复旦大学附属中学
初高中数学衔接教学讲义

李秋明　主编

MATH

复旦大学出版社

复旦大学附属中学

初高中数学衔接教学讲义

MATH

李秋明　主编

复旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

复旦大学附属中学初高中数学衔接教学讲义/李秋明主编.
—上海:复旦大学出版社,2011.9
(复旦大学附属中学"大视野"教育书系)
ISBN 978-7-309-08354-5

Ⅰ. 复…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 中学数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 159104 号

复旦大学附属中学初高中数学衔接教学讲义
李秋明　主编
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
同济大学印刷厂

开本 787 × 1092　1/16　印张 7.25　字数 176 千
2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-08354-5/G · 1009
定价: 18.00 元

内容提要

今天的初高中衔接教学，不仅要从知识的角度，还应该从能力的角度，从学习规范等各方面做好初高中衔接教学，为学生高中数学学习奠定坚实的基础。

本书是对复旦大学附属中学多年来初高中数学衔接教学的传承，其编写宗旨是为复旦大学附属中学数学衔接教学提供适用的模板和教材；其内容、方法、指导思想都在初中教学的基础上有所发展，以使学生更好地衔接初高中数学知识，从而在学习态度、学习能力、学习方法等多方面适应高中数学的学习要求。

本书分为“数、式与方程”、“二次函数、一元二次不等式及其他不等式”以及“圆“等3章，教师可以根据需要作次序上的调整与内容上的取舍；同时，本书梳理了较完备的知识体系，并配备了较齐全的课内练习、课外练习以及参考答案，以便初三毕业生和新高一学生自主学习、使用。

前言

在上海最早实行初高中衔接教学的应该就是复旦大学附属中学(以下简称“复旦附中”)的数学教研组。因为在20世纪80年代,复旦附中是上海仅有的两所没有初中的高级中学之一,且学生来自上海的各个区县,他们的数学知识基础、能力储备差异很大。针对这种差异,复旦附中的前辈教师创造性地开展了数学初高中的衔接教学,为学生高中阶段的数学学习奠定一个坚实的基础。当然,具体实施时并不是简单地重复初中数学知识,而是结合高中数学中集合的概念,将初中的数、代数式、方程、不等式以及函数等概念在集合的情境中予以巩固提高。虽说一开始因衔接教学,我们的教学进度远远落后于兄弟学校,但是磨刀不误砍柴功,因为夯实了基础,学生们很快就缩小了这些差距,并在学习质量上有所超越。多年来,得益于前辈教师这一教育创新,我们的数学教学能够做到比较高效、扎实。如今,数学的衔接教学已经在很多学校开展,基本形成一种数学教学的共识。

今天,我们面对的问题与30年前相比,已经发生了深刻的变化,我们面临的已不仅仅是学生知识上的差异。经过专题研究后,我们发现情况变得更为复杂。

从知识层面上看,不同地区、不同学校的差异已经不是最严重的问题。最严峻的问题有:(1)中考的要求与教材内容的差异。例如,二次函数是初中数学教材中的内容,在高中数学教材中不再出现。但是因为中考对二次函数的要求极低,很多初中的教学因此就淡化了这一重要内容,从而造成学生高中学习上的困难。(2)初中教材与高中教材脱节,两套教材的编写各行其是,很多地方无法对接。例如,对于图形的轴对称,初中的定义是:把一个图形沿某一条直线翻折过来,直线两旁的部分能够相互重合,这个图形叫做轴对称图形,这条直线就是它的对称轴。这是一种直观定义,无法简洁地用于证明。但高中并没有给出进一步的定义,那么偶函数图像关于y轴对称的证明就只能是空中楼阁。

从能力层面上看,在初中数学教学中,有不少可以成为培养学生能力的好素材没有得到充分利用。例如,在二次函数的教学中,由$y=x^2\rightarrow y=ax^2\rightarrow y=a(x-h)^2\rightarrow y=a(x-h)^2+k$,进而得到$y=ax^2+bx+c$的过程,体现了由特殊到一般、将复杂问题简单化的数学思想。这一过程若能够得到强化,则不仅可以使学生将这个方法迁移到反比例

