面向21世纪全国高职高专数学规划教材

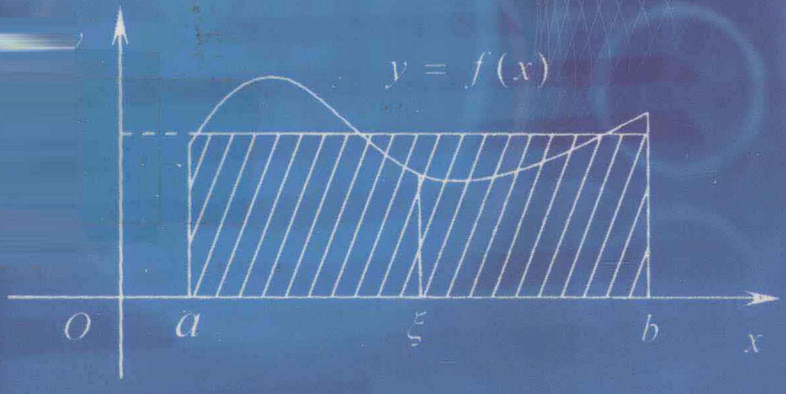
# 高等数学

GAODENG SHUXUE

（上）

吕保献　郭明普　主　编
吕冰清　周成林　副主编

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$




北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

# 高等数学（上）

吕保献　郭明普　主编

吕冰清　周成林　副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高职高专院校的培养目标编写的。在内容编排上，删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

本套教材分两册出版。上册内容包括：函数的极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，空间解析几何，多元函数微积分初步，常微分方程，无穷级数等内容。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学（上）/吕保献，郭明普主编. —北京：北京大学出版社，2005.7
（面向21世纪全国高职高专数学规划教材）

ISBN 7-301-09125-7

I. 高… II. ①吕…②郭… III. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第069437号

书　　名：高等数学（上）
著作责任者：吕保献　郭明普　主编
责 任 编 辑：王妍
标 准 书 号：ISBN7-301-09125-7/O・0649
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　22.75印张　490千字
2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
定　　价：34.00元

# 前　　言

本书根据教育部现行全日制普通高级中学教学大纲和高等职业技术教育数学教学大纲及教学基本要求，以应用为目的，以“必需、够用”为度，由高职高专院校中长期从事高职数学教学的资深教师编写。可供招收高中毕业生的二年制或三年制高职高专院校的学生使用。也可作为高职高专成人教育教材和自学考试学生的课外教材，同时也供一般工程技术人员参考，适合教师教学和学生自学。

本套数学教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高职高专院校的培养目标编写的，以降低理论、加强应用、注重基础、强化能力、适当更新、稳定体系为指导思想。在内容编排上，注重理论联系实际，注意由浅入深，由易到难，由具体到抽象，循序渐进，并兼顾体系，加强素质教育和能力方面的培养。在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯；在结构的处理上注意与现行高中及中职教材内容相衔接，同时注意吸收国内外数学教材的优点，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点。为了适应计算机应用发展的步伐，本书特意增加了Mathematica软件的应用方面的内容。

本套教材分两册出版。上册内容包括：函数的极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，空间解析几何，多元函数微积分初步，常微分方程，无穷级数等内容；下册内容包括：拉普拉斯变换，线性代数初步，概率论初步，数理统计初步，Mathematica软件的应用等内容。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

教材中每节后面配有一定数量的习题。每章后面的复习题分主、客观题两类，供复习巩固本章内容和习题课选用。书末附有习题答案供参考。

上册由吕保献、郭明普任主编，吕保献负责最后统稿。其中第1章、第3章由郭明普编写，第2章由潘劲松编写，第4章、第5章由杨辉编写，第6章由吕冰清编写，第7章由杨朝晖编写，第8章由薛洪编写，第9章由原新凤编写。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请教师和读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2005年2月

