高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

# 高等数学

（第六版·合订本）

# 同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅

- 知识点窍
- 逻辑推理
- 习题全解
- 全真考题
- 名师执笔
- 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

# 高等数学（第六版·合订本）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内容提要

本书是为了配合由高等教育出版社出版，同济大学应用数学系主编的《高等数学（第六版·合订本）》的教材而编写的同步辅导用书。

本书按教材内容安排全书结构，各章均包括课程学习指南、学习导引、知识要点及常考点、本节考研要求、题型、真题、方法、与课后习题全解六部分内容。全书按教材内容，针对各章节全部习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书将是高等学校研究生、本科生的重要参考书。也是教材的参考用书，并可作为自学者的辅导书。


**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学（第六版·合订本）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2011.2

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5084-8351-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012680号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：杨元泓　　封面设计：李佳

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高校经典教材同步辅导丛书<br>高等数学（第六版·合订本）同步辅导及习题全解 |
| 作　　者 | 主　编　苏志平　郭志梅 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京市梦宇印务有限公司 |
| 规　　格 | 148mm×210mm　32 开本　25.25 印张　624 千字 |
| 版　　次 | 2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 00001－13000 册 |
| 定　　价 | 26.80 元 |

# 前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式，使得高等数学成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学，我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照高等教育出版社，同济大学编《高等数学》（第六版）的章节顺序，分为上下两册，共十二章，本册为合订本第一至十二章。

各章具体体系及特点如下：

1. 课程学习指南：从课程的知识体系出发，对各个章节在全书中的位置，以及与其他章节的联系作了简明的归纳，使全书结构一目了然。

2. 学习导引：介绍要求掌握的知识点，以及本章的主要内容。

3. 知识要点及常考点：对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

4. 本节考研要求：明确考研的学习任务。

5. 题型、真题、方法：按照本章的知识要点划分题型，通过例题和真题的详细解答，引导学生思考问题，开拓广大同学的解题思路，使其能更好地掌握高等数学的基本内容和解题方法。

6. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2010 年 12 月

# 目录

## 学习导引

函数是高等数学的研究对象,极限的方法是研究函数的基本方法,本章主要学习函数及其相关概念,函数的基本性质和常见初等函数,函数极限,无穷小与无穷大等.本章是初等数学到高等数学的过渡篇,是高等数学的基础.

# 第一节 映射与函数

## 知识要点及常考点

(1) 定义:设有两个变量 $x$ 和 $y$,变量 $x$ 的变域为 $D$,如果对于 $D$ 中的每一个 $x$ 值,按照一定的对应法则,变量 $y$ 有一个确定的值与之对应,则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 $x$ 是自变量,$y$ 是因变量,变域 $D$ 为定义域,记作 $D_f$,变量 $y$ 的取值的集合称为函数的值域,记作 $Z_f$.

注　函数概念的两要素:① 定义域:自变量 $x$ 的取值范围(若函数是用解析式表示的,则定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合).② 对应法则:给定 $x$ 值,求 $y$ 值的方法.

当且仅当其定义域和对应法则完全相同时,两个函数才表示同一个函数,否则表示两个不同的函数.

(2) 高等数学中研究的对象是函数.函数概念的实质是变量之间确定的对应关系.变量之间是否有函数关系,就看是否存在一种对应法则,使得其中一个量或几个量定了,另一个量也就被唯一确定,前者是一元函数,后者是多元函数.

(3) 常量与变量、自变量与因变量是相对的.一个量在某个过程中是常量,在另一过程中可以是变量,一个量在某个过程中是自变量,在另一过程中可以是因变量,这一点既简单又重要.

(4) 函数表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y = f(x)$ 与 $g = f(t)$ 表示同一函数，此为函数表示法的“无关性”.

(1) 定义：设函数 $y = f(x)$ 的值域为 $Z_f$，如果对于 $Z_f$ 中任一 $y$ 值，从 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 $x$ 值，则称变量 $x$ 为变量 $y$ 的函数，记为：$x = \varphi(y)$，其中 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

(2) 性质：①$y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合；$y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数.

③ 严格单调函数必有反函数，且严格递增(减)的函数的反函数也必严格递增(减). 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数.

(1) 定义：设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D_1$，函数 $u = g(x)$ 在 $D$ 上有定义且 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D$ 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 $D$，变量 $u$ 称为中间变量.

(2)$g$ 与 $f$ 能构成复合函数 $f^\circ g$ 的条件：函数 $g$ 在 $D$ 上的值域 $Z_g$ 必须含在 $f(x)$ 的定义域 $D_f$ 中，即 $Z_g \cap D_f$.

(3) 结合律成立，$(f^\circ g)^\circ h = f^\circ(g^\circ h)$，但没有交换律，即 $f^\circ g \neq g^\circ f$.

(1) 定义：在自变量不同变化范围内，对应法则不同，即用不同式子来表示同一个函数称作分段函数.

(2) 常见的分段函数：

① 符号函数　$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$

②$y$ 是 $x$ 的最大整数部分，记为 $y = [x]$.