函数中去，得到更一般的结论，而且对将来理解函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 等大有帮助。

基于这样的事实，我们认为今天的初高中数学衔接教学应该有所发展，不仅要从知识的角度，还应该从能力的角度，从学习规范等各方面做好初高中衔接教学，为学生高中数学学习奠定坚实的基础。因此衔接教学的内容、方法与指导思想都应有所发展，以适应目前的教学状况。

在相关专题研究的基础上，我们编写了这本《复旦大学附属中学初高中数学衔接教学讲义》，编写的宗旨是为复旦附中数学衔接教学提供适用的模板。本书分为 3 章，教师可以根据需要作次序上的调整与内容上的取舍。同时，本书梳理了较完备的知识体系，并配备了较齐全的课内练习、课外练习以及参考答案，以便初三毕业生和新高一学生自主学习、使用。

本书由特级教师李秋明主编，参与编写工作的有张晴帆、郑仲义、杨丽婷、张建国、李朝晖、肖恩利、胡小群、冯璟以及龚政等老师。复旦附中 2013 届数学备课组对本书的所有内容，进行了教学实践，在这个过程中，他们提出了很多建设性的意见。在此向他们表示感谢！

由于编写的时间仓促，编者能力有限，书中的疏漏之处，还望读者指正！

编者

2011 年 3 月

目 录

第一章　数、式与方程 …… 1
第一节　数 …… 1
一、数系的扩充 …… 1
二、数的整除规律 …… 1
三、“$\sqrt{2}$”不是有理数 …… 2
四、例题选讲 …… 3
习题 …… 3
课内练习 …… 4
第二节　代数式 …… 5
一、基本运算公式 …… 5
二、例题选讲 …… 5
习题 …… 9
课内练习 …… 10
第三节　方程的解法、含参数方程的讨论 …… 11
一、方程的分类 …… 11
二、同解定理 …… 11
三、同解变形 …… 11
四、方程的解法 …… 11
五、例题选讲 …… 12
习题 …… 14
课内练习 …… 15
第四节　方程根的性质 …… 16
一、方程的根及其与系数的关系 …… 16
二、二次三项式分解 …… 16
三、例题选讲 …… 16
习题 …… 18
课内练习 …… 19

第二章　二次函数、一元二次不等式及其他不等式 …… 20
第一节　二次函数的图像 …… 20
一、函数 $y=ax^2\ (a\neq 0)$ 的图像 …… 20
二、函数 $y=a(x+m)^2\ (a\neq 0)$ 的图像 …… 22
三、函数 $y=a(x+m)^2+k\ (a\neq 0)$ 的图像 …… 23

习题 …… 23
课内练习 …… 24
第二节　中心对称与反比例函数的图像 …… 25
一、两个图形关于某条直线对称 …… 25
二、中心对称 …… 25
习题 …… 28
课内练习 …… 32
第三节　二次函数图像与一元二次不等式 …… 34
一、二次函数图像与一元二次不等式的关系 …… 34
二、例题选讲 …… 35
习题 …… 37
课内练习 …… 40
第四节　二次函数图像与一元二次方程根的分布问题 …… 41
一、二次函数图像与一元二次方程根的分布 …… 41
二、例题选讲 …… 44
习题 …… 45
课内练习 …… 47
第五节　一元二次不等式及其他不等式的解法 …… 49
一、一元二次不等式的解法 …… 49
二、其他不等式的解法 …… 49
三、例题选讲 …… 50
习题 …… 52
课内练习 …… 53

第三章　圆 …… 55
第一节　圆的基本概念 …… 55
一、知识整理 …… 55
二、例题选讲 …… 55
习题 …… 57
课内练习 …… 57
第二节　圆与直线的位置关系 …… 58
一、知识整理 …… 58
二、例题选讲 …… 58
习题 …… 62
课内练习 …… 63
第三节　多边形与圆 …… 64
一、知识整理 …… 64
二、例题选讲 …… 64
习题 …… 67
课内练习 …… 67

