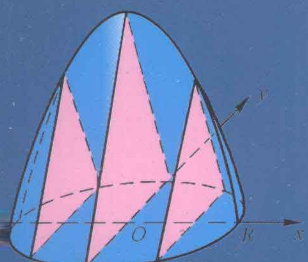
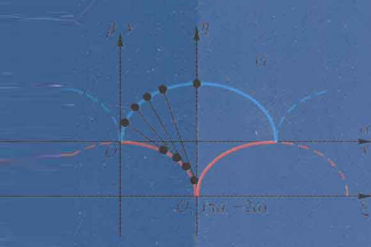
自主创新
方法先行

高等数学

（上册）

上海大学数学系　编





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

高等数学

（上册）

上海大学数学系　编

Gaodeng Shuxue

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号：2009IM010400）子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写；采用了“问题驱动内容”的编写方式；书中精选了一些在物理、经济、管理等方面应用的例题，以培养学生数学建模的思想；既注重高等数学有关内容的形成，又注重展示这些内容在实际问题中的应用。

全书分上、下两册，上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程，书末附有习题答案与提示。

本书可作为高等学校工科类和经济管理类专业高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/上海大学数学系编．—北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032303-0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①上…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 120615 号

策划编辑　王　强　　责任编辑　王　强　　封面设计　于　涛　　责任印制　田　甜
版式设计　范晓红　　插图绘制　杜晓丹　　责任校对　刘　莉

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×960　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	22.75	版　　次	2011年7月第1版
字　　数	420 000	印　　次	2011年7月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	30.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32303－00

前言

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”(项目编号:2009IM010400)的研究成果之一,是为综合性大学和高等师范院校理工类、经济管理类专业本科学生编写的高等数学教材,分上、下两册。

近半个世纪以来,科学技术发展突飞猛进,涌现出越来越多的交叉学科。在这样一个大前提下,一方面,学生需要接受海量的知识,加强通识教育已经成为当前高等教育的必然趋势;另一方面,数学在整个科技快速发展进程中的重要地位越发凸显。因此,作为大学数学的教育者,如何最有效地引导学生进入数学、掌握数学、创造性地运用数学,成为当前重大的研究课题。

在科技部创新方法工作专项项目和上海大学重点教材建设项目的支持下,上海大学数学系的三十多位教师就“数学基础课程在综合性院校人才培养中的作用”、“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”等问题进行了专题研究,并在研究的基础上,总结上海大学组建近20年来公共数学课程的教学经验,采用以“问题驱动内容”的方式编写了本书。本书的编写理念就是要还原数学概念、理论形成的历史轨迹,使学生在学习的过程中懂得数学理论不是事先安排好的,而是通过探索研究逐渐发现形成的。因此在本书的编写过程中,我们在重要章节的引入处提出了生动的问题,通过对问题的分析,逐渐展开相关数学概念、理论与方法,然后利用这些概念、理论、方法再解决引入时所提出的问题;此外,我们在介绍数学方法时,力图从数学的实际应用背景出发,精选了一些在物理、经济、管理等方面应用的例题,逐步培养学生数学建模的思想。本书的这些特点在形式上是一脉相承的,既注重高等数学有关内容的形成,同时又注重展示这些内容在实际问题中是如何应用的。

本书内容涵盖了教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”中所要求的基本概念、基本理论、基本方法,以及基本运算技能,能够适应两学期制或三学期制的教学体系,同时也尝试结合高校大类招生、通识教育和模块化培养的特点,使教学内容能够灵活取舍。习题部分安排了(A)、(B)两种类型,(A)类习题是为掌握书中基本内容而设置的题目,适合所有使用本书的学生;(B)类习题是对基本内容的深

化,适合对数学要求更高的某些专业的学生。每一章的最后还配备了总复习题。

本书的结构设计是由上海大学数学系教学指导委员会以及作者们经过近两年时间酝酿讨论后确定的。全书共十一章,第一章由熊革执笔,第二、三章由王培康执笔,第四章由沈裕华执笔,第五章由何龙敏执笔,第六、八、九章由杨建生执笔,第七章由姜勤执笔,第十章由石忠锐执笔,第十一章由黄伟执笔。马和平教授对全书进行了统稿,金鼎立、冯铁男两位博士生为本书制作了精美的插图。