# 目 录

第1章 函数的极限与连续……1
1.1 初等函数……1
1.1.1 函数的概念……1
1.1.2 基本初等函数……5
1.1.3 复合函数、初等函数……9
1.1.4 建立函数关系举例……10
1.2 函数的极限……12
1.2.1 数列的极限……12
1.2.2 函数的极限……15
1.3 极限的运算……20
1.3.1 极限运算法则……20
1.3.2 两个重要极限……22
1.4 无穷小量与无穷大量……24
1.4.1 无穷小量……24
1.4.2 无穷大量……26
1.5 函数的连续性……28
1.5.1 连续函数的概念……28
1.5.2 函数的间断点……30
1.5.3 初等函数的连续性……31
1.5.4 闭区间上连续函数的性质……33
复习题1……35
第2章 导数与微分……36
2.1 导数的概念……36
2.1.1 导数的定义……36
2.1.2 几个基本初等函数的导数……38
2.1.3 导数的几何意义……42
2.1.4 函数可导与连续的关系……43
2.2 导数的四则运算……44
2.2.1 函数和、差的求导法则……44
2.2.2 函数积的求导法则……45
2.2.3 函数商的求导法则……46
2.3 初等函数的求导……48
2.3.1 复合函数的求导法则……48
2.3.2 反函数的导数……51
2.3.3 基本初等函数求导公式表……52
2.4 高阶导数……55
2.4.1 高阶导数的定义及求法……55
2.4.2 二阶导数的力学意义……57
2.5 隐函数及参数方程所确定的函数的导数……58
2.5.1 隐函数的导数……58
2.5.2 对数求导法……59
2.5.3 由参数方程所确定的函数的导数……60
2.6 微分及其运算……62
2.6.1 微分的定义及表达式……63
2.6.2 基本初等函数的微分公式和运算法则……64
2.6.3 微分形式的不变性……65
2.6.4 微分的近似计算……66
复习题2……68
第3章 导数的应用……71
3.1 中值定理……71
3.1.1 罗尔定理……71
3.1.2 拉格朗日中值定理……72
*3.1.3 柯西中值定理……73
3.2 洛必达法则……74
3.3 函数的单调性与极值……78
3.3.1 函数的单调性……78
3.3.2 函数的极值……80
3.3.3 函数的最大值与最小值……83
3.4 函数图形的描绘……86
3.4.1 曲线的凹凸与拐点……86
3.4.2 曲线的渐近线……88
3.4.3 函数图形的描绘……90
复习题3……92
第4章 不定积分……95
4.1 不定积分的概念……95
4.1.1 原函数……95
4.1.2 不定积分……96
4.1.3 不定积分的性质……97
4.2 积分的基本公式和法则……98
4.2.1 积分基本公式……98
4.2.2 积分的基本运算法则……99

4.2.3 直接积分法 ........ 100
4.3 换元积分法 ........ 102
4.3.1 第一类换元积分法（凑微分法） ........ 102
4.3.2 第二类换元积分法 ........ 105
4.4 分部积分法 ........ 109
4.5 积分表的应用 ........ 112
复习题 4 ........ 114

第 5 章 定积分及其应用 ........ 117

5.1 定积分的概念 ........ 117
5.1.1 定积分的概念 ........ 117
5.1.2 定积分的几何意义 ........ 121
5.1.3 定积分的性质 ........ 122
5.2 牛顿－莱布尼兹公式 ........ 126
5.2.1 积分上限函数（变上限函数） ........ 126
5.2.2 变上限函数的导数 ........ 127
5.2.3 定积分的计算公式 ........ 128
5.3 定积分的计算 ........ 131
5.3.1 定积分的换元法 ........ 131
5.3.2 定积分的分部积分法 ........ 133
5.4 定积分的应用 ........ 134
5.4.1 元素法 ........ 134
5.4.2 平面图形的面积 ........ 136
5.4.3 旋转体的体积 ........ 138
*5.4.4 平面曲线的弧长 ........ 140
*5.4.5 变力所做的功 ........ 141
5.5 广义积分 ........ 143
5.5.1 无穷区间上的广义积分 ........ 144
*5.5.2 无界函数的广义积分 ........ 146
复习题 5 ........ 148

