

丛书主编 王 生 本册主编 曹瑞彬

启东中学



奥赛

精题详解

初中数学



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS



启东中学，中国百强中学之一，1995—2009 年获国际奥赛奖牌 15 枚，被誉为：

“奥赛金牌的摇篮，清华北大的生源基地。”

奥赛训练教程初中数学
奥赛训练教程初中物理
奥赛训练教程初中化学
奥赛训练教程高中数学
奥赛训练教程高中物理
奥赛训练教程高中化学
奥赛精题详解初中数学
奥赛精题详解初中物理
奥赛精题详解初中化学
奥赛精题详解高中数学
奥赛精题详解高中物理
奥赛精题详解高中化学

责任编辑：王书贞
封面设计：罗薇

ISBN 978-7-81101-116-6



9 787811 011166 >

定价：18.00元

启东中学



主 编 曹瑞彬
副主编 张 杰
作 者 张 杰 庞 备 郁卫星
沙春辉 陈惠忠 黄海东

初 中 数 学



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛精题详解. 初中数学 / 曹瑞彬主编. 南京: 南京师范大学出版社, 2004. 7

ISBN 978 - 7 - 81101 - 116 - 6 / G · 722

I. 启… II. 曹… III. 数学课—初中—解题
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 062507 号

书 名 启东中学奥赛精题详解(初中数学)
主 编 曹瑞彬
副 主 编 张 杰
责任编辑 王书贞
出版发行 南京师范大学出版社
地 址 江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电 话 (025)83598077(传真) 83598412(营销部) 83598297(邮购部)
网 址 <http://press.njnu.edu.cn>
E-mail nspzbb@njnu.edu.cn
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 12.25
字 数 318 千
版 次 2009 年 9 月第 3 版 2009 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 81101 - 116 - 6 / G · 722
定 价 18.00 元

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换
版权所有 侵犯必究



曹瑞彬 男, 1962年11月出生, 1983年毕业于南京师范学院数学系, 中学数学高级教师, 江苏省数学特级教师, 数学奥林匹克高级教练, 南通市数学学科基地业务负责人, 启东中学数学首席教师。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作, 近年来培养了一大批数学尖子, 其中有100多人获得全国数学联赛一等奖, 10位同学入选国家冬令营, 5位同学进入国家集训队, 陈建鑫同学获42届数学奥林匹克金牌。任班主任所送的2003届高三(1)班有20位同学考入清华、北大, 还有20位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》《向45分钟要效益》等数十本教辅用书, 在《中学数学》《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年“世界第一才女”毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,同年,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,同张峰一起获亚洲物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺获第38届国际中学生物理奥赛金牌,并被授予“全国优秀共青团员”称号。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为“奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地”。

“启东中学现象”自然也成为出版界瞩目的焦点,与“黄冈”一

样，“启东”很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩，应该说，建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映，如《向45分钟要效益》《特级教师优化设计》《奥林匹克竞赛指导》《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行，是我社依托名校名师，实施“名品”战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步，是我社与启东中学多年合作的结果，倚天时地利人和的优势，水到而渠成。

迈开这一步，是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社“理念教辅”、“名品教辅”的关心与厚爱以及他们的需求，已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础，根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写，将竞赛与升学结合起来，尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养，由浅入深，循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答，方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士，各分册的主编均是启东中学金牌教练，参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作，有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力，领略启东中学的风采，解读启东中学的奥秘，欣赏启东中学的智慧，分享启东中学的成功！

南京师范大学出版社

目 录

第一章 数与式

第一节	整数的有关性质	(1)
第二节	实数	(8)
第三节	整式	(15)
第四节	分式	(22)
第五节	根式	(31)
第六节	统计与概率初步知识	(38)
第七节	章节复习	(50)

第二章 方程与不等式

第一节	一次方程(组)与一次不等式(组)	(59)
第二节	一元二次方程	(66)
第三节	可化为一元二次方程与二元二次方程组	(76)
第四节	有关方程的应用题	(86)
第五节	不定方程及其应用	(96)
第六节	章节复习	(105)