本书的编写得到了上海大学及教务处、理学院各级领导的关怀,得到了上海市第三期重点学科“运筹学与控制论”(S30104)以及上海市教委第五期重点学科“数学科学与技术”(J50101)的大力支持,高等教育出版社的编辑们为本书的出版做了大量高效率的工作,在此一并表示由衷的感谢。

对一门传统课程的教材进行改革,必然会面临许多困难和挑战。时代在发展,社会在进步,愿我们这本《高等数学》能够与社会的脉搏、时代的步伐同步。书中不妥与错误之处,敬请广大读者批评指正。

作者

2011年5月于上海大学

目录

第一章

函数与极限

函数是微积分学的基本研究对象，而微积分学是高等数学课程的核心内容.那么，高等数学用什么方法来研究函数呢？主要的方法就是极限.微积分中的两个基本概念——微分和积分，都是利用极限来定义的.

本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，为今后的学习奠定基础.

第一节　常用符号介绍

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号"$\in$"表示"属于"，符号"$\notin$"表示"不属于".

例如，设 A 是集合，x 是元素，则

$x\in A$ 表示：元素 x 属于集合 A.

$x\notin A$ 表示：元素 x 不属于集合 A.

$\{x\in A \mid x$ 具有性质 $P\}$ 表示：集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体.

2. 集合之间

符号"$\subseteq$"表示"包含于"；符号"$=$"表示"等于"；符号"$\varnothing$"表示"空集(合)"；符号"$\cup$"表示"并"；符号"$\cap$"表示"交"；符号"$-$"表示"差"或"余".

例如，设 A 与 B 是两个集合，

$A\subseteq B$ 表示：A 中的任意元素 x 都是 B 中的元素，或 A 是 B 的子集，或 A 被 B 包含.

$A=B$ 表示：A 与 B 相等，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

$A\subseteq B$ 且 $A\neq B$ 表示：A 是 B 的真子集.有时也表示为 $A\subset B$.

$A\cup B$ 表示：A 与 B 的并集，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

$A\cap B$ 表示：A 与 B 的交集，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

$A-B$ 表示：A 与 B 的差集或余集，即 $A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列集合,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid 存在某个自然数\ k,\ 使得\ x \in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid 对任意自然数\ k,\ 有\ x \in A_k\}.$$

二、数集符号

本书中所说的数都是实数.实数集用“R”表示.已知实数集 R 和实数轴上的点集之间可一一对应,因此也常称 R 是**实直线**.常将“数 a”说成“点 a”,反之亦然.

实数集 R 有些常用的重要子集:

自然数集:表示为“N”;**整数集**:表示为“Z”;**有理数集**:表示为“Q”.显然有

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}.$$

区间　设 $a, b \in \mathrm{R}, a<b$.常用的有限区间有

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$;闭区间　$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开半闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$;半闭半开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.常用的无限区间有

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\};[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\};(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a\}.$$

邻域　设 $a \in \mathrm{R}$,对任意 $\delta>0$,记数集

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称作**以 a 为中心、以 δ 为半径的邻域**.当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它表示为 $U(a)$,简称为 **a 的邻域**.

记数集

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

即在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 **a 的 δ 去心邻域**.当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它表示为 $\mathring{U}(a)$,简称为 **a 的去心邻域**.

三、逻辑符号

高等数学中有些符号来自于数理逻辑,使用这些符号能使定义、定理以及公式的表述更简洁、更准确.数学语言的符号化是现代数学的一大特点,本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”.

符号“$\Leftrightarrow$”表示“必要充分”,或“等价于”,或“当且仅当”.

2. 量词符号

符号“$\forall$”表示“对任意”,或“对任意一个”.

符号“$\exists$”表示“存在”，或“能找到”.

例如，应用上述符号，数集 A 有上界、有下界和有界的定义可简明地表述为

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leqslant b;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Leftrightarrow \exists a \in \mathrm{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \geqslant a;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M>0, \forall x \in A, \text{有 } |x| \leqslant M.$$

四、其他符号

符号“max”表示“最大”，它是 maximum（最大）的缩写.