第 6 章 空间解析几何 ........ 150

6.1 空间直角体系 ........ 150
6.1.1 空间直角体系 ........ 150
6.1.2 空间点的直角坐标 ........ 151
6.1.3 空间两点间的距离 ........ 152
6.2 向量的概念及运算 ........ 154
6.2.1 向量的基本概念 ........ 154
6.2.2 向量的线性运算 ........ 154
6.2.3 向量在坐标轴上的投影 ........ 156
6.2.4 向量的坐标表示 ........ 156
6.2.5 用向量的坐标进行向量的线性运算 ........ 158
6.3 向量的数量积与向量积 ........ 159
6.3.1 两向量数量积的定义及性质 ........ 159
6.3.2 两向量数量积的直角坐标运算 ........ 161
6.3.3 两向量的向量积的定义及性质 ........ 162
6.3.4 向量积的直角坐标运算 ........ 163
6.4 平面方程 ........ 166
6.4.1 平面及其方程 ........ 166
6.4.2 两平面间的关系 ........ 169
6.4.3 点到平面的距离 ........ 169
6.5 空间直线方程 ........ 171
6.5.1 空间直线的方程 ........ 171
6.5.2 两直线间的关系 ........ 173
6.5.3 直线与平面的位置关系 ........ 174
6.6 常见的曲面方程 ........ 177
6.6.1 曲面与方程 ........ 177
6.6.2 常见的二次曲面 ........ 178
复习题 6 ........ 184

第 7 章 多元函数微积分初步 ........ 186

7.1 多元函数的概念 ........ 186
7.1.1 多元函数的概念 ........ 186
7.1.2 二元函数的极限 ........ 190
7.1.3 二元函数的连续性 ........ 192
7.2 偏导数高阶偏导数 ........ 195
7.2.1 偏导数的概念 ........ 195
7.2.2 高阶偏导数 ........ 199
7.3 全微分及其简单应用 ........ 202
7.3.1 全增量和全微分的概念 ........ 202
7.3.2 可微与可导的关系 ........ 203
7.3.3 全微分在近似计算中的应用 ........ 205
7.4 复合函数、隐函数的偏导数 ........ 207
7.4.1 复合函数的求导法则 ........ 207
7.4.2 隐函数求导法则 ........ 211
7.5 多元函数的极值 ........ 214
7.5.1 多元函数的极值 ........ 214
7.5.2 多元函数的最大值与最小值 ........ 215
7.5.3 条件极值 ........ 216
7.6 多元函数微分法的几何应用 ........ 219
7.6.1 空间曲线的切线与法平面 ........ 219
7.6.2 空间曲面的切平面与法线 ........ 220

7.7 二重积分 ........ 223
7.7.1 二重积分的概念 ........ 223
7.7.2 二重积分的计算与应用 ........ 226
复习题 7 ........ 236

第 8 章 常微分方程 ........ 238

8.1 微分方程的基本概念 ........ 238
8.1.1 引例 ........ 238
8.1.2 微分方程的基本概念 ........ 239
8.2 变量可分离的微分方程及齐次微分方程 ........ 242
8.2.1 可分离变量的微分方程 ........ 242
8.2.2 齐次微分方程 ........ 244
8.3 一阶线性微分方程 ........ 248
8.4 二阶常系数线性齐次微分方程 ........ 253
8.4.1 常系数线性齐次微分方程解的结构 ........ 253
8.4.2 二阶常系数线性齐次微分方程的解法 ........ 254
8.5 二阶常系数线性非齐次微分方程 ........ 259
8.6 微分方程应用举例 ........ 268
复习题 8 ........ 273

第 9 章 无穷级数 ........ 276

9.1 无穷级数的概念 ........ 276
9.1.1 数项级数的概念 ........ 276
9.1.2 无穷级数的基本性质 ........ 279
9.1.3 级数收敛的必要条件 ........ 280
9.2 数项级数审敛法 ........ 282
9.2.1 正项级数审敛法 ........ 282
9.2.2 交错级数审敛法 ........ 286
9.2.3 绝对收敛与条件收敛 ........ 287
9.3 幂级数 ........ 289
9.3.1 函数项级数 ........ 289
9.3.2 幂级数及其收敛区间 ........ 290
9.3.3 幂级数运算和性质 ........ 294
9.4 函数的幂级数展开 ........ 298
9.4.1 泰勒级数与麦克劳林级数 ........ 299
9.4.2 函数展成泰勒级数 ........ 302
9.5 傅里叶级数 ........ 305
9.5.1 三角函数系的正交性 ........ 306
9.5.2 周期为 $2\pi$ 的函数展开成傅里叶级数 ........ 306
9.5.3 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 ........ 313
9.5.4 周期延拓 ........ 315
9.5.5 在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数 ........ 316
复习题 9 ........ 318

附录 常用积分表 ........ 320

习题参考答案 ........ 329

# 第 1 章　函数的极限与连续

极限是现代数学的最基本的概念，是学习微积分学的重要基础. 在后面的几章学习中可以看到，微积分中的重要概念都是通过极限来定义的. 本章将介绍极限的概念、性质及运算法则，在此基础上建立函数连续的概念，并讨论连续函数的性质.

