应用随机过程

范子亮　编著

西南交通大学出版社

应用随机过程

范子亮　编著

西南交通大学出版社

(川)新登字 018 号

内容提要

本书以实际应用为背景，以通俗易懂的论述，深入浅出的例证，介绍了在自然科学、工程技术、经济管理以及社会科学等领域里常用到的几类随机过程。重点而较详细地讨论了泊松过程、更新过程、马尔科夫过程以及平稳过程。

读者只需具备概率论、微积分、线性代数等数学知识，即可阅读本书。

为便于阅读与理解，书中列举了足够多的例题，书末配有足够的习题与提示并附有答案。

本书可供高等院校研究生及高年级大学生作为教材，也可供工程技术人员及其他科技人员阅读与参考。

应 用 随 机 过 程

范子亮 编著

*

西南交通大学出版社出版发行

(成都　二环路北一段)

新华书店经销

郫县印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:11.9375

字数:292　千字　印数:1—1000 册

1995 年 5 月第 1 版　1995 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7—81022—739—4/O·067

定价:9.00 元

前　言

随机现象是自然界乃至宇宙间的普遍现象，研究并揭示其规律性的数学方法归结为概率论与随机过程。

随机过程是本世纪30年代才获得蓬勃发展的一门年轻的学科。由于其理论基础的深厚性，以及应用的广泛性、渗透性、方法的适用性、有效性、可行性，使得它在自然科学、社会科学、工程技术、现代经济及管理等诸多领域内都有着广泛的应用。正因如此，近年来，在我国许多高等院校都为研究生或本科高年级学生开设了该门课程。

本书的目的在于，以随机过程的一般理论为基础，在不过分强求理论的完整性及严密性且又不失其正确性的前提下，着重突出其实际应用。

在选材方面，在必要的概念、理论的介绍的基础上，力求使概念理论等形象地再现或融汇于物理的直观或应用的实例中。意在使抽象的、一般人难以理解的数学概念和理论予以典型化、形象化、具体化。

考虑到工科学生及工程技术人员、管理人员的数学基础，本书在编写过程中，有意避开了高深的数学基础，而仅要求读者具备概率论、微积分及线性代数等数学基础即可。

由于教学学时和篇幅所限，本书仅就较多学科常用到的泊松过程、更新过程、马尔科夫过程，以及平稳过程等作了较详细的介绍，对于随机过程的其他类型也作了简洁的介绍。为配合教学及便于自学，书中每章都配有足够量的习题与提示，并附有习题答案。

本书可作为高等院校研究生及本科高年级学生学习该门课程的教材，也可供从事工程技术和科学技术工作的人员阅读与参考。

有的书，可能像太阳，为大地带来温暖；有的书，可能像月亮，为大地带来光明。由于作者水平有限，虽从事该门课程教学工作多年，力图博采众长、精炼自身以求更有效地开发学员智力。然而，毕竟水平有限，终不能如愿，如若本书能对读者起到一盏“小油灯”的作用，即将会予我以莫大的鞭策。

书中谬误不妥之处，敬请读者指教。

本书在编写过程中，承蒙郭可詹教授、苗邦均教授、黄盛清教授及西南交通大学应用数学系的老师们予以指教，在此表示诚挚的谢意。

本书的编写出版，承蒙西南交通大学出版社的大力支持，在此谨向他们表示真诚的谢意。

编　者

1994 年 8 月

目　　录

第一章

概　率　论

§1—1　概率空间、随机事件与概率

1—1—1　样本空间与概率空间

通常把对自然现象的观察或为某种目的进行的试验统称为试验。如果这种试验在相同的条件下可以重复地做，且每次试验下出现何种结果又不能预知，那么，我们就称这种试验为**随机试验**。

在随机试验下可能出现的全部结果构成的集合叫**样本空间**，通常记作 Ω。

定义 1—1　设 Ω 为样本空间，若由 Ω 的全体子集构成的集合体 $\mathscr{F}$ 满足

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$　　则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F} (i = 1, 2, \cdots, n)$　　则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$