符号“min”表示“最小”，它是 minimum（最小）的缩写.

例如，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个数，

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 表示：n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大数.

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 表示：n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小数.

符号“$n!$”表示“不超过 n 的所有自然数的连乘积”，读作“n 的阶乘”，即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

规定：$0! = 1$.

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积”，读作“n 的双阶乘”，例如

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

符号“C_n^m”（$n, m \in \mathrm{N}, m \leqslant n$）表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”，即

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

有公式 $\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$ 与 $\mathrm{C}_{n+1}^m = \mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m-1}$.

第二节　函数的概念

关于函数的概念，在中学数学中已经有了初步的介绍，本节对它作进一步的讨论.

一、函数的定义

世间万物，无时无刻不在运动、发展与变化之中. 自然现象如此，社会现象也是如此. 因此，当我们对某个特定的自然现象、社会现象，或某个特定的技术过程进行观察时，其中出现的各种量，一般来说也在不断变化着. 比如，在飞行过程中飞行器的高度与速度、一个电路中某电容器两端的电压与电流、某个地区的气温

与湿度等等,都在不断变化着.这些不断变化的量称为**变量**.

在很多现象中,我们会看到一个变量往往依赖于另外一个或几个变量.下面列举几个有两个变量互相联系着的例子.

例 1　真空中做自由下落运动的物体,其下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.设物体在初始时刻距离地面的高度为 h,则距离 s 与时间 t 之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad \forall t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right],$$

这里 g 是重力加速度.

例 2　球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着.r 与 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad \forall r\in[0,+\infty),$$

其中 π 是圆周率.

例 3　某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着.已知 13 时至 23 时内,任意时刻 t 与气温 T 的对应关系如图 1.1 中的气温曲线表示:横坐标表示时间 t,纵坐标表示气温 T,曲线上任意点 $P(t,T)$ 表示在时间 t 对应着的气温是 T.

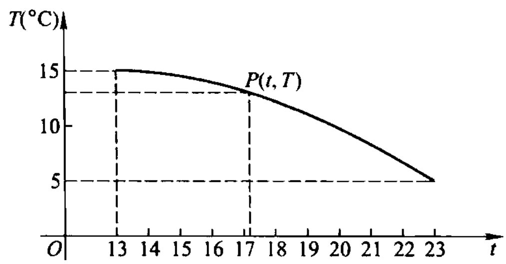


图 1.1

例 4　在标准大气压下,一定质量的水的温度 T 与其体积 V 互相联系着.实测如下表:

温度(百度表)	0	2	4	6	8	10	12	14
体积(cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

对于{0,2,4,6,8,10,12,14}中的每个温度 T 对应一个体积 V.

例 5　$\forall x\in\mathbf{R}$,对应着一个数 $y=\sin x$,即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\sin x.$$

例 6　$\forall x\in(-5,\pi]$,对应一个数 $y=3x^2+x-1$,即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=3x^2+x-1.$$

上述前四个例子,分属于不同的学科且实际意义完全不同.但是,从数学的角度来看,它们与后两个例子却有着共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,且数集合中的任意数 x,都能按照对应关系对应到 R 中的唯一一个数.

一般地,有如下的函数概念:

定义 1.1　设 A 是非空数集.若存在对应关系 f,对 A 中任意数 x,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in \mathrm{R}$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,表示为

$$f:A\to \mathrm{R},$$
$$x\mapsto y.$$

与数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,记为 $y=f(x)$. x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.数集 A 叫做函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

关于函数的定义,作如下几点说明:

(1) 用符号"$f:A\to \mathrm{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数,十分清楚、明确.它给出了确定函数的两个要素:定义域 A 和对应关系 f.所以,也常用

$$y=f(x),\quad x\in A$$

来表示一个函数.由此,我们说某两个函数相同,是指它们有相同的定义域和相同的对应关系.若两个函数仅有相同的对应关系,而定义域不同,那么这两个函数仍是不相同的.例如:$f(x)=1,x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是不相同的两个函数.另一方面,两个相同的函数,其对应关系的表达形式可以不同,例如:$\varphi(x)=|x|,x\in \mathrm{R}$ 和 $\varphi(x)=\sqrt{x^2},x\in \mathrm{R}$ 就是表达形式不同而实质相同的两个函数.

