ZHONGDIANDAXUEZIZHUZHAOSHENGQUANJIE

京师普教

重点大学自主招生全解

物理真题解析与模拟

WULIZHENTIJIEXIYUMONI

总主编·薛金星

金星教育

JINXING-EDUCATION

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

ZHONGDIANDAXUEZIZHUZHAOSHENGQUANJIE

京师普教

重点大学自主招生全解

WULIZHENTIJIEXIYUMONI

物理真题解析与模拟

总主编·薛金星

金星教育

JINXING-EDUCATION

本书主编　常玉女

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

优秀高中生自主招生考试必备

你想进入中国名牌大学吗？——那就参加自主招生考试吧！
你想参加自主招生考试吗？——那就用《重点大学自主招生全解》系列图书吧！
《重点大学自主招生全解》——帮你拨开自主招生迷雾，圆你名牌大学之梦！

图书在版编目（CIP）数据

物理真题解析与模拟 / 薛金星主编. -北京：北京师范大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-303-13075-7

Ⅰ.①物… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①中学物理课-高中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第149763号

重点大学自主招生全解　物理真题解析与模拟
ISBN 978-7-303-13075-7

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
　　　　　北京新街口外大街19号　邮政编码：100875
印　　刷：北京泽宇印刷有限公司
经　　销：全国各书店
开　　本：170 mm×240 mm
印　　张：12
字　　数：320千字
版　　次：2011年8月第1版
印　　次：2011年8月第1次印刷
定　　价：29.80元

责任编辑：梁志国　杨光达　　装帧设计：金星教育设计中心
责任校对：张春燕　　　　　　责任印制：马鸿麟

出版说明

CHUBANSHUOMING

重点大学自主招生全解

2003年，我国实行高校招生制度改革，一部分重点大学开始进行自主招生，2003全国共有22所高校可以拿出当年总招生计划的5%的名额进行自主招生。到2011年全国有自主招生资格的高校已经达到80所，而且大部分高校的自主招生名额在逐年上升，有的甚至突破了总招生计划名额5%的上限。随着自主招生考试制度的不断完善，有越来越多的学生加入到自主招生备考的行列，自主招生已经成为广大考生步入理想高等学府的重要途径之一。

由于种种原因，目前有关自主招生的信息极为匮乏，加之自主招生考试有着自身的特殊性：没有考试大纲可以参照，也没有固定的考试题型，各高校的考试模式也不尽相同，这些都造成了广大考生对自主招生考试了解甚少。因此，要想真正了解自主招生考试，各高校历年考试真题无疑为广大考生打开了一扇窗。历年考试真题不但向我们阐明了自主招生考什么，怎么考，而且所考查的范围也会从考卷上有所体现。因此，各高校历年自主招生考试的真题就成为广大学生备考的有效参考资料之一。鉴于此，我们组织常年从事一线教学并对自主招生有深入研究的全国高中名师和部分大学教授编写了《重点大学自主招生全解》系列图书，希望它能满足同学们的需要。本丛书包括语文、数学、英语、物理、化学、面试真题解析与模拟以及报考指南7个分册。《重点大学自主招生全解·报考指南之名校概览》成为家长和学生了解每所自主招生高校的概况、特色专业、考试内容及报考相关事宜的重要参考资料。总之，《重点大学自主招生全解》系列图书是目前市场上科目设置最全、涵盖真题最多、解析最具权威性的一套图书。

本系列图书中各科的真题解析与模拟均包含两个篇章：专题篇与套题篇。专题篇在对历年自主招生真题精心研究的基础上，把考试内容进行专题分类，每个专题先提炼出考点，然后对真题分类解析，各个击破。最后，设置一些与本专题相关的模拟题来让同学们进行巩固训练以查漏补缺，巩固提升。解析过程中的技巧点拨、解题策略为考生备考提供了方法上的指导。套题篇是本丛书的最大亮点。它不但能让同学们直观地感知自主招生考试内容，而且能从整体上把握考试的题型、特点及相关题目的难易程度，真正达到了帮助同学们全面了解自主招生考试的目的。

本系列图书在历经三年的准备之后，终于跟读者见面了，它是参与该选题的工作人员及各位作者的智慧和汗水的结晶。我们真诚地希望本系列图书能够为准备参加自主招生考试的同学提供一份帮助。同时也恳请各位老师和同学能将自己在使用本系列图书过程中发现的问题及时反馈给我们，以便丛书再版时加以完善。非常感谢您的支持！

北京师范大学出版社

目录 CONTENTS

第一篇　专题部分

第一章　物体的平衡

考点清单

1. 基本概念:(1)力学中几种常见的力:重力、弹力、摩擦力.(2)物体平衡的种类:稳定平衡、不稳定平衡、随遇平衡.