第四节　圆与圆的位置关系 …… 68
一、知识整理 …… 68
二、例题选讲 …… 68
习题 …… 70
课内练习 …… 71
课内综合练习 …… 71

参考答案 …… 73

第一章

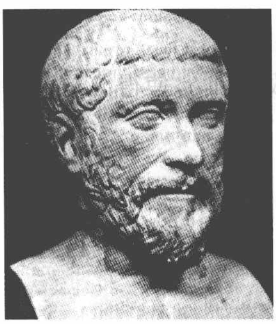
数、式与方程

第一节 数

数是近代数学发展的基础，在此，我们结合数系发展的过程，简单地归纳总结初中学习过的数以及在高中学习中经常会碰到的数的一些性质。

一、数系的扩充

为了满足人类社会生活和生产实践的需要，“数”的概念一直在不断地扩充。早在远古时代，人类就开始逐渐认识并从具体事物中抽象形成了自然数，值得注意的是，0 是第一个自然数，而 1，2，3，… 又称为正整数；为了解决诸如借贷关系等具有相反意义的量和解决被减数小于减数等问题，又逐渐产生了负数；在度量和均分时往往不能正好得到整数的结果，这样就产生了分数，而十进制分数的另一种表示方式就是小数；公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯（见图 1.1）学派利用毕达哥拉斯定理，发现了“无理数”，但直到公元前 4 世纪“无理数”才被正式承认，从而数的概念也就进一步地扩展到了实数（见图 1.2）。



毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—前 500 年），古希腊数学家，毕达哥拉斯学派的主要代表人物

图 1.1

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 自然数
        - 正整数
        - 零
      - 负整数
    - 分数（有限小数及无限循环小数）
  - 无理数（无限不循环小数）

图 1.2

二、数的整除规律

2 的倍数：末位数字是 0、2、4、6、8；
3 的倍数：各位数字之和是 3 的倍数；

4 的倍数：末两位数字所组成的数能被 4 整除；

5 的倍数：末位数字是 0、5；

6 的倍数：既能被 2 整除又能被 3 整除；

7 的倍数：末三位数字与末三位以前的数字所组成的数之差能被 7 整除；

将末位数字截去，再用余下的数中减去末位数字的 2 倍的差能被 7 整除；

8 的倍数：末三位数字所组成的数能被 8 整除；

9 的倍数：各位数字之和是 9 的倍数；

10 的倍数：末位数字为 0；

11 的倍数：奇数位上各数字之和与偶数位上各数字之和的差是 11 的倍数；

13 的倍数：末三位数字与末三位以前的数字所组成的数之差能被 13 整除；

25 的倍数：末两位数字所组成的数能被 4 整除；

125 的倍数：末三位数字所组成的数能被 8 整除。

下面以 3 的倍数，7 的倍数为例给出证明。

证明：对于一个四位数$\overline{abcd}$，则

$$\overline{abcd}=a\times 1\,000+b\times 100+c\times 10+d=a\times 999+b\times 99+c\times 9+(a+b+c+d),$$

所以当 $a+b+c+d$ 能被 3 整除，则$\overline{abcd}$也一定能被 3 整除。同理，能被数 3 整除的规律对任意位数的整数都成立，即对任意整数都成立。

对于一个三位以上的数字$\overline{a\cdots bcdef}$都可以将其写成

$$\overline{a\cdots bc}\times 1\,000+\overline{def}=\overline{a\cdots bc}\times 1\,001+(\overline{def}-\overline{a\cdots bc})=\overline{a\cdots bc}\times 7\times 11\times 13+(\overline{def}-\overline{a\cdots bc}).$$

所以，当$\overline{def}-\overline{a\cdots bc}$能被 7 整除时，则$\overline{a\cdots bcdef}$也一定能被 7 整除。

