

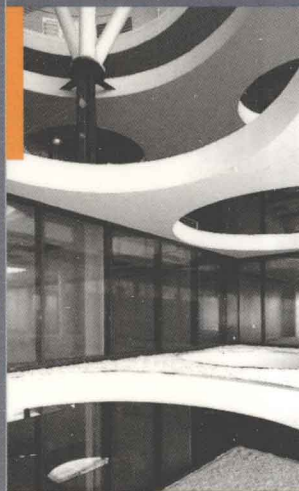


全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

大学 文科数学

■ 主 编 杨志民 卢 军
■ 副主编 唐志丰 朱国清
刘 怡
■ 编 者 陈芝花 李春艳
梁 静



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

大学文科数学

Daxue Wenke Shuxue

主 编 杨志民 卢 军
副主编 唐志丰 朱国清 刘 怡
编 者 陈芝花 李春艳 梁 静



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本教材是根据独立学院文科数学教学要求编写的,内容包括微积分、线性代数及概率统计的基础知识及其基本应用,共六章。

本着向文科类专业学生介绍数学的思想与方法、培养其应用能力的根本宗旨,编者主要从激发学生学习的兴趣入手,特别注重数学问题的背景介绍,阐明逻辑推导过程,突出数学思维,降低理论难度,加强基本方法的训练,介绍了许多数学在现代社会中的应用模型,渗透数学文化,本书各章还附有数学家传记,以提高文科类专业大学生学习数学的兴趣和自觉性。

本教材适合于大学本科的法学、广告、哲学、中文、新闻等人文类专业的学生使用,亦适合于大学本科的建筑类等课时较少的专业学生使用。教师可根据学时数,选用相应模块组织教学。

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/杨志民,卢军主编. —北京:高等教育出版社,2011.6
ISBN 978-7-04-031970-5

I. ①大… II. ①杨… ②卢… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 062261 号

策划编辑 杨波
版式设计 马敬茹

责任编辑 李茜
责任校对 杨雪莲

封面设计 赵阳
责任印制 张泽业

责任绘图 黄建英

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 中国农业出版社印刷厂
开 本 787 × 960 1/16
印 张 16.5
字 数 300 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011 年 6 月第 1 版
印 次 2011 年 6 月第 1 次印刷
定 价 24.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 31970-00

大学数学系列教材编写委员会

主任:杨志民 吴明华

副主任(按汉语拼音排序):

柴惠文 胡桂华 金义明 林仁炳

唐志丰 王志江 徐延安 张彤

宗云南

编委(按汉语拼音排序):

陈珍培 陈芝花 葛美宝 贺建辉 胡素芬

扈文佳 李春艳 李太勇 李小亮 刘静

刘伟 刘怡 楼敏 卢军 莫国良

施晓燕 陶银罗 王芬 魏艳辉 杨曼丽

姚永芳 余永清 袁中阳 曾平安 章月红

张云霞 赵雅因 周尉 朱国清

序

独立学院作为中国高等教育制度创新的产物,自产生以来已走过了十几年的历程。在短短的十几年里,独立学院快速崛起,已成为我国高等教育重要组成部分,并对实现高等教育大众化、深化高等教育改革发挥了积极的推动作用。

根据教育部关于独立学院培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”的指示精神,独立学院培养的学生既要有较系统的学科基础理论,具有一定的创新与技术革新的理论素养,又要有较强的动手能力、应用技术的能力。

大学数学课程,包括微积分、线性代数、概率论与数理统计、大学文科数学(以下统称为“大学数学系列课程”,其教材统称为“大学数学系列教材”)等,是高等学校本科生必修的基础课程,也是学生学好后继课程的基础,对实现上述培养目标起着至关重要的作用。同时,大学数学系列教材的改革和选取对保障和提高教学质量具有举足轻重的作用。

目前,绝大多数独立学院的数学教材或选用“一本”和“二本”教材,或选用高职高专教材,或自编教材。对独立学院来说,选用“一本”和“二本”教材,内容深、理论性强,不适合教学和学生学习;而选用高职高专教材,则理论过简,脱离了“本科”培养层次的要求,这显然不符合独立学院培养目标的要求。组织教材改革,编写适合独立学院特色的大学数学系列教材,是提高独立学院竞争力、实现其人才培养目标的迫在眉睫的工作。