2. 基本规律:(1)共点力作用下物体平衡的条件.(2)有固定转动轴物体平衡的条件.(3)一般物体平衡的条件.

真题解析

1. 共点力作用下物体的平衡

解题策略

(1)共点力作用下物体平衡的条件是:物体所受到的力的合力为零.

(2)物体在共面的三个非平行力作用下处于平衡,这三个力必相交于一点.

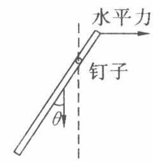

图 1-1

例 1　(2005 上海交大)如图 1-1 所示,一均匀细杆长 1 m,重力为 W,在距其上端25 cm 处用一钉子将其钉在铅直墙面上,使细杆可绕此钉子无摩擦地旋转,今施一水平力于其上端使细杆偏离铅垂线 θ 角($\theta<90°$)而平衡,则钉子作用在细杆上的力的量值为________.

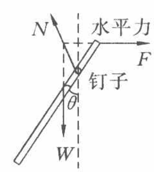

图 1-2

解析:由三力共点知识可知 N 的方向如图 1-2 所示.以钉子为轴,有 $Wl\sin\theta=Fl\cos\theta$,其中 $l=0.25$ m.

得水平力 $F=W\tan\theta$,因而 $N=\sqrt{W^2+F^2}=\dfrac{W}{\cos\theta}$.

2. 有固定转动轴的物体的平衡

解题策略

(1)力矩:力与力臂的乘积称为力矩,记为 M.力臂是转动轴到力作用线的垂直距离.

(2)定轴转动物体的平衡条件:作用于物体上所有力的力矩代数和为零.

力矩是改变物体转动状态的原因.力的作用线与轴平行时,此力对物体绕该轴没有转动作用.若力 F 不在与轴垂直的平面内,可先将力分解为垂直轴的分量 $F_{\perp}$ 和平行于轴的分量 $F_{/\!/}$.$F_{/\!/}$ 对转动不起作用,这时 F 的力矩为:$M=F_{\perp}d$.

物体的转动方向有顺时针和逆时针两种,在进行运算时,我们可以假定某一方向为正方向.这样作用于物体上的各个力所产生的力矩可用正、负号表示方向,物体所受的合力矩即为各个力代数之和.

(3)常用解题技巧:对于一些没有固定转动轴的平衡,在求解时,转动轴的选择是选待求力之外的作用点为轴,且尽量选未知力多的作用点为轴.这样可以简化数学运算.

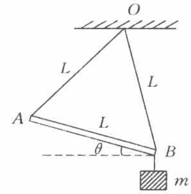

图 1-3

例 2　质量为 m、长为 L 的均质杆 AB 由系于杆两端的长也是 L 的两细线悬挂于 O 点,如图 1-3 所示.在 B 点悬挂质量为 m 的重物,求平衡时杆与水平方向的夹角 θ.

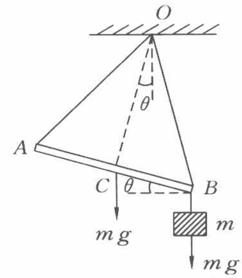

图 1-4

解析:以杆、细线、物块整体为研究对象,受力如图 1-4 所示.对轴 O 取力矩,由固定转动轴物体的平衡条件得:

$\overline{OC}\cdot mg\sin\theta-\overline{OB}\cdot mg\sin(90°-60°-\theta)=0$

把$\overline{OB}=L$,$\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}L$ 代入上式得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\cos(60°+\theta)=0$,$\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

由此得 $\theta=\arctan\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\approx16.1°$.

例 3 如图 1-5 所示,三根相同的轻杆用铰链连接并固定在位于同一水平线上的 A、B 两点,A、B 间的距离是杆长的 2 倍,铰链 C 上悬挂一质量为 m 的重物,问为使杆$\overline{CD}$保持水平,在铰链 D 上应施的最小力 $F_{\min}$为多少?

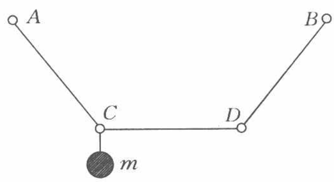

图 1-5

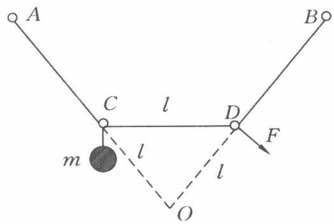

图 1-6

解析:对铰链轻杆,杆作用在铰链上的力的方向是沿杆的,因此点 A 和点 B 处的外力分别沿 CA、DB.设这两个力交于 O 点,如图 1-6 所示,因$\overline{AB}=2\overline{CD}=2\,\overline{AC}$,故$\overline{OC}=\overline{CD}=\overline{OD}$.以 O 为轴,显然力 F 垂直于 OD 时 F 有最小值.