三、“$\sqrt{2}$”不是有理数

这可以见下述证明。

证明：用反证法。假设$\sqrt{2}$是有理数，则存在互质的正整数 p 和 q，使得

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

则

$$p=\sqrt{2}q,$$

两边平方后得

$$p^2=2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数可得 p^2 是偶数，而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数。

因此可设 $p=2s$，代入上式，得

$$4s^2=2q^2,$$

即

$$2s^2=q^2.$$

所以 q 也是偶数。这样 p，q 都是偶数，不互质，这与假设 p，q 互质矛盾。这个矛盾说明，$\sqrt{2}$ 不能写成分数形式，即$\sqrt{2}$不是有理数。

思考：能否用上述方法证明，$\sqrt[3]{2}$不是有理数？

四、例题选讲

【例1】 计算：$\dfrac{|a|}{a}-\dfrac{|b|}{b}$。

解 因为 $\dfrac{|a|}{a}=\begin{cases}1, & a>0,\\ -1, & a<0,\end{cases}$ 所以原式 $=\begin{cases}0, & ab>0,\\ 2, & b<0<a,\\ -2, & a<0<b。\end{cases}$

【例2】 化简：$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$。

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}。$$

【例3】 设$\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $a^2+\dfrac{1}{2}ab+b^2$ 的值。

解 因为 $2<\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}<3$，所以 $a=2$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-2$，

所以
$$a^2+\frac{1}{2}ab+b^2=(a+b)^2-\frac{3}{2}ab$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-2\right)$$

$$=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}-\frac{9+3\sqrt{5}}{2}+6$$

$$=5。$$

习题

1. 在五位数 3427□中，在□的位置填上哪些数，就能使这个数成为
(1)2 的倍数；(2)3 的倍数；(3)4 的倍数；(4)5 的倍数；(5)11 的倍数？
2. 有个四位数$\overline{abcd}$，它是偶数，4 个数字的关系为 $a<b<c<d$，且已知 a 是 5 的倍数，$\overline{ab}$是 4 的倍数，$\overline{abc}$是 3 的倍数，求此四位数。
3. 已知 $ab\neq 0$，且 $a>b$，试比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小。
4. 求下列各组数的最大公约数和最小公倍数：
(1)48，84，120；(2)144，216；(3)540，225。
5. 求满足下列条件的两个正整数：

(1) 最大公约数是 12,最小公倍数是 420;

(2) 积为 300,最小公倍数是 60;

(3) 两数之和为 667,它们的最小公倍数与最大公约数的商为 120。

6. 一个三位数,个位数字是 3,若将 3 移至百位,其他依次降一位,所得新数比原数的 3 倍多 1,求原数。

7. 已知 x, y 为有理数,且 $(x-\sqrt{2}y)^2=9-4\sqrt{2}$,求 x, y。

8. 已知实数 a, b 满足关系:$a^2+b^2-2a-b+\dfrac{5}{4}=0$,试写出所有的以 a, b 为实根的一元二次方程。

9. 已知 $a=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ 的小数部分为 b,求 $a(1-b)$的值。

10. 证明下列命题:

(1) 两个相邻奇数的平方差是 8 的倍数;

(2) 3 个连续整数的平方被 3 整除余 2;

(3) 任意一个奇数的平方减 1 是 8 的倍数;

(4) $\sqrt{3}$不是有理数。

课内练习

一、填空题

1. 252, 294 的最大公约数是__________,最小公倍数是__________。

2. 当 $x\in$________时,有 $\dfrac{|x|}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$ 成立。

3. 与$\sqrt{\dfrac{4}{4-2\sqrt{3}}}$最接近的整数是________。

4. 已知实数 a, b 有关系:$a^2+b^2-2a-b+\dfrac{5}{4}=0$,那么 $ab=$________。

5. 已知 $a<b<0$,且 $b\neq-1$,化简:$\dfrac{|a-1|-\sqrt{a^2+4ab+4b^2}+b^2}{1+\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a}=$________。