2009年5月20日,由高等教育出版社牵头,浙江省8所独立学院(浙江工业大学之江学院、嘉兴学院南湖学院、绍兴文理学院元培学院、浙江大学城市学院、浙江工商大学杭州商学院、浙江理工大学科技与艺术学院、浙江农林大学天目学院、中国计量学院现代科技学院)和浙江树人大学的数学教学负责人齐聚杭州,举行了“独立学院数学教材研讨会”,申报“独立学院数学基础课程内容与方法改革”课题(项目编号:FIB070335-B2-12),并成立了教材编写委员会,从此拉开了浙江省独立学院大学数学系列教材改革的序幕。此后,编写委员会多次召开会议,对教材规划的制定、主参编人员的甄选和书稿评审等编写细节进行了认真的研讨,达成共识,并分工编写。

今天,由浙江省9所院校联合编写的独立学院大学数学系列教材已经准备正式出版并投入使用,这是“独立学院数学基础课程内容与方法改革”课题的一

个标志性成果,相信对推动独立学院数学教学有着深远的意义。

独立学院大学数学系列教材的编写,符合在新机制、新模式下探索和创新高层次应用型人才培养的要求。编写遵循“重基础知识轻理论叙述”、“重实际应用轻抽象推导”、“重能力培养轻计算技巧”的指导原则,以独立学院的办学性质、专业特点、培养目标、教学要求为依据,深入浅出,着力提高独立学院的数学教学质量。

遵循“重基础知识轻理论叙述”的原则。独立学院大学数学系列教材体现内容的可读性和可教性,力求做到由浅入深,深入浅出,便于教学和学生自学。根据独立学院人才培养目标,教材在保留传统的数学课程知识体系的前提下,淡化抽象的数学理论,注重具体的应用,但又不失数学的本质,以激发学生的学习兴趣、提高学生的学习热情、培养学生的学习方法为突破点,介绍数学的基本知识。

遵循“重实际应用轻抽象推导”的原则。独立学院大学数学系列教材体现“实践到理论、再到实践”的认识规律,从概念的引入到具体的例子,从定理的证明到定理的应用,力求在几何和物理的实际背景中进行介绍和论述,并且给出详尽的计算方法和丰富的例题。从应用的需要出发,突出概念的本质,贯穿“问题—模型—应用”的思想,加强应用实例的分析讲解,培养学生的应用意识和能力。数学中每一个概念的诞生都来源于实践,因此我们以“解决问题”为线索,为了解决实际问题才引入一个“新”概念,向学生展示数学中概念及定理“发现”的过程。这些不仅体现了数学中的理论都是实际问题的高度抽象,更体现了数学的本质。

遵循“重能力培养轻计算技巧”的原则。独立学院大学数学系列教材对传统内容进行精简合并,删除一些烦琐和高难度的计算。教材的编写服务于独立学院应用型、外向型、复合型人才的培养模式,适合应用型本科院校的办学特色,注重独立学院学生实际应用能力和创新能力的培养,有效提升独立学院毕业生的就业核心竞争力。

独立学院大学数学系列教材的编写贯彻了为培养“应用型高级专门人才”的教学和科研服务的基本原则。主编、参编人员均为有多年独立学院教学经验、治学严谨的优秀教师。在教学上各有所长、来自不同院校的教师以高度的社会责任感,协同配合,相互探讨,相互交流。可以说独立学院大学数学系列教材的完成是所有参编教师辛勤工作的共同成果。

我们将进一步适应新形势新任务的要求,针对独立学院发展的实际需要,总结经验,不断完善和改进,努力将本系列教材打造成在全国具有一定影响力的高质量的独立学院教材。

杨志民 吴明华

2010年10月于杭州

前 言

本书是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题研究成果之一,是面向独立学院文科类专业学生编写的大学文科数学教材。

数学作为研究现实世界数量关系和空间形式的一门科学,既是科学乃至艺术的工具,又是数学精神的体现。“数学是科学的语言”、“数学是科学的皇冠”、“数学是思维的体操”、“数学是现代高科技的基础和先导”、“数学是思维形式的艺术”、“数学是用符号写成的诗歌”等等,这些来自不同视角的对数学的描述,足以说明数学是大学文科类专业学生的必修科目。