第三章 函数及其图象

第一节	直角坐标系与函数的概念	(114)
第二节	一次函数与反比例函数	(120)
第三节	二次函数	(128)
第四节	章节复习	(138)

第四章 直线形

第一节	全等三角形及其应用	(147)
第二节	等腰三角形与直角三角形	(158)
第三节	四边形	(168)
第四节	相似形	(181)
第五节	几何变换(一)——轴对称与平移	(194)
第六节	几何变换(二)——中心对称与旋转	(205)
第七节	面积问题与等积变形	(215)
第八节	章节复习	(226)

第五章 三角函数

第一节	锐角三角函数	(242)
第二节	解直角三角形	(247)
第三节	章节复习	(254)

第六章 圆

第一节	圆的基本性质	(262)
-----	--------------	-------



第二节	圆的重要定理	(270)
第三节	三角形中的四心问题	(281)
第四节	正多边形及其应用	(294)
第五节	几何计算问题	(303)
第六节	章节复习	(315)

第七章 数学思想与方法

第一节	抽屉原理	(324)
第二节	容斥原理	(332)
第三节	逻辑推理	(338)
第四节	分类讨论	(350)
第五节	构造法	(363)
第六节	反证法	(373)

第一章 数与式

第一节 整数的有关性质

一、选择题

1. 下列四个数中,只有一个是完全平方数,它是().

- A. 513231 B. 121826 C. 122530 D. 625681

答案 D.

解 排除法. A各数字之和能被3整除,但不能被9整除,所以A只能被3整除但不能被9整除,所以不是完全数,B的末位数为6,所以它的十位数为奇数才能是平方数,所以B排除,C个位数为0,所以它是有10的因数,因此C必须被100整除才能是完全平方数,所以C排除.

2. 设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 均为正整数,且 $x_1 < x_2 < \dots < x_9$, $x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 220$, 则当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 的值最大时, $x_9 - x_1$ 的最小值是().

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

答案 B.

解 ①先设 $x_1 + x_2 + \dots + x_5 \leq 110$, 因为若不然, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 110$, 则 $x_5 \geq 25, x_6 \geq 26, x_7 \geq 27, x_8 \geq 28, x_9 \geq 29$, 那么 $x_1 + x_2 + \dots + x_9 > 110 + 26 + 27 + 28 + 29 = 220$, 与题设矛盾.

②若取 $x_1 = 20, x_2 = 21, x_3 = 22, x_4 = 23, x_5 = 24$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 110$; 若 $x_9 \leq 28$, 则 $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 28 + 27 + 26 + 25 < 110$. 故 x_9 的最小值为 $x_9 = 29$, 故 $x_9 - x_1$ 的最小值为 $29 - 20 = 9$.

故选 B.

3. 一个六位数 $\overline{a1988b}$ 能被 12 整除, 这样的六位数共有().
 A. 9 个 B. 12 个 C. 15 个 D. 20 个

答案 A.

解 由于 $12 \mid \overline{a1988b}$, 所以 $3 \mid \overline{a1988b}$, $4 \mid \overline{a1988b}$.

① 因为被 3 整除的数的各位数字之和被 3 整除, 所以 $3 \mid (a+1+9+8+8+b)$, 即 $3 \mid [24+(a+b+2)]$.
 所以 $3 \mid (a+b+2)$.

② 被 4 整除的数的末两位数被 4 整除, 所以 $4 \mid \overline{8b}$.

所以 $b=0, 4, 8$.

由①②知,

当 $b=0$ 时, $3 \mid (a+2)$, 所以 $a=1, 4, 7$;

当 $b=4$ 时, $3 \mid (a+6)$, 所以 $a=3, 6, 9$;

当 $b=8$ 时, $3 \mid (a+10)$, 即 $3 \mid a+1$, 所以 $a=2, 5, 8$.