6. 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ 的实数对(x, y)有__________对。

二、解答题

1. 若等式 $|x+2|=x+2$, $|2x-1|=-(2x-1)$ 同时成立,求 x 的取值范围。

2. 计算:$\left[0.01^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{18}-(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}-3\cos 45^\circ-\sqrt{\dfrac{9}{2}}\right]+\left[\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2\times 2-(\tan 67^\circ)^0-\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}+\dfrac{3}{4}\right]$。

3. 已知 x, y 为有理数,且 $(2x+\sqrt{3}y)^2=7-4\sqrt{3}$,求 x, y。

4. 若 $2a^2+b=10$,且 b 是 a 的小数部分,求正数 a, b。

5. 若 $c<0<a<b$,化简 $|c-a|-\sqrt{a^2+2ab+b^2}-\sqrt{(c-2)^2}+|3c-b|$。

6. 设 m 是自然数,且 m 不是 2 的倍数,也不是 3 的倍数,求证:m^2+5 能被 6 整除。

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-(a^2+1)x+(a^2+a)=0$ 的两根都是整数，求满足条件的整数 a。

第二节 代 数 式

代数式包括整式、分式和根式。本节代数式的运算以整式、分式和根式为主，代数式的变形与求值包含了丰富的技巧和方法。

一、基本运算公式

整式的加减运算是最基本的。乘法运算包含了众多的乘法公式，除了初中数学教材介绍的几个，我们再补充几个常用的公式。乘法公式逆过来用就是公式法因式分解的依据。

(1)三数和平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$；

(2)两数和立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

(3)两数差立方公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

二、例题选讲

【例1】 已知 $6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a=(2x-3y+b)(3x+y+c)$，试确定 a，b，c 的值。

解 由题设，得

$$\begin{aligned}&6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a\\=&(2x-3y+b)(3x+y+c)\\=&6x^2-7xy-3y^2+(3b+2c)x+(b-3c)y+bc。\end{aligned}$$

比较对应项系数，得

$$\begin{cases}3b+2c=14,\\b-3c=1,\\bc=a。\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}a=4,\\b=4,\\c=1。\end{cases}$$

【例2】 如果 $5x^2-kx+7$ 被 $5x-2$ 除后余 6，求 k 的值及商式。

解 因为 $5x^2\div5x=x$，所以商式的最高次项为一次，并且系数为 1。设商式为 $x+m$，由题意得

$$5x^2-kx+7=(5x-2)(x+m)+6,$$

即

$$5x^2-kx+7=5x^2+(5m-2)x-2m+6。$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases}-k=5m-2,\\ 7=-2m+6。\end{cases}$$

解之，得 $$m=-\frac{1}{2},k=\frac{9}{2}。$$

所以 $k=\frac{9}{2}$，商式为 $x-\frac{1}{2}$。

【例3】 分解因式：

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$； (2) $x^3+y^3+3xy-1$。

解 (1) 因为 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，所以 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。于是

$$\begin{aligned}原式&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\&=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)。\end{aligned}$$

(2) 利用(1)，有

$$原式=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)=(x+y-1)(x^2+y^2+1+x+y-xy)。$$

说明 这个公式应用广泛，可以推出很多有用的结论。例如

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\=&\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\end{aligned}$$

当 $a+b+c=0$ 时，$a^3+b^3+c^3=3abc$。

注 分式的一些概念和性质与分数相类似，而与整式区别较大。整式中的字母取任意值都有意义，而分式只有在分母不等于零时才有意义。我们在研究分式变形、分式相等、分式方程等与分式有关的问题时，都不要忘记必须在分式有意义的前提下，才能考虑问题。

【例4】 当 x 取何值时，下列分式有意义：

(1) $\frac{x+1}{2-3|x|}$； (2) $\frac{5}{x^2-2x+2}$； (3) $\frac{3x}{x^2-4|x|+4}$； (4) $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$?