(2) 有时,并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域,而认为其定义域是自明的,即使得函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合.例如,函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,若没有指出它的定义域,那么它的定义域就是使得函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合,即闭区间 $[-1,1]=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\in \mathrm{R}\}$.

具有实际意义的函数,其定义域要受实际意义的约束.例如,半径为 r 的球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数,囿于其实际意义(半径 r 不能取负数),它的定义域是区间 $[0,+\infty)$.

(3) "$\forall x\in A$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in \mathrm{R}$",这样的对应是**单值对应**.反之,一个 $y\in f(A)$ 未必只有一个 $x\in A$,使得 $y=f(x)$.例如,函数 $y=\sin x$,对 $\forall x\in \mathrm{R}$,按照对应关系 sin ,对应唯一一个 $y=\sin x\in R$;而对 $y=1$,却有无限多个

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in \mathbf{R}, k\in \mathbf{Z}$,按照对应关系 sin ,都对应着 1,即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in \mathbf{Z}.$$

(4) 函数概念可以拓广,即 A 和 $f(A)$(或其中某一个)可不局限于是数集. 例如,定义域 A 是一切三角形的集合,对应关系规定每一个三角形与它唯一的外接圆相对应,这样在三角形集合与圆集合之间建立了"函数"关系. 又如,A 为上海大学 2011 级的新生集合,对应关系规定每一个同学与其学生证件号码(实数)相对应,这就建立了 A 与实数之间的"函数"关系.

函数概念的一般化就是集合间映射的概念.

称 $f:A\to B$ 是集合 A 与集合 B 之间的一个**映射**,如果对每一点 $x\in A$,都有唯一确定的点 $y\in B$ 与之对应. 这时我们将 y 记作 $f(x)$ 并称之为 x 的**像**,而 x 叫做 y 在 f 下的**原像**.

全体像点的集合

$$\{y\in B \mid \exists x\in A, y=f(x)\}$$

称为 A 的**像集合**,记作 $f(A)$. 显然,$f(A)\subseteq B$.

称映射 $f:A\to B$ 是**满射**,若 $f(A)=B$. 称映射 $f:A\to B$ 是**单射**,若 $\forall x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. 既是满射又是单射的映射叫做**双射**.

二、函数的表示法

在中学课程里,我们知道函数的表示法主要有三种:表格法、图形法、公式法. 其中,用图形表示函数能将函数的几何性态表现得十分明显,有助于从直观上认识函数.

设函数 $y=f(x)$ 定义在数集 A 上,称坐标平面上的点集

$$G(f)=\{(x,y) \mid x\in A, y=f(x)\}$$

是函数 $y=f(x)$ 在数集 A 上的**图形**,简称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 7　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**(如图 1.2).

定义好了符号函数之后,**绝对值函数**(如图 1.3)

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

也可写作

$$y=|x|=x\operatorname{sgn} x.$$

有些函数,其对应关系是用"一句话"给出的,并用特定的符号予以表示.

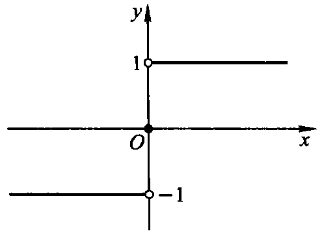


图 1.2

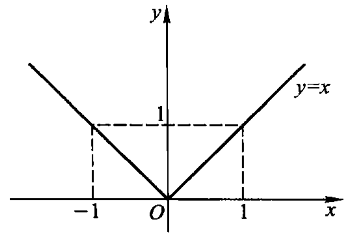


图 1.3

例 8　**地板函数**(floor function)与**天花板函数**(ceiling function).

"$\forall x\in \mathbf{R}$,对应的 y 是不大于 x 的最大整数."显然,$\forall x\in \mathbf{R}$,都对应唯一一个 y,这是一个函数,称为**地板函数**(如图 1.4),表示为 $y=[x]$ (有时也表为 $y=\lfloor x\rfloor$).

