高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·华东师大数学系编

九章丛书

双色印刷

数学分析

（第四版·下册）

全程辅导及习题精解

主 编 焦艳芳 李光敏

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第四版·下册）
全程辅导及习题精解

主　编　焦艳芳　李光敏

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合华东师范大学数学系出版的《数学分析》（第四版·下册）教材而编写的配套辅导书。

全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析。针对各章节全部习题给出详细解题过程，并附以知识点窍和逻辑推理，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为工科各专业、本科学生、《数学分析》课程教学辅导材料和复习参考用书，也可作为工科考研强化复习的指导书及《数学分析》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第四版·下册）全程辅导及习题精解 / 焦艳芳，李光敏主编. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2012.1

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5084-9315-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①焦… ②李… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第273371号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨谷　封面设计：李佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析（第四版·下册）全程辅导及习题精解
作　者	主编　焦艳芳　李光敏
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　19.5 印张　431 千字
版　次	2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
印　数	0001—7000 册
定　价	21.80 元

编　委　会

（排名不分先后）

前　言

本书是华东师范大学编写的《数学分析》(第四版·下册)的配套辅导书及习题全解。

数学分析是数学专业的一门最重要的基础课。习题是数学教学中的一个重要组成部分,在数学分析中尤其如此。因为通过数学分析中的习题训练而获得的数学思想、方法、技巧和素质,可以使邻近和后继的课程的学习变得容易,从而达到融会贯通的目的。

本书是九章系列课题组根据市场调研结果,吸纳广大从事数学分析教学的老师和大学生朋友的意见精心编写而成。其中对每章的知识进行了系统的归纳和总结,对一些实例进行细致剖析、深化。对习题不仅给出详细解答,而且给出了"知识点窍"和"逻辑推理",前者精辟地点明知识点,后者全面透析题意,阐述解题思路,以培养学生正确的思维方式和逻辑推理能力。

本书在编写过程中,参考了高等教育出版社出版的《数学分析学习指导书》一书,在此深表感谢。

本书可作为大、中专院校学生学习数学分析课程的参考用书,也可作为考研学生的复习参考资料。

对于本书的不足之处,恳请读者予以批评指正,以期不断完善。

编　者

2011 年 11 月

目　录

第十二章

数项级数

内容摘要

级数的收敛性

1 级数收敛性定义

	定　义	说　明
数项级数	给定一个数列$\{a_n\}$,对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式 $u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots$ 称为**数项级数**或**常数项无穷级数**.其中 u_n 为级数的**通项**	数项级数常记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,或简记为$\sum u_n$ 例:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
部分和	数项级数的前 n 项之和记为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为数项级数**第 n 个部分和**(简称**部分和**)	
级数收敛(发散)	若数项级数的部分和数列$\{S_n\}$收敛于S(即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$),则称数项级数**收敛**,称 S 为数项级数的**和**	例:$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}(\lvert x\rvert<1)$
	若$\{S_n\}$是发散数列,则称数项级数发散 即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在或为$\pm\infty$	例:$\sum\limits_{n=1}^{2n}(-1)^n=0$ $\sum\limits_{n=1}^{2n+1}(-1)^n=-1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n=+\infty$

2 级数的基本性质

级数的性质	说　明
若级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都收敛,则对任意常数 c,d,级数$\sum(cu_n+dv_n)$亦收敛,且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$	

续表

级数的性质	说　明
级数去掉,增加或改变级数的有限个项,并不改变级数的敛散性	若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 S,则级数 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 也收敛,且其和 $R_n=S-S_n$. 级数 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的第 n 个余项,它表示以部分和 S_n 代替 S 所产生的误差
在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和	对发散级数不可随便加括号 例如:$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散,但级数加括号后为 $(-1+1)+(-1+1)+\cdots=0$
设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=S_1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=S_2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛,且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\pm b_n)=S_1\pm S_2$	
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=S$, c 是与 n 无关的常数,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ 也收敛,且 $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=cS$	

3　级数收敛的柯西准则

级数收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p 都有 $\mid u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\mid<\varepsilon$

推论:若级数收敛,则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

[说明] 可用此推论的逆否命题推断级数发散.