## 1.1 初等函数

### 1.1.1 函数的概念

1. *函数的定义*

设 $D$ 是一个数集，如果对于 $D$ 中的每一个数 $x$，依照一定的对应关系 $f$，都有惟一确定的数值 $y$ 与之对应，那么 $y$ 就叫做定义在数集 $D$ 上的 $x$ 的**函数**，记作 $y=f(x)$ $x$ 叫做函数的**自变量**，数集 $D$ 叫做函数的**定义域**. 函数 $y$ 的取值范围 $M$ 叫做函数的**值域**.

如果对于每一个 $x\in D$，都有惟一的 $y\in M$ 与它对应，那么这种函数就叫单值函数，否则就是多值函数.

今后若无特殊说明，所研究的函数都是指单值函数.

由定义可知，对应关系和定义域构成函数的二要素.

2. *函数的定义域*

在实际问题中，根据所考察问题的实际意义来确定其定义域. 对于不具实际意义的抽象函数，其定义域是使得函数有意义的全体自变量的集合. 常见的有：

（1）分式函数中，分母不能为零；

（2）根式函数中，负数不能开偶次方；

（3）对数函数中，真数大于零；

（4）三角函数和反三角函数中，要符合它们的定义域；

（5）在含有多种式子的函数中，应取各部分定义域的交集.

**例 1**　求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$；　　（2）$y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$.

**解** （1）要使函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$ 有意义，必须有 $\begin{cases}x+2\geq 0,\\4-x^2\neq 0.\end{cases}$

解得

$$\begin{cases}x\geq -2,\\x\neq \pm 2.\end{cases}$$

所以函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$ 的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

（2）要使函数 $y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$ 有意义，必须有

$$\frac{x+1}{x-1}>0,$$

于是有

$$\begin{cases}x+1<0,\\x-1<0.\end{cases} 或 \begin{cases}x+1>0,\\x-1>0.\end{cases}$$

解得

$$x<-1 \ 或 \ x>1.$$

所以函数 $y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

3. 反函数

在研究函数的同时，有时函数和自变量的地位会相互转换，于是就出现了反函数的概念.

例如，在函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 中，定义域和值域都是 $R$，按照 $x$ 和 $y$ 的对应关系，任意给出一个 $y\in R$，都有惟一确定的 $x=2y-1$ 与之对应.

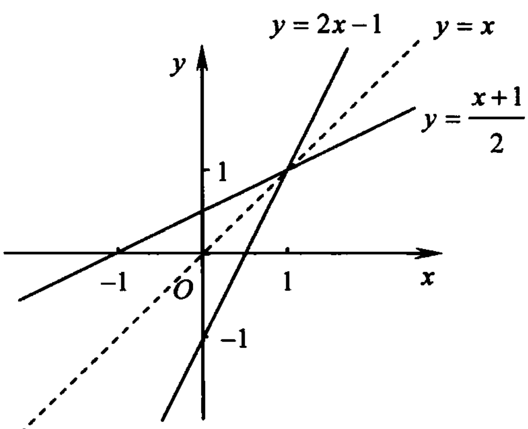



图 1-1

一般地，设函数 $y=f(x)$，定义域为 $D$，值域为 $M$. 如果对于 $M$ 中的每一个 $y$ 值，都可由 $y=f(x)$ 确定惟一的 $x$ 值与之对应，这样就确定一个以 $y$ 为自变量的函数 $x$，该函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然，该函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 $M$，值域为 $D$.

习惯上常用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示函数，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画

在同一个平面直角坐标系内，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

因此，函数 $x=2y-1$ 是函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 的反函数，其定义域为 $R$，值域为 $R$. 将函数改为 $y$，自变量改为 $x$，则函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 的反函数为 $y=2x-1$（图 1-1）.

**例 2**　求 $y=x^3+2$ 的反函数.

**解**　因为

$$y=x^3+2,$$

所以

$$x=\sqrt[3]{y-2}.$$

因此，函数 $y=x^3+2$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-2}$.

4. 分段函数

在自然科学及工程技术中，用公式表示函数时，经常会遇到一个函数在不同的范围内用不同的式子表示的情况. 如函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geq 0),\\ -x & (x<0).\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$.

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数叫**分段函数**.