根据大学文科类专业特点,本教材试图从数学的实际背景出发,采取形式化与非形式化相结合的方式,简明扼要地介绍大学文科类专业所需的数学知识。围绕主要的数学理论和方法,采取夹叙夹议的表述形式,一方面展现数学发生发展的来龙去脉,另一方面保持数学特有的形式化特征。

本教材具有以下特点:

1. 内容紧凑、结构合理,用不多的篇幅涵盖一元函数微积分、线性代数和概率论与数理统计的基础知识及其基本应用。

2. 结合大学文科学生的特点,在注意数学严谨性的同时,更加注重数学背景介绍,阐明逻辑推理过程,并穿插历史人物与故事的介绍,渗透数学文化,提升文科学生的学习兴趣。

3. 语言简明、通俗易懂、难度适宜,理论叙述清楚、例题习题丰富。

教材共分为六章,由杨志民、卢军担任主编,第一章由卢军编写,第二章由李春艳编写,第三章由刘怡编写,第四章由陈芝花编写,第五章由唐志丰编写,第六章由朱国清、梁静编写,全书由杨志民和卢军统稿、校对。

在教材的编写过程中,得到了浙江工业大学周明华教授、邱继征教授、方照琴副教授的指导和帮助,同时得到高等教育出版社大力支持,在此表示感谢。

由于作者的水平有限,书中难免存在不当之处,敬请读者批评、指正。

作 者

2010年12月28日

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1.1 实数集	1
一、实数的基本性质	1
二、距离 绝对值	2
三、区间 邻域	2
§ 1.2 函数	2
一、函数概念	2
二、函数表示法	3
三、分段函数	5
四、函数的几种特性	6
五、反函数	7
六、基本初等函数	8
七、复合函数	12
八、初等函数	12
§ 1.3 数列极限	13
一、数列极限的定性概念	13
二、数列极限的定量概念	15
三、数列极限的性质	16
四、数列极限的运算	16
§ 1.4 函数的极限	19
一、函数极限的概念	19
二、函数极限的性质与运算法则	23
三、无穷小量与无穷大量	24
四、两个重要极限	27
§ 1.5 函数的连续性	28
一、函数的连续性概念	28
二、函数的间断点	29
三、初等函数的连续性	30
四、闭区间上连续函数的性质	31

人物传记	32
习题一	35
第二章 导数及其应用	39
§ 2.1 导数的概念	39
一、概念的引入	39
二、导数的概念	40
三、导数的几何意义	45
四、函数的连续性与可导性之间的关系	45
§ 2.2 导数的运算法则	46
一、函数和、差、积、商的求导法则	46
二、复合函数的求导法则	47
§ 2.3 隐函数与高阶导数的概念及运算法则	49
一、隐函数求导法则	49
二、对数求导法	50
三、高阶导数	51
§ 2.4 微分概念及运算法则	52
一、微分的概念	52
二、微分基本公式和运算法则	54
三、微分的应用	55
§ 2.5 中值定理	56
一、罗尔定理	57
二、拉格朗日定理	57
§ 2.6 洛必达法则	59
一、两个基本类型不定式	59
二、其他类型不定式	61
§ 2.7 导数在研究函数形态中的应用	63
一、函数的单调性	63
二、函数的极值	65
三、函数的最值	67
人物传记	68
习题二	72
第三章 不定积分	77
§ 3.1 不定积分概念与基本积分公式	77
一、原函数与不定积分概念	77
二、基本积分表	79

§ 3.2 积分方法	81
一、第一类换元法(凑微分法)	81
二、第二类换元法(变量代换法)	84
三、分部积分法	86
§ 3.3 微分方程简介	88
一、微分方程基本概念	88
二、可分离变量的一阶方程与齐次方程	89
三、齐次变量型方程	90
四、一阶线性方程	91
五、一阶方程应用举例	94
人物传记	96
习题三	97
第四章 定积分及其应用	99
§ 4.1 定积分概念	99
§ 4.2 定积分的性质	103
§ 4.3 微积分基本定理	106
一、积分上限函数及其导数	106
二、牛顿-莱布尼茨公式	108
§ 4.4 定积分的换元法与分部积分法	110
一、定积分的换元法	110
二、定积分的分部积分法	113
§ 4.5 广义积分	114
一、无穷限的广义积分	114
二、无界函数的广义积分	116
§ 4.6 定积分的应用	117
一、平面图形的面积	118
二、空间立体的体积	120
人物传记	121
习题四	127
第五章 线性代数简介	129
§ 5.1 行列式的定义	129
一、二阶和三阶行列式	129
二、 n 阶行列式	132
§ 5.2 行列式的性质与计算	134
一、行列式的性质	134