"$\forall x\in \mathbf{R}$,对应的 y 是不小于 x 的最小整数."显然,$\forall x\in \mathbf{R}$,都对应唯一一个 y,这是一个函数,称为**天花板函数**(如图 1.5),表示为 $y=\lceil x\rceil$.

不难验证,这两个函数可表示为

$$\lfloor x\rfloor=\max\{n\in \mathbf{Z}\mid n\leqslant x\};$$
$$\lceil x\rceil=\min\{n\in \mathbf{Z}\mid n\geqslant x\}.$$

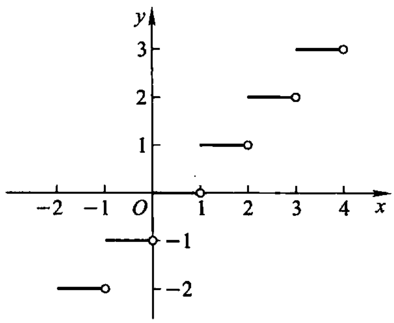


图 1.4

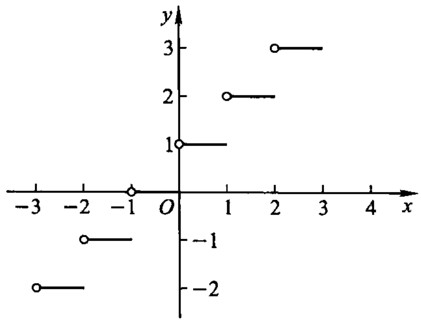


图 1.5

例 9　定义在 R 上的**狄利克雷**(Dirichlet,1805—1859,德国)**函数**

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

例 10　定义在[0,1]上的**黎曼**(Riemann,1826—1866,德国)**函数**

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\text{ 是正整数},\dfrac{p}{q}\text{是既约分数}\right),\\ 0, & x=0,1\text{ 和}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

三、具有特殊性质的四类函数

1. 有界函数

设f是定义在A上的函数. 若存在数$U(L)$，$\forall x\in A$，有

$$f(x)\leqslant U\ \ (f(x)\geqslant L),$$

则称f是A上的**有上(下)界函数**，$U(L)$是f的一个**上(下)界**.

根据定义，若$U(L)$是f的上(下)界，则任何大(小)于$U(L)$的数也是f在A上的上(下)界. 此外，若f在A上有上(下)界，则值域$f(A)$是一个有上(下)界的数集.

定义 1.2　设f是定义在A上的函数，若存在$M>0$，$\forall x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1.1}$$

则称f是A上的**有界函数**.

根据定义，若f是A上的有界函数，则意味着f在A上既有上界又有下界；或者说$f(A)$是一个有界集.

(1.1)式的几何意义是：若f是A上的有界函数，则f的图形完全落在以直线$y=M$和$y=-M$为边界的带形区域之内(如图 1.6).

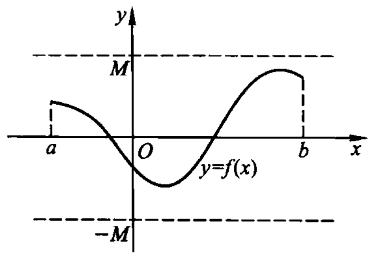


图 1.6

例如：正弦函数$y=\sin x$和余弦函数$y=\cos x$都是$\mathbf{R}$上的有界函数. 因为$\forall x\in\mathbf{R}$，都有

$$|\sin x|\leqslant 1\quad 和\quad |\cos x|\leqslant 1.$$

称函数f在数集A上是**无上界**的，若对任意数M(无论M多大)，总存在数$x_0\in A$，使得

$$f(x_0)>M.$$

对照无上界函数与有上界函数的定义，可以发现：它们的主要差别在于其中“**存在**”与“**任意**”的替换. 请读者仔细领会，并写出**无下界函数**与**无界函数**的定义.

例 11　证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上无上界.

证　$\forall M>0$，取$(0,1]$上一点$x_0=\dfrac{1}{M+1}$，有

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M,$$

故f在$(0,1]$上无上界.