由 $mg\dfrac{l}{2}=F_{\min}\cdot l$,得 $F_{\min}=\dfrac{mg}{2}$.

3. 一般物体的平衡

解题策略

(1)平衡条件:物体所受合外力为零($\sum F_{合}=0$);对任意轴合力矩为零($\sum M=0$).

(2)平面力系的平衡需列三个独立方程:

$$①\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}\qquad ②\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum M_{Ai}=0\\ \sum M_{Bi}=0\end{cases}\qquad ③\begin{cases}\sum M_{Ai}=0\\ \sum M_{Bi}=0\\ \sum M_{Ci}=0\end{cases}$$

以上任一组均可,但第②组中直线 AB 不能与 x 轴垂直,第③组中 A、B、C 三点不能在一条直线上.

(3)空间力系的平衡条件:一般可列出六个独立的平衡方程,即所有力在任意轴上投影的代数和为零(三个方程),所有力对任意轴力矩的代数和为零(三个方程).

例 4 (2008 上海交大)重为 80 kg 的人沿如图 1-7 所示的梯子从底部向上攀登,梯子质量为 25 kg,顶角为 30°.已知 AC 和 CE 都为 5 m 长且用铰链在 C 点处相连.BD 为一段轻绳,两端固定在梯子高度一半处.设梯子与地面的摩擦可以忽略,求在人向上攀登过程中轻绳中张力的变化规律.(取重力加速度 $g=10\ \text{m/s}^2$)

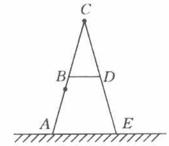

图 1-7

解析:如图 1-8 所示,设梯子的质量为 M,人的质量为 m.当人爬离 A 点的距离为 x 时,有 $N_1+N_2-mg-Mg=0$.

以 A 为轴、梯子为研究对象,有

$x\cos75°mg+\overline{AC}\cos75°Mg-2\,\overline{AC}\cos75°N_2=0$,其中$\overline{AC}=5$ m.

设绳中张力为 T,以 C 为轴、左侧梯子为对象,有

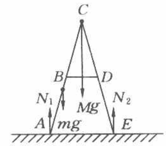

图 1-8

$$(5-x)\sin 15^\circ \cdot mg+\frac{5}{2}\cos 15^\circ \cdot T+\frac{Mg}{2}\cdot\frac{5}{2}\sin 15^\circ-5\sin 15^\circ \cdot N_1=0,$$

得 $T=(125+160x)\tan 15^\circ$ N.

4. 巧选研究对象

解题策略

解决物理问题，研究对象的选取至关重要. 我们在研究几个关联物体之间的关系时，往往采用先整体、后隔离、整体和隔离相结合，方便解题.

例 5　(2010 南大强化)如图 1-9 所示，一个质量分布均匀的直杆搁置在质量分布均匀的圆环上，杆与圆环相切，系统静止在水平地面上，杆与地面接触点为 A，与环面接触点为 B. 已知两个物体的质量线密度均为 ρ，直杆与地面夹角为 θ，圆环半径为 R，所有接触点的摩擦力足够大. 求：

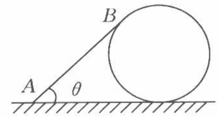

图 1-9

(1)地给圆环的摩擦力.

(2)A、B 两点静摩擦因数的取值范围.

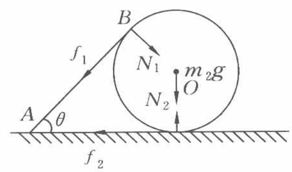

图 1-10

解析：球受力如图 1-10 所示，水平方向合力为零得：

$f_2+f_1\cos\theta=N_1\sin\theta$

以圆心 O 点为轴有：$f_1R=f_2R$，即 $f_1=f_2$，

以 A 点为轴有：$N_2l=m_2gl+N_1l$，即 $N_2=m_2g+N_1$，再取球、杆整体为研究对象、以 A 点为轴有：

$$N_2l=m_2gl+m_1g\cdot\frac{l}{2}\cos\theta，即\ N_2=m_2g+\frac{1}{2}m_1g\cos\theta$$

$$解得\ f_1=f_2=\frac{m_1g\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}=\frac{\rho gR\cos\theta}{2}$$

$$B\ 处静摩擦因数\ \mu_1\geqslant\frac{f_1}{N_2-m_2g}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

A 处静摩擦因数

$$\mu_2\geqslant\frac{f_A}{N_A}=\frac{f_2}{m_1g+m_2g-N_2}=\frac{f_2}{m_1g(1-0.5\cos\theta)}=\frac{\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\theta}{2-\cos\theta}.$$

例 6　(2004 上海交大)半径为 R 的匀质半球体置于水平面上，其重心在球心 O 正下方 C 点处. $\overline{OC}=\frac{3R}{8}$，半球质量为 m. 在半球的平面上放一质量为 $\frac{m}{8}$ 的物体，它与半球平面间的动摩擦因数为 0.2，如图 1-11 所示，则物体刚要开始滑动时离球心的最大距离为________.