分段函数是用几个解析式子来表示的一个函数，而不是表示几个函数. 求分段函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算. 如在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-4)=-(-4)=4$.

5. 函数的几种特性

（1）奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**；如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**偶函数**；如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

如 $y=x^3$ 是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，如图 1-2；偶函数的图像关于 $y$ 轴对称，如图 1-3.

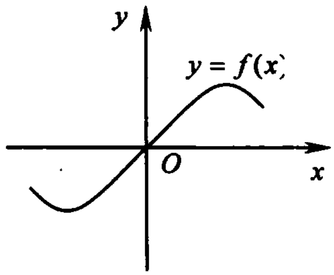



图 1-2

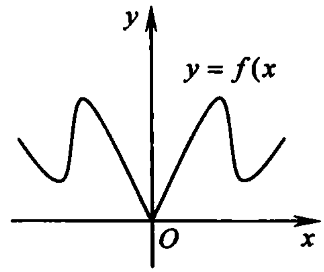



图 1-3

**例 3** 判断下列函数的奇偶性

（1）$f(x)=x^2\cos x$；（2）$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；（3）$f(x)=x^2-x$ .

**解** （1）因为 $f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$，所以 $f(x)=x^2\cos x$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x)=(-x)+(-\dfrac{1}{x})=-x-\dfrac{1}{x}=-(x+\dfrac{1}{x})=-f(x)$，所以 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

（3）因为 $f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$，既不与 $f(x)$ 相等，也不与 $-f(x)$ 相等，所以 $f(x)=x^2-x$ 是非奇非偶函数.

（2）单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内随着 $x$ 的增大而增大，即对于 $(a, b)$ 内任意两点 $x_1$ 与 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内是**单调增加**的，区间 $(a, b)$ 叫做函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内随着 $x$ 的增大而减小，即对于 $(a, b)$ 内任意两点 $x_1$ 与 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内是**单调减少**的，区间 $(a, b)$ 叫做函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**.

显然，单调增加函数的图像沿 $x$ 轴正向是逐渐上升的；单调减少函数的图像是沿 $x$ 轴正向是逐渐下降的.

如图 1-4 为单调增加函数，图 1-5 为单调减少函数.

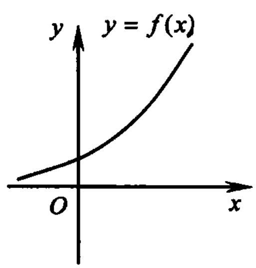



图 1-4

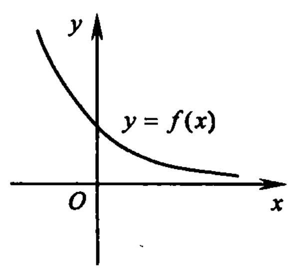



图 1-5

在整个区间上单调增加（减少）的函数，称为这区间上的**单调增（减）函数**，这个区间称为这个函数的**单调区间**.

例如，指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在其定义域 $R$ 内是单调增加的．而幂函数 $y=x^2$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,\ 0)$ 内是单调减少的，所以在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内不是单调函数.

**例 4**　判断函数 $f(x)=2x^2+1$ 的单调性.

**解**　函数 $f(x)=2x^2+1$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$.

对任意的 $x_1$，$x_2\in(-\infty,\ +\infty)$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2^2+1)-(2x_1^2+1)=2(x_2^2-x_1^2)=2(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

在 $(-\infty,\ 0)$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，因此 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 内单调减少.

在 $(0,\ +\infty)$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加.

由以上讨论知，$f(x)=2x^2+1$ 在其定义域上不是单调函数，但在 $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ +\infty)$ 内分别是单调的.

（3）周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 $T$，使得对于其定义域内的每一个 $x$，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，$T$ 称为其**周期**.

显然，如果 $T$ 是 $f(x)$ 的周期，则 $nT$（$n$ 是整数）均为其周期．一般提到的周期均指最小正周期.

我们常见的三角函数 $y=\sin x,\ y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期；$y=\tan x,\ y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期.

（4）有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有定义，如果存在一个正数 $M$，使得对于任意 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\le M$，那么称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内**有界**；如果不存在这样的数 $M$，那么称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$，存在正数 $M=1$，使得对于任意的 $x\in R$，均有 $|\sin x|\le 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $R$ 内是有界的.