解 若求 x 取何值时，分式有意义，可先求 x 取何值时，分式无意义。

(1) 令分母 $2-3|x|=0$，即 $|x|=\frac{2}{3}$，$x=\pm\frac{2}{3}$。所以当 $x\neq\pm\frac{2}{3}$ 时，分式 $\frac{x+1}{2-3|x|}$ 有意义。

(2) 因为分母 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$，所以不论 x 取何值，分式 $\frac{5}{x^2-2x+2}$ 都有意义。

(3) 因为 $x^2=|x|^2$，所以分母 $x^2-4|x|+4=(|x|-2)^2$，令 $|x|-2=0$，则 $x=\pm2$。所以当 $x\neq\pm2$ 时，分式 $\frac{3x}{x^2-4|x|+4}$ 有意义。

(4) 将分母分解因式 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$。若分母为零，则 $x-1=0$ 或 $x-2=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$。若分母不为零，则当 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$ 时，分式$\frac{x-1}{x^2-3x+2}$有意义。

注　注意“或”与“且”的区别。

【例 5】　若 $\frac{5x+4}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$，求常数 A，B 的值。

解　因为 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}=\frac{5x+4}{x(x+2)}$，

所以
$$\begin{cases}A+B=5,\\2A=4,\end{cases}$$
解得
$$A=2,\ B=3。$$

【例 6】　(1) 试证：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$（其中 n 是正整数）；

(2) 计算：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{9\times 10}$；

(3) 证明：对任意大于 1 的正整数 n，有 $\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{2}$。

证明　(1) 因为 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$，

所以 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$（其中 n 是正整数）成立。

解　(2) 由(1)可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{9\times 10}\\=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\\=&1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}。\end{aligned}$$

证明　(3) 因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\=&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\=&\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

又 $n\geqslant 2$，且 n 是正整数，所以$\frac{1}{n+1}$一定为正数。所以

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{2}。$$

【例 7】　当 x 变化时，分式$\frac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$的最小值是多少？

解　原式$=\frac{6x^2+12x+10}{x^2+2x+2}=\frac{6(x^2+2x+2)-2}{x^2+2x+2}$

$$= 6-\frac{2}{x^2+2x+2} = 6-\frac{2}{(x+1)^2+1}。$$

由此可见，当 $x=-1$ 时，原式的最小值为 4。

说明 初中教科书上介绍了根式的定义、性质和四则运算。在此基础上，我们进一步学习根式的化简、求值、计算。

【例 8】 试比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$； (2) $\frac{2}{\sqrt{6}+4}$ 和 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$。

解 (1) 因为 $\sqrt{12}-\sqrt{11}=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{11}}{1}=\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{11})(\sqrt{12}+\sqrt{11})}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}=\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$，

$$\sqrt{11}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{1}=\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}},$$

又 $\sqrt{12}+\sqrt{11}>\sqrt{11}+\sqrt{10}$，所以

$$\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}。$$

(2) 因为 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1}=\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$，

又 $4>2\sqrt{2}$，所以

$$\sqrt{6}+4>\sqrt{6}+2\sqrt{2},$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{6}+4}<2\sqrt{2}-\sqrt{6}。$$

【例 9】 (1) 已知 a 是二次方程 $x^2-5x+1=0$ 的根，试求 $2a^2-9a-5+\frac{5}{a^2+1}$ 的值；

(2) 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ 的值；

(3) 若 $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$，求 $\frac{1}{2}x^3-x^2-x+2$ 的值。

解 这 3 题是比较典型的代数求值问题，用直接代入都比较繁。

(1) 由 $a^2-5a+1=0$ 知 $a\neq 0$，故 $\frac{a^2+1}{a}=5$，得

$$原式=2(a^2-5a+1)+a-7+\frac{5}{a^2+1}=2(a^2-5a+1)+a+\frac{1}{a}-7=-2。$$

(2) 化简二重根式得

$$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{16-8\sqrt{3}+3}=4-\sqrt{3},$$

故 $(x-4)^2=3$，即 $x^2-8x+13=0$。

根据整式除法，知

$$x^4-6x^3-2x^2+18x+23=(x^2-8x+13)(x^2+2x+1)+10,$$