4　几种重要的级数

	级数	说明
等比级数	等比级数(几何级数)$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$ $\mid q\mid<1\Rightarrow$ 级数收敛,其和为 $\frac{a}{1-q}$; $\mid q\mid>1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\infty$,级数发散; $q=1\Rightarrow S_n=na$,级数发散;$q=-1\Rightarrow$ 级数发散	$0\leqslant\mid q\mid<1$ 时收敛; $\mid q\mid\geqslant 1$ 发散
调和级数	调和级数形式为:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$	调和级数是发散级数
p 级数	p 级数形式为 $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots p>1$ 收敛,$0<p\leqslant 1$ 发散	

正项级数

1 正项级数的收敛性判定法

定义:若数项级数各项都是由正数组成的级数称为**正项级数**		
收敛准则	正项级数$\sum u_n$收敛充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数M,对一切正整数n,有$S_n \leqslant M$	由此可将求$\{S_n\}$极限问题转化到估计S_n是否有上界的问题
达朗贝尔判别法(或称比式判别法)	设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$是正项级数,若 ① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$,级数$\sum u_n$收敛 ② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$或$q=+\infty$,级数$\sum u_n$发散	若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$,则推不出级数的敛散性,例: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.其$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$,但$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散,而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛
根式判别法	设$\sum u_n$为正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ ① 当$l<1$时,级数$\sum u_n$收敛 ② 当$l>1$时,级数$\sum u_n$发散	
积分判别法	原理:利用非负函数的单调性和积分性质,并以反常积分为比较对象来判断正项级数敛散性	积分余项r_n可估计,$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \leqslant r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}a_k \leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$
	设$f(x)$为$[1,+\infty)$上非负减函数,那么正项级数$\sum f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散	
比较判别法	设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数,如果存在某正数N,对一切$n>N$都有$u_n \leqslant v_n$ ① 若级数$\sum v_n$收敛,则级数$\sum u_n$也收敛 ② 若级数$\sum u_n$发散,则级数$\sum v_n$也发散	可利用已知级数的敛散性来判断所要考虑级数的敛散性
	若存在N,使当$n>N$时有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$,则 ① 由$\sum b_n$收敛$\Rightarrow \sum a_n$收敛 ② 由$\sum a_n$发散$\Rightarrow \sum b_n$发散	
	设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ ① 当$0<l<+\infty$时,级数$\sum u_n$,$\sum v_n$同时收敛或发散 ② 当$l=0$且级数$\sum v_n$收敛,级数$\sum u_n$也收敛 ③ 当$l=+\infty$且级数$\sum v_n$发散,级数$\sum u_n$也发散	$\sum v_n$可取等比级数或p级数,有时也直接研究u_n趋于零的阶

一般项级数

名称	判定定理	说明
莱布尼茨判别法	**交错级数**:若级数的各项符号正负相间,即 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots(u_n>0)$,则称为**交错级数** 若交错级数满足下述两个条件 ① 数列$\{u_n\}$单调递减 ② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 则级数收敛	用莱布尼茨判别法判别交错级数是否收敛,要考察 u_n 与 u_{n+1} 的大小,比较 u_n 与 u_{n+1} 大小的方法有三种: ① 比值法,即考察$\frac{u_{n+1}}{u_n}$是否小于1 ② 差值法,即考察 u_n-u_{n+1} 是否大于0 ③ 由 u_n 找出一个连续可导函数 $f(x)$,使 $u_n=f(n)$,考察 $f'(x)$ 是否小于0
绝对收敛	(1) 若级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 各项绝对值所组成的级数 $\|u_1\|+\|u_2\|+\cdots+\|u_n\|+\cdots$ 收敛,则称原级数**绝对收敛** (2) 若$\sum\|u_n\|$收敛,则称$\sum u_n$绝对收敛;若$\sum\|u_n\|$发散,而$\sum u_n$收敛,则称为**条件收敛** (3) 设级数$\sum u_n$绝对收敛,且其和等于S,则任意重排后得到的级数$\sum v_n$也绝对收敛,且有相同的和数	
柯西定理	若级数$\sum u_n$,$\sum v_n$都绝对收敛,则对所有乘积u_iv_j按任意顺序排列所得到的级数$\sum w_n$也绝对收敛,且其和等于两级数和的乘积	
阿贝尔判别法	设级数$\sum u_n$收敛又$\{v_n\}$单调有界,$\|v_n\|\leqslant M$,则级数$\sum u_nv_n$收敛	
狄利克雷判别法	设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$的部分和$B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$有界,$\|B_n\|\leqslant M$,又$\{a_n\}$单调递减数列,$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛	

课后习题全解

级数的收敛性(教材下册P5)

1 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

逻辑推理 先确定级数部分和 S_n 的表达式，再根据级数的收敛定义，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，若极限存在，则级数收敛.

证明 (1) 因为

$$S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$，由定义知该级数收敛，且和为 $\frac{1}{5}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的级数，故收敛于 $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，同理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛于 $\frac{1}{2}$，由级数的性质知

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)，则$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

级数收敛且和为 $\frac{3}{2}$.