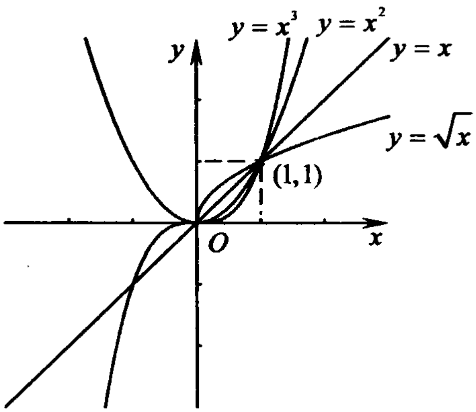
### 1.1.2　基本初等函数

我们学过的幂函数 $y=x^\alpha$（$\alpha$ 为实数）、指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

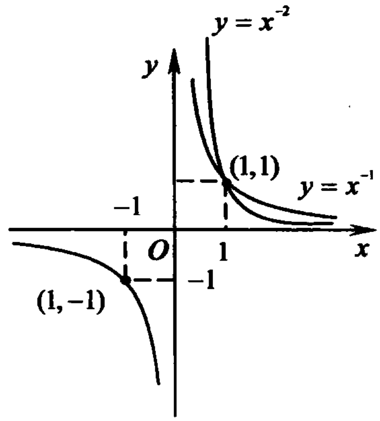
1. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha$ 为实数）

（1）当 $\alpha>0$ 时，函数经过两定点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，图像在第 I 象限内单调增加且无界（如图 1-6(1)）.

（2）当 $\alpha<0$ 时，函数经过定点 $(1,1)$，图像在第 I 象限内单调减少且无界（如图 1-6(2)）.




(1)




(2)

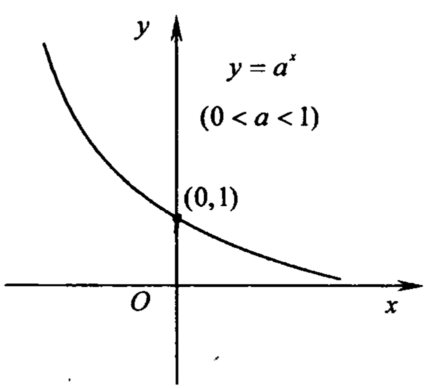
图 1-6

2. 指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$

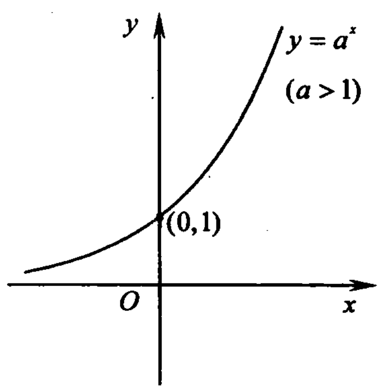
它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，图像经过定点 $(0,1)$.

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界（如图 1-7(1)）.

（2）当 $a>1$ 时，函数单调递增且无界（如图 1-7(2)）.




(1)




(2)

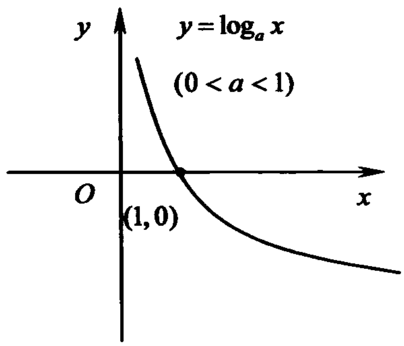
图 1-7

3. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$

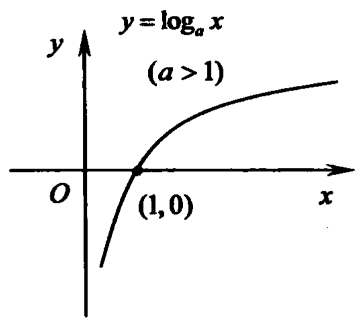
它的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，图像经过定点 $(1,0)$.

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界（如图 1-8(1)）；

（2）当 $a>1$ 时，函数单调递增且无界（如图 1-8(2)）.




(1)




(2)

图 1-8

4. 三角函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是奇函数，周期为 $2\pi$ 的周期函数，有界（如图 1-9）.

