塞关于对角型引入了一个重要的符号，即哈塞符号 $C_p(f)$，亦称哈塞-闵科夫斯基符号。后来，G. 帕尔将其推广为

$$C_p(f)=(-1,-D_n)_p\prod_{i=1}^{n-1}(D_i,-D_{i+1})_p,$$

式中 D_i 表非奇异型 f 的矩阵中之左上角 i 阶主子式。此处只要求D_i 中无相继为 0 的，且对于为 0 的D_i 可随意取作 1 或-1。式中的符号$(\alpha,\beta)_p=+1$ 或-1，视 $\alpha x^2+\beta y^2=1$ 在 Q_p 中有解或无解而定。这里 α、β 是 Q_p 中的非零数，p 为素数或 ∞，Q_∞ 即实数域。$(\alpha,\beta)_p$ 由 D. 希尔伯特于 1897 年引入，称为希尔伯特符号，亦记作$\left(\frac{\alpha,\beta}{p}\right)$或$\left(\frac{\alpha,\beta}{p}\right)$。关于$(\alpha,\beta)_p$ 有一套实际算法，因此 $C_p(f)$是可以算出的。利用哈塞符号可以证明，$p\neq\infty$ 时，Q_p 上两个非奇异型 $f\underset{Q_p}{\sim}g$ 的充分必要条件为 $n_f=n_g$，$d_f\underset{Q_p}{\sim}d_g$，