(4) 若 $A_i \in \mathscr{F} (i = 1, 2, \cdots)$　　则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

则称 $\mathscr{F}$ 为由 Ω 产生的 **σ 代数**。可以证明，由 Ω 的全体子集构成的集合体，必然是一个 σ 代数。

定义 1—2　称（Ω，$\mathscr{F}$）构成的空间为**可测空间**。特别，当 Ω 中仅有有限个样本点，这时称（Ω，$\mathscr{F}$）为**有限可测空间**。

定义 1—3　若 $A \in \mathscr{F}$，则称 A 为**随机事件**。特别 $\Omega \in \mathscr{F}$，称 Ω 为**必然事件**。空集 $\varnothing \in \mathscr{F}$，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**。

下面我们将在可测空间上给出概率的定义。

定义 1—4 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，对于每个$A\in\mathscr{F}$，若定义于$\mathscr{F}$上的实值函数$P(\cdot)$满足

(1) 对每一个$A\in\mathscr{F}$，均有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 对任意$A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots$

若$A_iA_j|_{i\neq j}=\varnothing$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p(A_i)$$

则称$P(\cdot)$为$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率。特别对$A\in\mathscr{F}$，称$P(A)$为随机事件A的概率。

定义 1—5 若$P(\cdot)$为$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率，则称三元体$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P}(\cdot))$为概率空间。

下面的讨论都是在概率空间上进行的。

1—1—2 概率性质

设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P}(\cdot))$为概率空间，则$P(\cdot)$具有如下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$

证 因$\varnothing=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varnothing$，由概率定义的可列可加性得

$$P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{\infty}p(\varnothing)$$

又因 $0\leqslant p(\varnothing)\leqslant 1$

所以 $P(\varnothing)=0$

(2) 若$A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，且$A_iA_j|_{i\neq j}=\varnothing$，

则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$ （有限可加性）

证 由$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p(A_i)$ 只须取

$A_{n+k} = \varnothing, k = 1, 2, \cdots$，代入即知

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \quad \text{真}$$

(3) 设 $A \in \mathscr{F}$，则有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

证 因 $\Omega = A + \overline{A}$

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

所以 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$。

(4) 设 $A, B \in \mathscr{F}$，若 $A \supset B$

则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$，从而 $P(A) \geqslant P(B)$。

证 因为 $A = B + (A - B)$ 且 $B \cdot (A - B) = \varnothing$

则由有限可加性，得

$$P(A) = P(B) + P(A - B)$$

故 $P(A - B) \equiv P(A) - P(B)$

(5) 对任意 A、$B \in \mathscr{F}$，均有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般有

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = & \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} p(A_i A_j A_k) + \cdots \\ & + (-1)^{n-1} p(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned} \tag{1—1}$$

并且由此得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

证 因 $A \cup B = A + (B - AB)$，且 $A(B - AB) = \varnothing$

由 $P(\cdot)$ 的有限可加性，得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB)$$

$$\xlongequal{B \supset AB} P(A) + P(B) - P(AB)$$

类似地可推得一般的加法公式(1—1)。

1—1—3　古典概率的计算

所谓**古典概型**是指：样本空间 Ω 中只有有限多个样本点（基本事件），而每个样本点在每次试验中出现的可能性都是相等的。即若 e_i 为基本事件，$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，且