所以满足题意的六位数共有 9 个.

故选 A.

4. 已知两个质数 p, q , 且 $p+q=21$, 则 $\frac{(2q+1)}{p}$ 的值为().

A. $\frac{5}{19}$ 或 $\frac{39}{2}$

B. $\frac{9}{17}$ 或 $\frac{17}{9}$

C. $\frac{17}{13}$ 或 $\frac{13}{17}$

D. $\frac{23}{10}$ 或 $\frac{21}{11}$

答案 A.

解 当 $p=2, q=19$ 时, $\frac{(2q+1)}{p} = \frac{39}{2}$;

当 $p=19, q=2$ 时, $\frac{(2q+1)}{p} = \frac{5}{19}$.

5. 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为互不相等的正奇数, 且满足 $(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)(2005-x_4)(2005-x_5) = 24^2$, 那么, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ 的末位数字是().



A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

答案 A.

解 易见,等式左端五个因式为不同的偶数,而将 24^2 分解为五个互不相等的偶数之积,只有唯一的形式:

$$24^2 = 2 \times (-2) \times 4 \times 6 \times (-6).$$

故五个因式 $2005 - x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 应分别等于 $2, -2, 4, 6, -6$.

所以, $(2005 - x_1)^2 + (2005 - x_2)^2 + \dots + (2005 - x_5)^2 = 2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2 + (-6)^2 = 96$, 即

$$5 \times 2005^2 - 4010(x_1 + x_2 + \dots + x_5) + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2) = 96.$$

所以 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

故选 A.

6. 设 $x * y = (x+1)(y+1)$, x^{*2} 定义为 $x * x$, 则多项式 $3 * (x^{*2}) - 2 * x + 1$, 当 $x=2$ 时的值为().

A. 19

B. 27

C. 32

D. 38

答案 C.

解 利用本题规定的两种新定义运算:

$$\text{因为 } x^{*2} = 2^{*2} = 2 * 2, 2 * 2 = (2+1)(2+1) = 9,$$

$$\text{所以 } x^{*2} = 9.$$

$$\text{所以 } 3 * (x^{*2}) = (3+1)(9+1) = 40.$$

$$\text{因为 } 2 * x = 2 * 2 = 9,$$

$$\text{所以 } 3 * (x^{*2}) - 2 * x + 1 = 40 - 9 + 1 = 32.$$

故选 C.

二、填空题

7. 三位数 $\overline{abc} = a^2 + 1 + (\overline{bc})^2$, 则 $\overline{abc} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 726.

解 由 $100a + \overline{bc} = a^2 + 1 + (\overline{bc})^2$, 得

$$\overline{bc}(\overline{bc} - 1) = 100a - a^2 - 1.$$

显然其左边为偶数, 故 a 必为奇数.

当 $a=1$ 时, $(\overline{bc}-1) \cdot \overline{bc}=98=2 \times 7^2$;

当 $a=3$ 时, $(\overline{bc}-1) \cdot \overline{bc}=290=2 \times 5 \times 29$;

当 $a=5$ 时, $(\overline{bc}-1) \cdot \overline{bc}=474=2 \times 3 \times 79$;

当 $a=7$ 时, $(\overline{bc}-1) \cdot \overline{bc}=650=26 \times (26-1)$;

当 $a=9$ 时, $(\overline{bc}-1) \cdot \overline{bc}=818=2 \times 409$.

故仅有 $a=7$ 时, $\overline{bc}=26$ 满足题设.

故 $\overline{abc}=726$.

8. 设 x_1, x_2, \dots, x_{51} 都是正整数, $x_1 < x_2 < \dots < x_{51}$, 且 $x_1 + x_2 + \dots + x_{51} = 1995$, 当 x_{26} 在它的可以取得的值中达到最大时, x_{51} 可以取得的最大值是_____.

答案 95.