二、行列式的计算	137
§ 5.3 克拉默法则	139
§ 5.4 矩阵的概念	141
§ 5.5 矩阵的运算	143
一、矩阵的加法和减法	143
二、数与矩阵相乘	144
三、矩阵的乘法	144
四、矩阵的转置	146
§ 5.6 矩阵的简单应用	147
§ 5.7 用矩阵的初等行变换解线性方程组	149
人物传记	155
习题五	159
第六章 概率论与数理统计初步	163
§ 6.1 随机现象、随机试验、随机事件	163
§ 6.2 随机事件之间的关系与运算	165
§ 6.3 随机事件的概率	167
§ 6.4 等可能概型的概率计算	169
§ 6.5 条件概率与独立性	171
§ 6.6 伯努利概型与二项概率	175
§ 6.7 全概率公式与贝叶斯公式	177
§ 6.8 随机变量及其分布函数	179
§ 6.9 离散型随机变量的概率分布	181
§ 6.10 连续型随机变量及其概率密度	184
§ 6.11 随机变量的数字特征	186
§ 6.12 数理统计的基本概念	191
§ 6.13 参数估计问题	201
一、矩估计	202
二、极大似然估计	204
三、估计量的评选标准	209
四、置信区间	213
五、正态总体下未知参数的置信区间	216
人物传记	221
习题六	221
习题答案	228
附表	238

第一章 函数与极限

自从 17 世纪上半叶笛卡儿创建解析几何之后,变量便进入了数学.到 17 世纪下半叶,牛顿和莱布尼茨发展了前人对变量问题的研究,各自独立创立了研究函数的微分、积分概念以及有关理论和应用的数学分支——微积分,以后又经过了许多数学家的不断钻研,微积分理论才得以逐渐完善,从而使微积分成为一门新学科,同时也促进了近代数学的发展.

§ 1.1 实数集

人们对于数的认识是逐步发展的,首先是自然数 $0, 1, 2, \dots$ (其中对 0 的认识要晚一些),然后,由于数学自身的发展以及社会实践的需要,又发展到整数、有理数、无理数.全体有理数与无理数合称为实数.

为了研究的方便,19 世纪 70 年代康托尔定义:把具有某种特定性质或规律的事物全体称为集合(简称集),组成这个集合的每个事物称为该集合的元素.若集的元素个数是有限的,则称为有限集,否则就称为无限集.

若集的元素由全体实数所组成,则该集称为实数集,表示为 \mathbf{R} .

\mathbf{R} 的子集简称数集.自然数集 \mathbf{N} ,整数集 \mathbf{Z} ,有理数集 \mathbf{Q} ,都是 \mathbf{R} 的真子集,且有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.例如,三个数 $1, 3, 5$ 组成的集合 A 可以记作: $A = \{1, 3, 5\}$,也可以记作 $A = \{2n-1 | 0 < n < 4\}$.

为了使数的研究更直观,人们引进了数轴的概念,每个实数都可以在数轴上找到一个点来表示它,反之,数轴上的每个点都可以用一个实数来表示.这样,就把全体实数与数轴上的点一一对应起来了.

一、实数的基本性质

1. 有序性 对任意两个实数 x, y ,必有 $x < y$ 或者 $x = y$ 或者 $x > y$,三者必居其一,不得兼之.

2. 稠密性 在任意两个不相等的实数之间,总存在实数.

3. 连续性 实数能与数轴上的点建立一一对应的关系.

注意:尽管有理数在数轴上对应的点(称为有理点)是处处稠密的,但它们并

没有充满整个数轴,它们之间还有许多空隙,这些空隙处对应的点是无理数,因此,有理数没有连续性.

二、距离 绝对值

对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 定义 x 的绝对值 $|x|$ 为 $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0, \end{cases}$ $|x|$ 表示数轴

上点 x 与原点之间的距离. $|x-a|$ 表示数轴上点 x 与点 a 之间的距离.