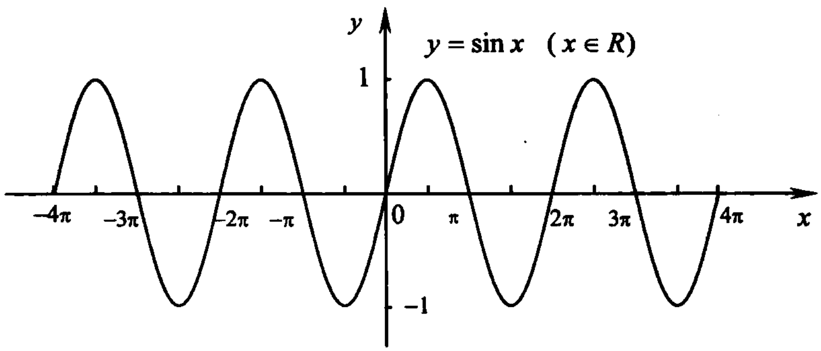



图 1-9

（2）余弦函数 $y=\cos x$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是偶函数，周期为 $2\pi$ 的周期函数，有界（如图 1-10）.

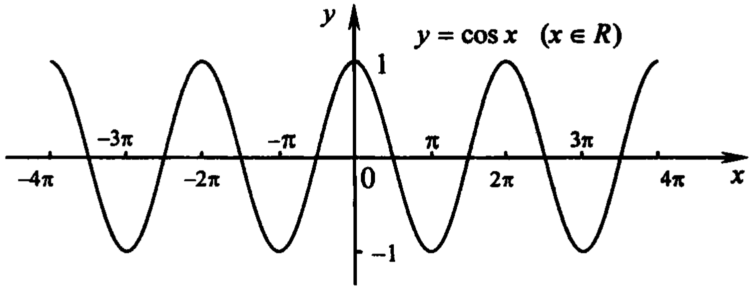



图 1-10

（3）正切函数 $y=\tan x$

定义域为 $\{x\,|\,x\in R,\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，周期为 $\pi$ 的周期函数，无界（如图 1-11）.

（4）余切函数 $y=\cot x$

定义域为 $\{x\,|\,x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，周期为 $\pi$ 的周期函数，无界（如图 1-12）.

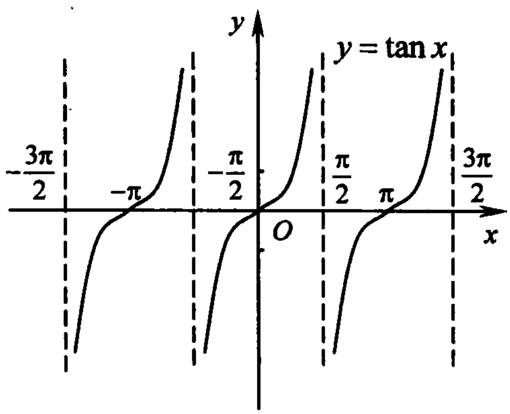



图 1-11

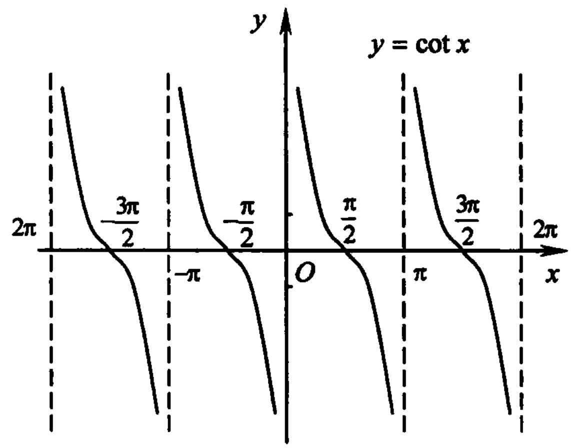



图 1-12

5．反三角函数

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$

定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，奇函数，单调增加，有界（图 1-13）.

（2）反余弦函数 $y = \arccos x$，

定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$，非奇非偶函数，单调减少，有界（图 1-14）.

（3）反正切函数 $y = \arctan x$

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，奇函数，单调增加，且有界（图 1-15）.

（4）反余切函数

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$，非奇非偶函数，单调减少，有界（图 1-16）.