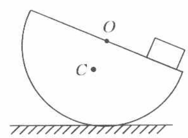

图 1-11

解析：设临界情况下直径与水平面夹角为 θ，如图 1-12 所示. 对整体有

$$mg\cdot\frac{3R}{8}\sin\theta=\frac{mg}{8}x\cos\theta，得\ x=3R\tan\theta.$$

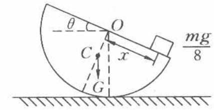

图 1-12

$$而对物体有\frac{mg}{8}\sin\theta=\mu\frac{mg}{8}\cos\theta，得\ \tan\theta=\mu,$$

所以 $x=3\mu R=0.6R$.

例 7　(2006 复旦外地)在一深度为 H 的容器中充满液体，液体密度从表面的 ρ_0 到容器底的 ρ 成线性变化. 液体里浸入两个体积同为 V 的小球，小球间用长为 l、不可伸长的轻细绳连接，第 1 个小球密度为 ρ_1，第 2 个小球密度为 ρ_2. 过一段时间后，两小球静止于图 1-13 所示位置. 求绳中张力.

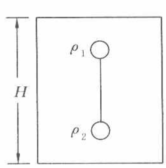

图 1-13

解析：设细绳中拉力为 T，对两个球分别有

$F_{浮1}-T-m_1g=0, F_{浮2}+T-m_2g=0.$

在液体下深度 x 处时，球受到的浮力表示为

$F_{浮x}=\rho_x gV$，

而 $\rho_x=\rho_0+\dfrac{(\rho-\rho_0)x}{H}$，这样可得 $T=\dfrac{gV}{2}\left(\rho_2-\rho_1-\dfrac{\rho-\rho_0}{H}l\right)$.

这一关系只有在 $T\geqslant 0$，$x_1>0$，$x_2<H$ 时才有可能成立.

例 8 （2006 上海交大）两个质量分布均匀的球，半径为 r，重为 P，置于两端开口的圆筒内，圆筒半径为 $R(r<R<2r)$，并竖直放在水平面上（如图 1-14 所示）. 设所有接触面均光滑，为使圆筒不至于倾倒，圆筒的最小重力 Q 为多少？如果换成有底的圆筒，情况又如何？

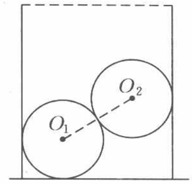

图 1-14

解析：球 O_2 受力如图 1-15 所示. 由共点力平衡条件得

$$N=P\cot\theta=P\cdot\frac{2R-2r}{\sqrt{(2r)^2-(2R-2r)^2}},$$

对圆筒有 $QR=N\cdot\sqrt{(2r)^2-(2R-2r)^2}$，即 $Q=\dfrac{2(R-r)}{R}P$.

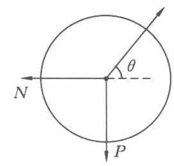

图 1-15

若筒有底，则不会翻.

名师点评

力偶矩等大、反向不在同一直线上的两个力，力偶矩则为力与力偶臂（两平行力之间的距离）的乘积，因而力偶矩与转动轴的具体位置无关.

例 9 （2006 复旦外地）在如图 1-16 所示的系统中，活塞 n 插入活塞孔中的可移动塞栓 B 和密度为 ρ 的液体平衡. 容器的截面积为 S，孔的截面积为 S_0，各滑动表面摩擦可忽略，液体不能从间隙中出来. 问若在塞栓顶上放上质量为 m_0 的物体，塞栓相对初始位置下移多少？

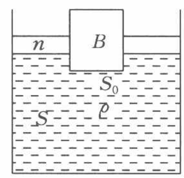

图 1-16

解析：设塞栓下降 x，则活塞升高

$$h=\frac{\Delta V}{S-S_0}=\frac{xS_0}{S-S_0}，则\ x+h=\frac{xS}{S-S_0},$$

两个面上液体的压强差增加了 $\Delta p=\dfrac{\rho gxS}{S-S_0}$.

又 $\Delta p=\dfrac{m_0g}{S_0}$，故 $x=\dfrac{m_0(S-S_0)}{\rho SS_0}$.