(3) 因 $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

从而 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$，故该级数收敛且和为 $\frac{1}{4}$.

(4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，级数收敛且和为 $1-\sqrt{2}$.

(5)（错位相减法求部分和 S_n）$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$，则有

$$S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}(n\geqslant 2).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，级数收敛且和为 3.

2 证明:若级数$\sum u_n$发散,$c \neq 0$,则$\sum cu_n$也发散.

知识点窍 级数发散的定义:即存在正数ε_0,使对任意给定的正整数N,总存在正整数$m_0 > N$及p_0,使$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

逻辑推理 利用级数发散的定义和绝对值等式$|c\sum_{n=1}^{\infty}u_n| = |c||\sum_{n=1}^{\infty}u_n|$求解.

证明 级数$\sum u_n$发散,则存在某个正数ε_0.对任何$N \in \mathbf{N}_+$,总存在$m_0 \in \mathbf{N}_+$. $m_0 > N$及$p_0 \in \mathbf{N}_+$,有$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$,所以

$|cu_{m_0+1}+cu_{m_0+2}+\cdots+cu_{m_0+p_0}| = |c||u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant |c|\varepsilon_0$.

由此可知级数cu_n也发散.

3 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗?又若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$都是非负数,则能得出什么结论?

逻辑推理 级数发散,则存在某个正数ε_0,使$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$,再利用不等式的相关变换,即可求解.

解题过程 (i) $\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,但$\sum(u_n+v_n)$不一定发散.

例:$\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$与$\sum v_n = \sum(-\frac{1}{n})$都发散,而$\sum(u_n+v_n) = 0+0+0+\cdots+0$收敛

(ii) 若$\sum u_n$,$\sum v_n$发散,且$u_n \geqslant 0, v_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots$,则$\exists \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$.

对任何正整数N,总存在正整数$m_0(m_0 > N)$和p_0及$m_1(m_1 > N)$和p_1,有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0,$$
$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}| \geqslant \varepsilon_1.$$

由此可知

$$\begin{aligned}&|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{m_0+p_0}+v_{m_0+p_0})|\\=&|(u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0})+(v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots+v_{m_0+p_0})|\\ \geqslant&|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0.\end{aligned}$$

由柯西准则得:$\sum(u_n+v_n)$也发散.

4 证明:若数列$\{a_n\}$收敛于a,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}) = a_1-a$.

逻辑推理 由数列收敛可知$\lim_{n\to\infty}a_n = a$,则$\lim_{k\to\infty}S_k = \lim_{k\to\infty}(a_1-a_{k+1}) = a_1-a$,然后根据级数收敛定义即可得证.

证明 由数列$\{a_n\}$收敛知$\lim_{n\to\infty}a_n = a$,而$S_k = \sum_{n=1}^{k}(a_n-a_{n+1}) = a_1-a_{k+1}$,

所以$\lim_{k\to\infty}S_k = \lim_{k\to\infty}(a_1-a_{k+1}) = a_1-\lim_{k\to\infty}a_{k+1} = a_1-a$,

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}) = a_1-a$.

5 证明:若数列$\{b_n\}$有$\lim_{n\to\infty}b_n = \infty$,则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；　　　(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

逻辑推理　根据定义求解，首先应确定部分和 S_n 表达式，再求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的极限，如极限存在则级数收敛，不存在(或 $\pm\infty$) 则发散.

证明　(1) 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 的部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty$. 故级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$，级数部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$，因此 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

6　应用第 4、5 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

知识点窍　题 4、5 的结论：① 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

② 数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty(b_n\neq 0)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$.

逻辑推理　由因式分解把部分和公式表达为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$，而数列 $\{a_n\}$ 收敛易求，则再应用题 4、5 结论求出级数的和.

解题过程　(1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right),$$

而数列 $\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$ 收敛于零，且 $a_1=\frac{1}{a}$，由第 4 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}(a\neq 0).$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right],$$

而数列 $\left\{-\frac{(n-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于 0，且 $a_1=1$，由第 4 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=a_1-a=1.$$

(3) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}]$，而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于 0，

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}.$$

7　应用柯西准则判别下列级数的敛散性

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$; (2) $\sum \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$; (3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$; (4) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

知识点窍 柯西准则:级数收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p,都有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$.

逻辑推理 根据柯西准则定义求解.这里主要是寻找 ε_0,m_0 与 p_0,对于任何正整数 N,通常都是通过对绝对值不等式用缩小法找出 m_0 与 p_0 即可凑出 ε_0.

解题过程 (1) 对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$(不妨设 $\varepsilon<1$).则对 $\forall n>N$ 及 $\forall p\in\mathbf{N}_+$.