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$$

则这种概率模型就是古典概型。

对于古典概型，其随机事件的概率的计算有一个简便的公式，即

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

其中，$|A|$表示随机事件 A 中所包含的样本点的个数；$|\Omega|$表示样本空间 Ω 中包含的样本点的个数。

例 1—1　袋中有 6 个同类型的球，其中有 4 个红球，2 个白球，现进行逐个无放回地抽取。

求　(1) $A=$“第一次抽取，取到的是红球”的概率；

(2) $B=$“第二次抽取，取到的是红球”的概率。

解

(1) 因　$|\Omega|=6$，　$|A|=4$

故　$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}。$$

(2) 因　$|\Omega|=6\times5=30$，　$|AB|=4\times3=12$，

$|\overline{A}B|=2\times4=8$。

所以　$P(AB)=\frac{AB}{|\Omega|}=\frac{12}{30}$，　$P(\overline{A}B)=\frac{8}{30}$。

而　$$P(B)=P[B(A\cup\overline{A})]=P(AB)+P(\overline{A}B)$$
$$=\frac{12}{30}+\frac{8}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

请注意，这里　$P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$　是必然，而不是巧合，试想一想为什么？

1—1—4 条件概率与乘法公式

条件概率是指在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率。通常记作 $P(B|A)$，这里要求 $P(A)>0$。

由例 1—1 知

$$P(B)=\frac{2}{3} \quad P(B|A)=\frac{3}{5}\neq P(B)$$

条件概率一般由公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{计算}$$

如上例得

$$P(B|A)=\frac{12/30}{4/6}=\frac{3}{5}$$

当 $P(A)>0$ 时，由以上条件概率计算公式可得乘法公式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

同理，当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$$

更一般地有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1—1—5 全概率公式与贝叶斯公式

(一) 全概率公式

设 $\Omega=\sum_{i=1}^{n}B_i$，且 $B_iB_j|_{i\neq j}=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots,n$ 则对任意 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i)P(A|B_i)$$

这就是**全概率公式**。

证 由 $A=A\Omega=A(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i$

又因 $B_iB_j|_{i=j}=\varnothing$，所以，$(AB_i)(AB_j)|_{i=j}=\varnothing$

故 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

公式的作用在于简化概率计算。

(二)贝叶斯(Bayes)公式

设 $\Omega=\sum_{i=1}^{n}B_i$，且 $B_iB_j|_{i\neq j}=\varnothing \qquad i, j=1, 2, \cdots, n$

对任意 $A\in\mathscr{F}$，若 $P(A)>0$

则有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

证 由 $P(B_j|A)=\dfrac{P(B_jA)}{P(A)}=\dfrac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}$

$$\xlongequal{\text{全概率公式}}\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

例1—2 设有三位射手，每人每次射击命中目标的概率分别为 0.75、0.85、0.05。

今从三位射手中任选一位，射击一次，每位射手被选到的可能性相等。

(1) 求目标被击中的概率；

(2) 若已知目标被击中，试问哪位射手击中的可能性大？

解

(1) 设 $A=$“目标被击中”

$B_i=$“选到第 i 位射手射击”$(i=1, 2, 3)$

由全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i) \qquad (*)$$

而 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\dfrac{1}{3}$

$$P(A|B_1)=0.75,\qquad P(A|B_2)=0.85,$$
$$P(A|B_3)=0.05$$

代入(*)式,即得

$$P(A)=\frac{1}{3}\times 0.75+\frac{1}{3}\times 0.85+\frac{1}{3}\times 0.05=0.55$$

(2) 由贝叶斯公式,得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.75}{0.55}=0.45$$

同理 $P(B_2|A)=0.52,\qquad P(B_3|A)=0.03$

可见,目标由第二位射手击中的可能性大。

1—1—6 独立性

定义 1—6 称事件 A 与 B **互独立**是指等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立

称事件 A、B、C **互独立**是指等式

$$P(AB)=P(A)P(B),\qquad P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),\qquad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

同时成立。

若仅前三个等式成立,则称 A、B、C **两两独立**。

一般说来,两两独立的事件,并不一定具有互独立性;当然,互独立的事件,必然是两两独立的。

定义 1—7 称 n 个事件 A_i, $i=1, 2, \cdots, n$, 互独立,是指等式

$$P(A_iA_j)|_{i\neq j}=P(A_i)P(A_j)\qquad i, j=1, 2, \cdots, n$$
$$P(A_iA_jA_k)|_{i\neq j\neq k}=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$\cdots$$
$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$$