5. 用降维法解决空间物体的平衡

解题策略

降维法是将一个三维图变成几个二维图，即另选两个合适的平面去观察. 当遇到一个空间受力问题时，将物体受到的力分解到两个不同平面上再求解，由于三维问题不好想象，选取适当的角度，可用降维法求解. 降维的优点是把不易观察的空间物理量的关系在二维图中表示出来，使我们很容易找到各物理量之间的关系，从而正确解决问题.

例 10 一质量 $m=20$ kg 的钢件，架在两根完全相同的平行长直圆柱上，如图 1-17 所示，钢件的重心与两圆柱等距，两圆柱的轴线在同一水平面内，圆柱的半径 $r=0.025$ m，钢件与圆柱间的动摩擦因数 $\mu=0.20$. 两圆柱各绕自己的轴线做转向相反的匀速转动，角速度 $\omega=40$ rad/s. 若沿平行于圆柱轴的方向施力推着钢件做速度为 $v_0=0.050$ m/s 的匀速运动，求推力应多大？（设钢件不发生横向运动，重力加速度 g 取 10 m/s²）

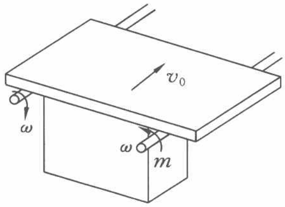

图 1-17

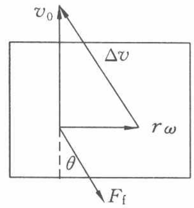

图 1-18

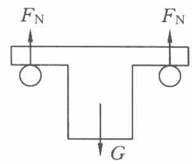

图 1-19

解析：我们从上往下看，画出俯视图，如图 1-18 所示.

我们先考虑左边圆柱与钢件之间的摩擦力，先分析相对运动的方向，钢件有向前的速度 v_0，左边圆柱有向右的速度 $r\omega$，则钢件相对圆柱的速度是 v_0 与 $r\omega$ 的矢量差，如图中 Δv 即为钢件相对于圆柱的速度，所以滑动摩擦力 F_f 的方向与 Δv 的方向相反，如图 1-18 所示.

以钢件为研究对象，在水平面上受到推力 F 和两个摩擦力 F_f 的作用，设 F_f 与圆柱轴线的夹角为 θ，当推钢件沿圆柱轴线匀速运动时应有

$$F=2F_f\cos\theta=2F_f\frac{v_0}{\Delta v}=2F_f\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+(r\omega)^2}} \qquad ①$$

而从正面看钢件在竖直平面内的受力可以求出 F_N，如图 1-19 所示，钢件受重力 G 和两个向上的支持力 F_N，且 $G=2F_N$，

所以把 $F_N=\dfrac{G}{2}$，$F_f=\mu F_N$ 代入①式，得

推力 $F=2\mu F_N\cdot\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+(r\omega)^2}}=2\mu\dfrac{mg}{2}\cdot\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+(r\omega)^2}}=2\ \text{N}$.

6. 用微元法解决静力学问题（所研究的物体是非质点）

解题策略

微元法：是从整体中取出一部分加以研究，分析微元的受力情况，然后用必要的数学方法或物理思想进行处理，进而使问题得以求解.

在用微元法解题时，常用的数学近似公式有：

$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1-\dfrac{\theta^2}{2}$（$\theta$ 很小），$(1+x)^n\approx1+nx$（$x\ll1$）等.

例 11 如图 1-20 所示，一个半径为 R 的 $\dfrac{1}{4}$ 光滑球面置于水平桌面上. 球面上有一条光滑匀质软绳，一端固定于球面顶点 A，另一端恰好与桌面不接触，且单位长度软绳的质量为 ρ. 求软绳 A 端所受的水平拉力及软绳所受球面的支持力.

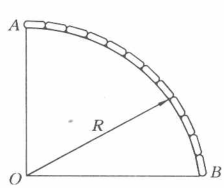

图 1-20

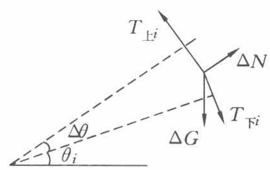

图 1-21

解析：(1)取软绳中一微段（所对圆心角为 $\Delta\theta$）研究，受力情况如图 1-21 所示.

沿圆弧切线方向有 $T_{上i}=\Delta G\cos\theta_i+T_{下i}$，即 $T_{上i}-T_{下i}=\rho gR\Delta\theta\cos\theta_i$.

其中 $R\Delta\theta\cos\theta_i=\Delta h_i$，

即该弧段在竖直方向上的投影. 将上式累加后易得最上端 A 处所受的拉力 $T=\rho gR$(最下端 B 处所受的拉力为 0).

另由 $N^2=T^2+G^2$,得 $N=\rho gR\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$.