因为 $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$,所以 $2^n>\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,则

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=\left|\frac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+1}}+\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{n+p}}{2^{n+p}}\right|$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2})<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

由柯西收敛准则推得:级数 $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$,恒有 $(n+1)^2>\frac{1}{2}$,所以 $4(n+1)^2>2(n+1)^2+1$,即 $\frac{(n+1)^2}{2(n+1)^2+1}>\frac{1}{4}$.

所以对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$.对任何正整数 N,总存在正整数 $m_0(m_0>N)$ 和 $p_0=1$,

有 $|u_{m_0+1}|=\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0$.

由柯西准则知级数 $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散.

(3) 由于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减小,故

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|=\left|\frac{1}{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m_0+p}\right|$$

$$<\frac{1}{m_0+1}<\frac{1}{m_0}$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

当 $m_0>N$ 及 $p=N+1$ 时,都有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|<\varepsilon$ 成立.

由柯西准则可知级数 $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

(4) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\forall N\in\mathbf{N}_+$,及取 $m_0=2N,p_0=m_0$,则当 $m_0>N$ 时,就有

$$\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2(m_0+k)^2}}=\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+k)}$$

$$> \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{2}(m_0+m_0)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

由柯西准则知$\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$发散.

8 证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是:任给正数ε,存在某个正整数N,对一切$n > N$,总有

$$| u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n | < \varepsilon.$$

逻辑推理 由结论$| u_N + \cdots + u_n | < \varepsilon$的形式推出,用柯西准则证明。

证明 必要条件:

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则由柯西准则可知

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}_+$使得$\forall n > m > N_1$时有

$$| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n | < \varepsilon$$

取$N > N_1 + 1$,则$\forall n > N$,有

$$| u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n | < \varepsilon$$

充分条件:

若$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$,总有

$$| u_N + u_{N+1} + \cdots u_n | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

则$\forall m > N$及$p \in \mathbf{N}_+$,有

$$| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} |$$

$$\leqslant | u_N + u_{N+1} + \cdots + u_{m+p} | + | u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由柯西准则知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

9 举例说明:若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$对每个固定的p满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0$,此级数仍可能不收敛.

解题过程 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.已知此级数发散,但对每个固定的$p$,

$$\frac{p}{n+p} \leqslant u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n+p} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n+1} = 0$,

从而也有 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right) = 0.$

10 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足:加括号后的级数$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$收敛($n_1 = 0$),且在同一括号内的加数$u_{n_k+1}, \cdots, u_{n_{k+1}}$符号相同(注:对不同的括号,这个符号可以是不同的).试证原级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$亦收敛.

证明　分别记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k=\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})\text{的部分和为}T_k\text{，则}$$

$$T_k=\sum_{i=1}^{k}v_i=\sum_{i=1}^{k}(u_{n_i+1}+\cdots+u_{n_{i+1}})=\sum_{j=1}^{n_{k+1}}u_j=S_{n_{k+1}}.$$

由于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$中同一括号内的所有加数有相同的符号，因此当$n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}$时，$S_n$将单调地变化，因而

$$T_{k-1}=S_{n_k}\leqslant S_n\leqslant S_{n_{k+1}}=T_k(\text{或}\ T_k\leqslant S_n\leqslant T_{k-1}).$$

又因$\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$收敛，则存在极限

$$\lim_{k\to\infty}T_{k-1}=\lim_{k\to\infty}T_k=T,$$

且当$k\to\infty$时，随之有$n\to\infty$(反之亦然)，所以有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{k\to\infty}S_n=T.$$

这就证得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且与$\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$有相同的和.

※ 正项级数(教材下册 P17)

1　应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\dfrac{1}{n^2+a^2}$；　(2) $\sum 2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$；　(3) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$；　(5) $\sum\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$；　(6) $\sum\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum(\sqrt[n]{a}-1)(a>1)$；　(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；　(9) $\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)(a>0)$.

(10) $\sum\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$.

知识点窍　比较原则：两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，有$u_n\leqslant v_n$，则①若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；②若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

逻辑推理　应用比较原则判别级数的敛散性，最关键的是要找到合适的比较级数. 常用的比较级数有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$等.

解题过程　(1) 由于$0<\dfrac{1}{n^2+a^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，而正项级数$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛，故$\sum\dfrac{1}{n^2+a^2}$收敛.

(2) 因为当$n\geqslant1$时，$0<\dfrac{\pi}{3^n}<\dfrac{\pi}{2}$而$2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}<\pi(\dfrac{2}{3})^n$，且$\sum\pi(\dfrac{2}{3})^n$收敛，故$\sum2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$收