同时成立。

以上等式总共有

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1 \quad 个$$

事实上，所谓事件 A 与 B 互独立等价于等式

$$P(A|B)=P(A) \quad 及 \quad P(B|A)=P(B)$$

即当条件概率等于绝对概率时，两事件就相互独立。

例 1—1—3 1、2、3 三位射手进行独立射击，其命中目标的概率分别为 0.8、0.7、0.6，今每人射击一次。

求 A="目标至少被击中一次"的概率。

解 设 A_i 表示第 i 位射手击中目标 $(i=1, 2, 3)$

B 表示目标至少被击中一次。

显然， $B=A_1\cup A_2\cup A_3$

故

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&\quad-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=0.8+0.7+0.6-0.8\times0.7-0.8\times0.6\\&\quad-0.7\times0.6+0.8\times0.7\times0.6\\&=0.976\end{aligned}$$

另一解法

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-0.2\times0.3\times0.4=0.976\end{aligned}$$

§1—2 随机变量与分布函数

对于随机事件及其概率的讨论，一般来说都是针对一些特殊的、具体的事件，研究起来很不方便。为了把对于事件的概率的研究转化

为对“变量”的取值的概率的研究，我们转入关于随机变量及其概率分布的讨论。

1—2—1 随机变量及分布

定义 1—8 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P}(\cdot))$为概率空间，若对任意 $e\in\Omega$，有唯一的实数 $X(e)$与之对应，且对任一实数 x，事件$\{e|X(e)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 $X(e)$为一**随机变量**，简记为 X。

定义 1—9 设 X 为随机变量，对任意实数 x，称

$F(x)=P\{e|X(e)\leqslant x\}$为 X 的**分布函数**

简记为 $F(x)=P(X\leqslant x)$

由此定义知，对任意实数 $x_1<x_2$ 有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

由以上定义知，分布函数有如下性质：

(1) $F(x)$是一单调不减函数，即对任意 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，这只须注意到 $F(x)$是概率即知；

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(4) $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$具有右连续性。

例 1—4 某人打靶，若 e_1 表示打中，e_2 表示打不中。

令 $X(e_1)=1$, $X(e_2)=0$

且 $P\{X=1\}=p \quad (0<p<1)$

$P\{X=0\}=1-p$

则 $$F(x)=\begin{cases}0 & 当\ x<0\\ p & 当\ 0\leqslant x<1\\ 1 & 当\ x\geqslant 1\end{cases}$$

例 1—5 若以 X 表示某人独立射击直到首次命中目标所进行的射击次数，显然，X 的取值只能是 1, 2, …, 如果设此人每次射击

击中目标的概率为 p $(0<p<1)$,则有

$$p_k=P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1, 2, \cdots$$

显然, p_k 是一个概率分布,即具有性质

(1) $0<p_k<1$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

在对随机变量的研究中,我们不仅注意它的取值,而且更注意它取每个值的概率,由于不同类型的随机变量其概率特性大不相同。为了讨论的方便,通常把随机变量分为两大类,一类是**离散型随机变量**,一类是**非离散型随机变量**,对于后一类,一般只讨论**连续型随机变量**。

1—2—2 离散型随机变量

定义 1—10 设 X 为随机变量,若 X 只取有限或最多取可列多个值 x_1, x_2, …, 则称 X 为**离散型随机变量**。

若 $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1, 2, \cdots$, 且具有

(1) $0<p_k<1$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

则称 p_k, $k=1, 2, \cdots$, 为 X 的分布律。

若列成表,则可表示为

X	x_1	x_2	…	x_k	…
p	p_1	p_2	…	p_k	…

显然,以上例 1—4、例 1—5 给出的随机变量是离散型的;例 1—4 中,若

$$P(X=1)=p; \qquad P(X=0)=1-p$$

则通常称它是参数为 p 的"0—1"分布(或两点分布);