(2)设想在 A 处将软绳缓慢拉过 $x(x\to 0)$,由于球面对软绳各处的支持力都沿半径向外,故拉动过程中只有 A 端拉力 T 和软绳重力做功. 同时软绳重力势能的变化情况等同于软绳最下端一小段 x 段移至柱面的最高处,而其余部分重力势能当成不变,故

$Tx=\Delta mgR$,其中 $\Delta m=x\rho$,得 $T=\rho gR$.

名师点评

求解软绳 A 端所受拉力的方法通常称为虚位移法,借助能量守恒知识求静力学问题有时也显得十分方便.

7. 平衡种类问题探析

解题策略

(1)稳定平衡

当物体受微小扰动稍微偏离平衡位置时,有一个力或力矩使它回到平衡位置,这样的平衡叫做稳定平衡. 特点:处于稳定平衡的物体偏离平衡位置时重心升高.

(2)不稳定平衡

当物体受微小扰动稍微偏离平衡位置时,在力或力矩作用下物体偏离平衡位置增大,这样的平衡叫不稳定平衡. 特点:处于不稳定平衡的物体偏离平衡位置时重心降低.

(3)随遇平衡

当物体受微小扰动稍微偏离平衡位置时,物体所受合外力为零,能在新的平衡位置继续平衡,这样的平衡叫随遇平衡. 特点:处于随遇平衡的物体偏离平衡位置时重心不变.

因此,确定物体平衡的种类,可以看其偏离平衡位置后受力或力矩是否使其回到平衡位置,或看其重心的变化趋势来判断.

例 12 棱长为 a 的立方体静置于一固定圆柱的顶上,如图 1-22 所示. 假定摩擦足以使立方体与圆柱间不发生滑动,试问:为使立方体保持平衡稳定,圆柱的半径 r 应为多大?(设立方体只能在图面上动)

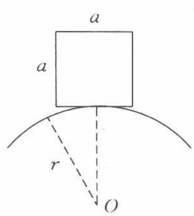

图 1-22

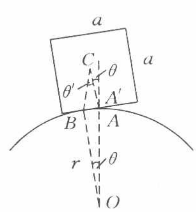

图 1-23

解析:设想立方体倾侧一小角 θ,使其底面与圆柱面的接触点由 A 移至 B,如图 1-23 所示,则 B 与圆柱中心 O 的连线与铅垂线 AO 的夹角即为 θ. 在该位置上,立方体只能做以过 B 且垂直图面的轴为固定轴的转动,而这时产生力矩的外力仅为重力. 重力的作用点为重心,方向铅垂向下. 因而,只要过立方体重心 O 的铅垂线在 B 点右方,重力的力矩就将促使立方体恢复到原来位置上,平衡就是稳定的. C 与立方体底边中点 A' 的连线与铅垂线的夹角即为 θ,因而,由图 1-23 不难看出,要使过 C 点的重力作用线在 B 点右方,只要使 $\angle BCA'=\theta'>0$.

由于立方体在倾侧过程中其底边与圆柱间无滑动,因而 $\tan\theta'=\dfrac{r\theta}{\frac{a}{2}}=\dfrac{2r\theta}{a}$.

由于 θ 为小角，θ' 也为小角，$\tan\theta' \approx \theta'$，这样，有 $\theta' > \theta$.

因此 $\frac{2r}{a} > 1$ 或 $r > \frac{a}{2}$.

模拟训练

1. 如图 1-24 所示，重为 P 和 Q 的两个小环 A 和 B 都套在一个竖直光滑的大圆环上，大圆环固定在地面上. 长为 l、质量不计的细绳两端分别拴在小环 A 和 B 上，然后又将细绳挂在光滑的钉子 O' 上，O' 位于大圆环环心 O 的正上方，当它们都静止不动时，A 环和 B 环到钉子 O' 的距离分别记为 r 和 r'，试证明：$\frac{r}{Q} = \frac{r'}{P} = \frac{l}{Q+P}$.

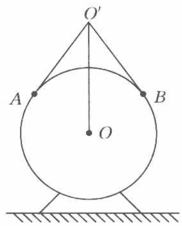

图 1-24

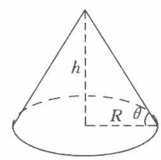

图 1-25

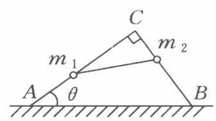

图 1-26

2. 建筑工地上的黄沙堆成圆锥形，而且不管如何堆其角度是不变的. 若测出其圆锥底的周长为 12.5 m，高为 1.5 m，如图 1-25 所示.
   (1)试求黄沙之间的动摩擦因数.
   (2)若将该黄沙靠墙堆放，占用的场地面积至少为多少？
3. 水平面固定着直角支架 ABC，支架所在平面与水平面垂直，在 AC 和 BC 杆上分别套有质量为 m_1 和 m_2 的光滑圆环，且 m_1 和 m_2 用轻质细线相连，如图 1-26 所示. 已知 AC 与水平面的夹角为 θ，求 m_1 和 m_2 平衡后细线上的拉力.
4. 一石砌堤，堤身在基石上，高为 h，宽为 b，如图 1-27 所示. 堤前水深等于堤高 h，水和堤身的单位体积重力分别为 q 和 γ，问欲防止堤身绕 A 点翻倒，比值 $\frac{b}{h}$ 应等于多少？