绝对值的基本性质: 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$,

- $|x-y| < a$ 等价于 $y-a < x < y+a$ ($a > 0$);
 $|x-y| > a$ 等价于 $x < y-a$ 或 $x > y+a$ ($a > 0$).
- $\| |x| - |y| \| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

三、区间 邻域

1. 区间 区间是实数集 \mathbf{R} 的特殊子集, 设 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, 则数集 $\{x | a < x < b\}$ 表示数轴上 a 与 b 两点间一切点的全体, 称为开区间, 记为 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$. 类似地定义:

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 与 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$;

无限区间 $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$; $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$;

$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$; $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x | x \text{ 是任何实数} \} = \mathbf{R}$,

其中正无穷 $+\infty$ 与负无穷 $-\infty$ 只是记号, 不能看作实数.

2. 邻域 邻域是研究函数的分析性质的另外一个实数集 \mathbf{R} 的特殊子集.

设 $a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 则称数集 $\{x | |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 其中 a 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的中心, δ 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的半径.

称数集 $\{x | 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$. 当不必指明邻域的半径时, 用 $U(a), \dot{U}(a)$ 表示点 a 的邻域和点 a 的去心邻域.

§ 1.2 函 数

一、函数概念

人们在观察自然现象或技术过程中, 经常会涉及各种不同的量, 其中有的量

保持固定的数值,这种量称为常量,一般用 a, b, c, \dots 表示;另一些量在不断变化,这种量称为变量,一般用 x, y, z, \dots 表示. 常量在数轴上表示一个定点,而变量在数轴上则不表示一个定点.

在一个自然现象或技术过程中,经常会有几个量同时变化,而且它们之间是互相关联、相互制约着的. 例如圆的面积 A 与圆的半径 r 之间的联系可以表示为 $A = \pi r^2$. 心理学研究表明,小学生对新概念的接受能力 G (即学习兴趣、注意力、理解力的某种量度) 随时间 t 的变化规律为 $G(t) = -0.1t^2 + 2.6t + 43, t \in [0, 30]$, 接受能力曲线为开口向下的抛物线,如图 1.1 所示. 通过这种关系,就可以了解小学生的接受能力随时间的变化情况为先上升后下降.

以上这种在某个变化过程中两个变量之间的依赖关系,它们的数学形式就是函数.

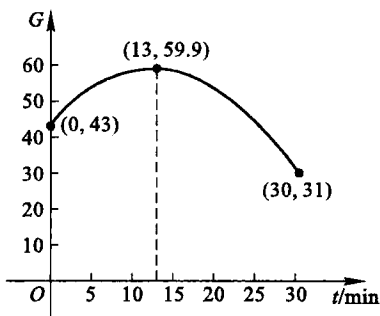


图 1.1

函数定义: 设 A, B 是两个非空数集, 在某个变化过程中有两个变量 x, y , 如果对每个 $x \in A$, 依照某个对应规则 f , 都有唯一确定的值 $y \in B$ 与之对应, 则称对应规则 f 为定义在 A 上的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$, x 称为自变量, y 称为因变量, 习惯上也称为 x 的函数. A 称为函数的定义域, 和 x 的值对应的 y 的值 $f(x)$ 称为函数值, 而所有函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in A\}$ 称为函数的值域, 记作 $f(A)$.

在函数定义中, 由函数的定义域与对应法则确定了函数的值域, 因而, 定义域与对应法则为函数的两个主导要素, 这一模型如同一部机器, 把 A 的任一原材料 x 输入 $f(\quad)$, 便能产出实数 $y = f(x) \in f(A)$. 两个函数当且仅当它们的定义域与对应法则分别相同时, 这两个函数才相等. 例如 $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln |x|, h(x) = 2 \ln x$, 就有 $f = g \neq h$, 这是由于 h 的定义域与 f, g 的定义域不同.

二、函数表示法

由中学内容可知, 函数的表示法通常有解析法 (或公式法)、列表法和图像法.