③ 狄利克雷函数　$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}; \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$

(1) 定义：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数.

(2) 基本初等函数包括五类函数：幂函数：$y = x^\mu (\mu \in R)$；指数函数 $y = a^x (a >$

0 且 $a \neq 1$)；对数函数：$y=\log_a^x(a>0$ 且 $a \neq 1)$；三角函数：如 $y=\sin x, y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；反三角函数：如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

(1) 单调性

定义：设函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有定义，若 $\forall_{x_1,x_2} \in D$，有 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 单调上升，若 $\forall_{x_1,x_2} \in D$，有 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 单调下降.

注　若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降).

(2) 奇偶性

① 定义：设 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

常考点　偶函数 $f(x)$ 的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

② 常见的奇函数和偶函数：

偶函数：$C, x^2, x^{2n}, |x|, \cos x, \sec x, e^{x^2}, \sin x^2$.

奇函数：$x, x^3, x^{2n+1}, \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x}, \sin x, \tan x, \cot x, \arcsin x, \arctan x$.

③ 奇偶函数的运算性质：

(ⅰ) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(ⅱ) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(ⅲ) 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

(3) 有界性

① 定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义，如果存在 $M>0$，使得对于一切 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 $X$ 上有界；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 $X$ 上无界.

注　函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

② 六个常见的有界函数：

$|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $(-\infty,+\infty)$

$|\arcsin x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leqslant \pi$, $[-1,1]$

$|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$, $|\arccot x| < \pi$, $(-\infty,+\infty)$

(4) 周期性

① 定义：设函数 $f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义，若存在一个与 $x$ 无关的正数 $T$，使对于任一 $x \in X$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数，把满足上式的最小正数 $T$ 称为函数的最小正周期.

易错点　①(ⅰ) 周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数.

(ⅱ) 定义中，并不要求函数的定义域有界.

② 常见的周期函数：

(ⅰ) $y=\sin x$，$y=\cos x$，最小正周期为 $2\pi$；

(ⅱ) $y=\tan x$，$y=\cot x$，最小正周期为 $\pi$.

③ 周期函数的运算性质：

(ⅰ) 若 $T$ 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(ⅱ) 若 $f(x)$，$g(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 $T$ 为周期的函数.

(ⅲ) 若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 $T_1$，$T_2$，$T_1 \neq T_2$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$，是以 $T_1$，$T_2$ 的最小公倍数为周期的函数.

(ⅳ) 若 $f(x)$ 为周期函数，则复合函数 $g[f(x)]$ 也是周期函数.

## 本节考研要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

## 题型、真题、方法

题型分析　当且仅当给定的两个函数其定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才表示同一函数，否则表示不同的函数.

**例 1** 判断下列各组函数是否相等：

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$ 与 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

思路点拨　当且仅当给定的函数其定义域和对应法则完全相同时，这些函数才表示同一函数，否则表示不同的函数.

解　(1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)\neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$、$g(x)$ 和 $h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$，故 $f(x)=g(x)=h(x)$.

**例 2** 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$；　(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

思路点拨　通过定义域和对应法则是否相同.

解　(1) $y=x^0$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

现学现练　$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$ 是否等价.(是)

## 题型 2　求函数的定义域

题型分析　求函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零；② 偶次根式的被开方数大于等于零；③ 对数的真数大于零；④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x\mid |x|\leqslant 1\}$；⑤ $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$；⑥ $\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

**例 3** 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

思路点拨　求函数的定义域时，一般主要针对一些基本形式来确定其定义域，然后再综合考虑. 基本形式可分为 $\sqrt{A}$, $\dfrac{1}{A}$, $\ln A$, $\arcsin A$, $\arccos A$ 等，其相应的定义域为 $A\geqslant 0$, $A\neq 0$, $A>0$, $|A|\leqslant 1$ 等.

解　(1) $\begin{cases}x+1>0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\begin{cases} \left|\dfrac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1, \\ 1+x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x| \leqslant |1+x|, \\ x \neq -1, \end{cases}$ 定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

**例 4** 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.（考研题）

思路点拨　先确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

解　由 $f[\varphi(x)]=1-x$，有 $e^{[\varphi(x)^2]}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x) \geqslant 0$，得 $1-x \geqslant 1$，即 $x \leqslant 0$.

现学现练　求 $\sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.（$1 \leqslant x \leqslant 4$）

题型分析

1. 观察法和变量代换法是解简单函数方程最基本的两种方法.

2. 利用函数表示法的"变量无关性"判断：当两个函数定义域相同且对应法则一致时，这两个函数表示同一个函数.

**例 5** 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$，则 $f(f(x))$ 等于(　　).（考研题）

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$

解　由题可知，$|f(x)| \leqslant 1$，所以 $f(f(x))=1$，则 $f(f(f(x)))=f(1)=1$. 故选(B).

题型分析

1. 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数既不是奇函数也不是偶函数，在判断函数奇偶性之前应先检查函数的定义域.

2. 利用 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系来判断函数的奇偶数. 若 $f(-x)=f(x)$，为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则为奇函数.

**例 6** 判断下列函数的奇偶性：