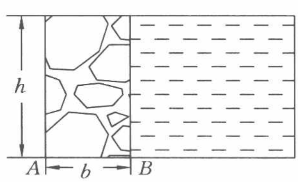

图 1-27

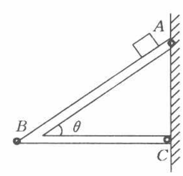

图 1-28

5. 如图 1-28 所示，轻杆 AB、BC 由铰链相连，并通过铰链固定在竖直墙壁上，构成一直角支架. 一个质量为 m 的物体，从最高处由静止开始沿 AB 杆无摩擦地滑下，求作用于 AB 杆的 B 端的作用力随时间的变化关系.
6. 半径为 r 的光滑半球形碗，固定在水平面上. 一均匀棒斜靠在碗边缘，棒的一端在碗内，一端则在碗外，如图 1-29 所示. 已知在碗内部分的长度为 l，求棒的全长 L.

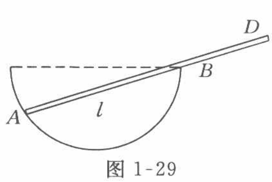

图 1-29

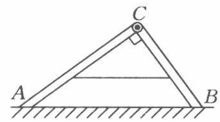

图 1-30

7. 如图 1-30 所示，两架梯子长分别为 4 m 和 3 m，重分别为 400 N 和 300 N. 两架梯子在 C 处用

铰链相连且互成直角.在距地面 0.6 m 高处用一水平绳把两架梯子系住.每架梯子的重心均在其中心,地面光滑,求:

(1)每架梯子的下端所受地面的支持力.

(2)水平绳的张力.

(3)两架梯子在 C 点的相互作用力的大小.

8. 如图 1-31 所示,静止的圆锥体竖直放置,顶角为 α. 质量为 m 且分布均匀的链条环水平地套在圆锥体上,忽略链条与圆锥体之间的摩擦力.试求链条中的张力.

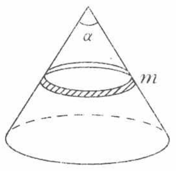

图 1-31

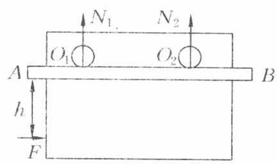

图 1-32

9. 如图 1-32 所示,装有两个定滑轮的矩形门,可在轨条 AB 上只滑不滚(因轮轴故障),其动摩擦因数 $\mu_K=0.5$,两轮间距离 $\overline{O_1O_2}=2$ m. 此门的构造为左右对称,重 $W=800$ N. 现以一水平力 F 推门使门以等速移动.

(1)如果 h 为 1.5 m,求轨条作用于每一轮的垂直支持力 N_1、N_2.

(2)如果要求推动时不使任一轮离开轨条,求 h 的最大值.

10. 用 20 块质量分布均匀的相同光滑积木块,在光滑水平面上一块叠一块地搭成单孔桥.已知每一积木块的长度为 l,横截面是边长 $h=\dfrac{l}{4}$ 的正方形,要求此桥具有最大跨度(即桥孔底宽),试画出该桥的示意图,并计算跨度与桥孔高度的比值.

11. 如图 1-33 所示,重物 G 挂在均匀硬棒上,离光滑转轴 O 为 L_0,硬棒单位长度的质量为 m_0,为使棒保持静止,问:该棒长度为多少时,可使加于其左端的竖直托力 F 最小?

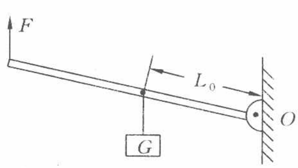

图 1-33

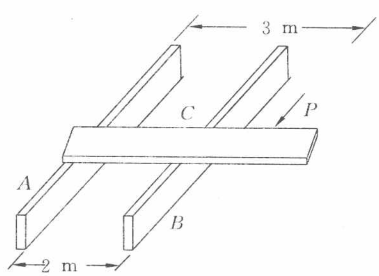

图 1-34

12. 一块重 $W=40$ N 的木板 C 放置在两根水平固定托梁 A、B 上. C 在水平面内,垂直于两托梁,尺寸如图 1-34 所示.忽略托梁宽度,C 与 A、C 与 B 之间的动摩擦因数分别为 $\mu_A=0.2$、$\mu_B=0.3$,试求使木板运动所需平行于托梁的力 P.