解析法是把两个变量之间的函数关系直接用公式或数学式子表示出来. 解析法的优点在于能做具体运算, 并且利于理论研究, 它是表示函数的基本方法. 然而, 不是所有的函数都能表示为解析式, 在实际应用中, 常采用一些数学方法, 把不能表示为解析式的函数关系近似地表示为解析式, 例如在自然科学和社会

科学中,常采用线性化的方法近似地描述某些变量的变化规律.

列表法是把自变量与因变量的一些对应值用表格列出.列表法的优点在于能直接查得自变量对应的函数值,因而在生产和管理部门得到广泛应用,一些科技手册也常采用这种方法.例如水文站水位观测数据表、气象站温度、风速等气象观测数据表以及生产车间的生产进度表等.

图像法是用坐标平面上的点或曲线表示纵坐标 y 与横坐标 x 的函数关系.

图像法的优点是能借助曲线直观地观察因变量随自变量变化的特性,它的缺点是不宜计算,因而不便于作精确的理论研究.

上述三种表示法常可以相互转换,从科学研究的途径来说,往往是先由试验观测或搜集到的材料列出表格,再作出图像,然后,根据图像研究变量间的变化规律,最后给出函数的解析表达式.

函数的定义域通常根据以下两种情形来确定:在实际问题中,函数的定义域由问题的实际意义来确定;当函数是用数学式子表示时,它的定义域就约定为使数学式子有意义的自变量的取值范围.

例 1 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$ 的定义域.

解 $f(x)$ 是用数学式子表示的函数,它的定义域就为使数学式子有意义的 x 的全体.

由

$$\begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \ln(2x-1) \neq 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2]$.

在金融业务中,经常要考虑利息问题,通常有单利和复利两种方式.

例 2 单利问题 设 p_0 是本金, r 是计息期的利率, n 是计息期数, I 是 n 个计息期应付的单利, p 是本利和,求本利和 p 与计息期数 n 的函数关系.

解 一个计息期的利息为 $p_0 r$, n 个计息期应付的单利 $I = p_0 r n$, 本利和为

$$p = p_0 + I = p_0 + p_0 r n = p_0 (1 + r n)$$

银行里的定期存款利率就是按单利计算的.

例 3 复利问题 复利是每期结算一次,并将该期的本利和作为下一期的

本金.

设 p_0 是本金, r 是计息期的利率, t 是计息期数, 按复利计算, p_t 是 t 个计息期满后本利和, 求本利和 p_t 与计息期数 t 的函数关系.

解 第一个计息期满后本利和为

$$p_1 = p_0 + p_0 r = p_0 (1+r)$$

第二个计息期满后本利和为

$$p_2 = p_1 + p_1 r = p_0 (1+r)^2$$

因此, 第 t 个计息期满后本利和为

$$p_t = p_0 (1+r)^t$$

如果每期结算 m 次, 每次利率为 $\frac{r}{m}$, 则原 t 个计息期变成结算 mt 次, 因此, 第 t 个计息期满后本利和为

$$p_t = p_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

三、分段函数

有些函数在其定义域上的对应法则不能由一个式子表示, 而是在定义域的不同区段上由不同的式子来表示, 这样的函数叫做分段函数.

例 4 书店以 a 元/本的价格销售某本书, 若购买者一次购买 1 000 本以上, 则超出 1 000 册的书按 8 折优惠. (1) 试将一次销售收入 R 表示成销售量 x 的函数; (2) 若每本书的进价为 b 元, 试写出一次的利润 L 与销售量 x 之间的函数关系.

解 (1) 由题设知, 当 $0 \leq x \leq 1\,000$ 时, 销售价为 a 元/本, 故

$$R(x) = ax;$$

当 $x > 1\,000$ 时, 其中 1 000 本的销售价为 a 元/本, 而多于 1 000 本时, 即 $(x-1\,000)$ 本的销售价为 $0.8a$ 元/本, 故

$$R(x) = 1\,000a + 0.8a(x-1\,000) = 0.8ax + 200a$$

综上所述得

$$R(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1\,000 \\ 0.8ax + 200a, & x > 1\,000 \end{cases}$$

(2) 由题设知, 销售 x 本书的成本为 bx , 故

$$L(x) = R(x) - bx = \begin{cases} ax - bx, & 0 \leq x \leq 1\,000 \\ (0.8a - b)x + 200a, & x > 1\,000 \end{cases}$$

以上两个函数的定义域都为 $[0, +\infty)$.