解 要使 x_{26} 最大, 则 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25}$ 必须最小, 从而 $x_{26} + x_{27} + \dots + x_{51} = 1995 - (1 + 2 + \dots + 25) = 1670$. 为了使 x_{51} 最大, 则 $x_{26}, x_{27}, \dots, x_{50}$ 必须最小, 从而 $x_{26} + (x_{26} + 1) + (x_{26} + 2) + \dots + (x_{26} + 24) + x_{51} = 1670 (x_{51} > x_{26} + 24)$, 即

$$25x_{26} + x_{51} = 1670 - (1 + 2 + \dots + 24) = 1370 = 25 \times 51 + 95.$$

故取 $x_{51} = 95$ 为 x_{51} 可以取得的最大值.

9. 正整数 $3^{2006} + 4^{2006}$ 除以 3, 所得余数是_____.

答案 1.

解 $\because 3^{2006}$ 除以 3 余数为 0, 而 4 除以 3 的余数为 1, $\therefore 4^{2006}$ 除以 3 的余数为 1. 故 $3^{2006} + 4^{2006}$ 除以 3 的余数为 1.

10. 如果对于任意的非零实数 a 和 b 定义运算 $*$ 为 $a * b = \frac{a-b}{ab}$, 则 $5 * (4 * 3) =$ _____.

答案 $\frac{59}{5}$.

解 由 $a * b = \frac{a-b}{ab}$, 得 $4 * 3 = \frac{4-3}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$.



$$\text{所以 } 5 * (4 * 3) = 5 * \frac{1}{12} = \frac{5 - \frac{1}{12}}{5 \times \frac{1}{12}} = \frac{59}{5}.$$

11. 已知 $p, p+2, p+6, p+8$ 和 $p+14$ 都是质数, 则这样的质数 p 共有 _____ 个.

答案 1.

解 将质数 p 按被 5 除的余数分类:

(1) 当 $p=5$ 时, $p+2=7, p+6=11, p+8=13, p+14=19$ 符合题意.

(2) 当 $p=5k \pm 1$ 时, $p+14$ (或 $p+6$) 是合数, 不合题意.

(3) 当 $p=5k \pm 2$ 时, $p+8$ (或 $p+2$) 是合数, 不合题意.

综上所述, 只有 $p=5$ 符合题意.

12. 已知 2005 是两个质数的和, 那么这两个质数的积等于 _____.

答案 4006.

解 设两个质数分别为 p, q , 则 $p=2, q=2003$ 或 $p=2003, q=2$. $\therefore pq=4006$.

三、解答题

13. 已知 x, y 为整数, 且 $5 | (x+9y)$, 求证: $5 | (8x+7y)$.

证明 因为 $8x+7y=8(x+9y)-65y$, $5 | (x+9y)$, $5 | 65y$, 所以 $5 | (8x+7y)$.

14. 求不大于 60, 且只有 10 个约数的正整数.

解 由于 $10=1 \times 10=2 \times 5$, 设符合条件的正整数 N 的形式为 $N=P=9$ 或 $N=P_1 \times P_2^4$.

(1) $N=P^9$, 最小质数是 2, 而 $2^9 > 60$, 不符合题意;

(2) $N=P_1 \times P_2^4$, $P_1 \geq 2, P_2 \geq 3$ 时, 有 $2 \times 3^4 > 60$, 也不符合题意;

当 $P_1=3, P_2=2$ 时, 有 $3 \times 2^4 = 48 < 60$,

$\therefore N=48$.



当 $P_1 \geq 5, P_2 = 2$ 时, 有 $5 \times 2^4 = 80 > 60$, 不符合题意, 则所求正整数 N 为 48.

15. 已知定理“若三个大于 3 的质数 a, b, c 满足关系式 $2a + 5b = c$, 则 $a + b + c$ 是整数 n 的倍数”.

试问: 上述定理中的整数 n 的最大可能值是多少? 并证明你的结论.

解 n 的最大可能值是 9.

先证 $a + b + c$ 能被 3 整除. 事实上 $a + b + c = a + b + 2a + 5b = 3(a + 2b)$, 所以 $a + b + c$ 是 3 的倍数.