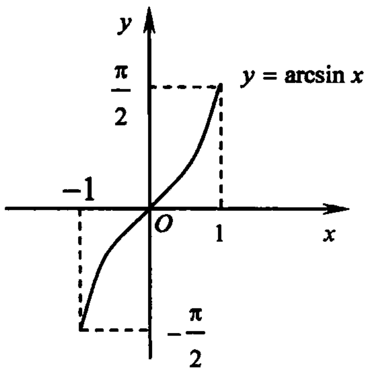



图 1-13

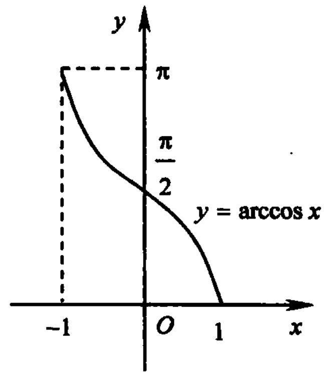



图 1-14

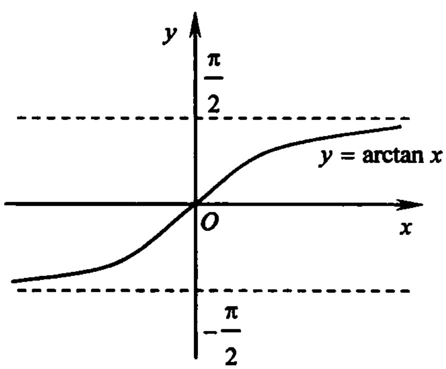



图 1-15

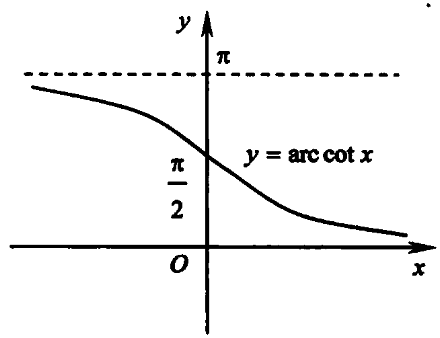



图 1-16

### 1.1.3　复合函数、初等函数

#### 1. 复合函数

在同一问题中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一变量间接联系起来的.

例如，某汽车每千米油耗为$a$公升，行驶速度为$v$公里/小时．汽车行驶的路程是其行驶时间的函数$s=vt$，而汽车的油耗量又是其行驶路程的函数$y=as$．于是，汽车的油耗量与汽车行驶时间之间就建立了函数关系$y=avt$．这时我们称函数$y=avt$是由$y=as$与$s=vt$复合而成的复合函数．

一般地，设$y=f(u)$是$u$的函数，$u=\varphi(x)$是$x$的函数，如果$u=\varphi(x)$值域与$y=f(u)$定义域的交集非空，则$y$通过中间变量$u$成为$x$的函数，我们称$y$为$x$的**复合函数**．记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中$u$称为**中间变量**．

**例5** 指出下列函数的复合过程和定义域：

（1）$y=\log_a(1+x^2)$；（2）$y=\sin^3 x$．

**解** （1）函数$y=\log_a(1+x^2)$可看做两个函数：$y=\log_a u$和$u=1+x^2$复合而成．由于任意的$x$对应的$u=1+x^2>0$，使得$y=\log_a u$有意义，所以它的定义域为$R$．

（2）函数$y=\sin^2 x$可看做两个函数：$y=u^2$和$u=\sin x$复合而成，其定义域为$R$．

**例6** 已知$y=\lg u$，$u=\sin v, v=x^2$，将$y$表示成$x$的复合函数．

**解** $y=\lg u=\lg\sin v=\lg\sin x^2$．

2. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限复合运算构成的，并且能用一个解析表示的函数叫做**初等函数**．

例如：$y=\dfrac{1}{x}+\log_a(2+x^2)$，$y=3-\sqrt{x}$，$y=x\ln x$等都是初等函数．

### 1.1.4 建立函数关系举例

为了解决应用问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系．为此需要明确问题中有因变量与自变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系，再确定函数的定义域．应用问题的定义域，除使函数的解析式有意义外，还要考虑变量在实际问题中的含义．下面就一些简单实际问题，说明建立函数关系的过程．

**例7** 某市场对西红柿的批发价格如下规定：批发量在50 kg以下为1元/kg；批发量在100 kg以下超过50 kg的部分为0.8元/kg；批发量超过100 kg的部分为0.5元/kg．设批发量为$x$ kg，总费用为$y$元，试建立$y$与$x$的函数关系．

**解** 由于批发量的多少决定批发价格，所以，建立函数关系应按批发量分段表示．因此有