设 a, b 被 3 除后的余数分别为 r_a, r_b , 则 $r_a \neq 0, r_b \neq 0$.

若 $r_a \neq r_b$, 则 $r_a = 1, r_b = 2$ 或 $r_a = 2, r_b = 1$, 此时 $2a + 5b$ 必为 3 的倍数, 即 c 为合数, 矛盾.

若 $r_a = r_b$, 则 $r_a = r_b = 1$ 或 $r_a = r_b = 2$, 此时 $a + 2b$ 必为 3 的倍数, 从而 $a + b + c$ 是 9 的倍数.

再证 9 是最大. 因为在 $2 \times 11 + 5 \times 5 = 47$ 中, $11 + 5 + 47 = 63$, 而在 $2 \times 13 + 5 \times 7 = 61$ 中, $13 + 7 + 61 = 81, (63, 81) = 9$.

因此 9 是最大可能的值.

16. 证明: 形如 $3n + 2$ 的数不是完全平方数, 其中 n 为正整数.

证明 整数被 3 除, 余数为 0, 1, 2, 即任一整数均可表示为 $3k, 3k + 1, 3k + 2$ 三种形式中的一种.

因为 $(3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot (3k^2)$,

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$,

$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$,

即任何整数平方后, 只能是 $3n$ 或 $3n + 1$ 的形式. 因此, 形如 $3n + 2$ 的数不可能是完全平方数.

17. a_n 表示 7^n 的末两位数, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1990}$ 的值.

解 因为 $7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401, 7^5 = 16807, 7^6 = 117649, \cdots$, 可见从 a_5 开始, 7^n 的末两位数开始循环重复 a_1, a_2, a_3, a_4 的末两位数.

$$\because 1990 = 497 \times 4 + 2,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{1990}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{1985} + a_{1986} + a_{1987} + a_{1988}) + (a_{1989} + a_{1990})$$

$$= (7 + 49 + 43 + 1) + (7 + 49 + 43 + 1) + \cdots + (7 + 49 + 43 + 1) + 7 + 49$$

$$= 100 \times 497 + 7 + 49$$

$$= 49756.$$

18. 哥德巴赫猜想: 每一个大于 2 的偶数, 可以表示为两个质数的和, 问 134 是哪两个两位数的质数之和, 且其中一个数的个位是 3?

解 用折除法. 当一个数为 13 时, 另一个数为 $121 = 11^2$, 舍去; 23 时, 另一个数为 $111 = 3 \times 37$, 舍去; $33 = 3 \times 11$, 舍去; $43, 91 = 13 \times 7$, 舍去; $53, 81 = 9^2$, 舍去; 73、61 符合; $83, 51 = 17 \times 3$, 舍去; $93 = 31 \times 3$, 舍去. \therefore 只有 73 和 61.

19. 设 n 是正整数, $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ 是 n 的 4 个连续最小的正整数的约数, 若 $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$, 求 n 的值.

解 若 n 为奇数, 则 d_1, d_2, d_3, d_4 都是奇数. 故

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \pmod{4}. \text{ 矛盾.}$$

若 $4 \mid n$, 则有 $d_1 = 1, d_2 = 2$. 由 $d_i^2 = 0$ 或 $1 \pmod{4}$ 知

$$n = 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod{4}. \text{ 也矛盾.}$$

从而, $n = 2(2n_1 - 1)$, n_1 为某正整数, 且数组 $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 2, p, q)$ 或 $(1, 2, p, 2p)$, 其中 p, q 为奇质数.

在前一种情形, 有

$$n = 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 = 3 \pmod{4}. \text{ 矛盾.}$$

$$\text{则只能是 } n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2).$$

故 $5 \mid n$.

若 $d_3 = 3$, 则 $d_4 = 5$, 这将回到前一种情形, 因此, 只能是 $d_3 = p = 5$, 则 $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$.