13. 如图 1-35 所示,六个半径均为 R 的相同圆筒重叠放置,在最下面左右两边各放一高度均为 h 的垫块,把圆筒支承着.求垫块的最小高度.(摩擦不计,且垫块不可移动)

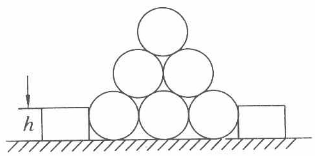

图 1-35

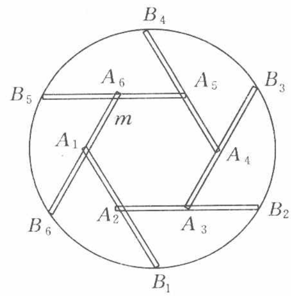

图 1-36

14. 有 6 个完全相同的刚性长条薄片 $A_iB_i(i=1,\cdots,6)$，其两端下方各有一小突起，薄片及突起的重力均可以不计. 现将此 6 个薄片架在一只水平的碗口上，使每个薄片一端的小突起 B_i 恰在碗口上，另一端小突起 A_i 位于其下方薄片的正中央，由正上方的俯视图如图 1-36 所示. 若将一质量为 m 的质点放在薄片 A_6B_6 上一点，这一点与此薄片中点的距离等于它与小突起 A_6 的距离，求薄片 A_6B_6 中点所受的(由另一薄片的小突起 A_1 所施的)压力.

15. 如图 1-37 所示，质量为 m、长为 L 的均匀细直杆竖直放置，杆下端与地面之间的动摩擦因数为 μ，杆上端用绳索拉住，绳与直杆之间的夹角为 θ. 在离地面高度为 h 处以水平力 F 作用于直杆，试问：为使直杆不滑倒，作用力 F 的最大值应是多少？

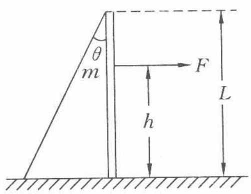

图 1-37

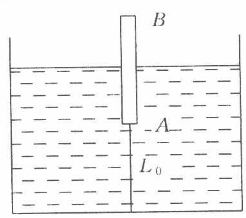

图 1-38

16. 长为 L 的均匀细木杆 AB 的 A 端被细绳系于容器底部. 将水慢慢注入容器，使 B 端浮起. 当杆竖直时，如图 1-38 所示，水的深度至少要多少？设水的密度为 ρ_1，杆的密度为 ρ_2，绳的长度为 L_0.

17. 在水平面上放有两个圆筒，一个圆筒的轴是水平的，而另一个是竖直的，两筒的下部用细管连通."水平"圆筒的半径为 r，一面是敞开的，筒内装有活塞，如图 1-39 所示."竖直"圆筒的上面是敞开的. 两个筒里注入水，并且在"水平"圆筒内，水充满被活塞隔离的整个空间，而在"竖直"圆筒内，水位于某一高度. 试求当活塞处于平衡情况下，"竖直"圆筒内水位的高度 h.(摩擦不计)

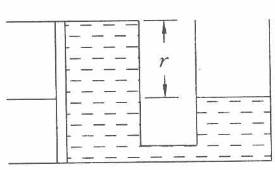

图 1-39

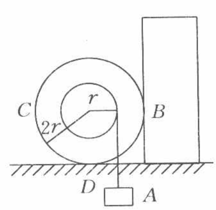

图 1-40

18. 如图 1-40 所示，物体 A、B 及滚轮 C 的质量均为 m. 滚轮 C 由固定在一起的两个同心圆盘组成，半

径分别为 $2r$ 和 r. 各接触面处静摩擦因数均为 μ,问:维持系统平衡时,μ 的最小值为多少?

19. 在离底面半径为 R 的圆柱中心 $\frac{2}{3}R$ 处,平行于轴钻一个半径为 $\frac{1}{4}R$ 的洞(图 1-41). 洞里塞满一种物质,其密度 ρ_2 为构成圆柱的物质的密度 ρ_1 的 11 倍. 圆柱放在小板上,慢慢抬高板的一端. 要使圆柱在板上还可以保持平衡状态,求板的最大倾角 α.(圆柱与小板之间的静摩擦因数 $\mu=0.3$)

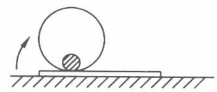
图 1-41

20. 盐水溶液的密度随深度 h 按照规律 $\rho=\rho_0+Ah$ 变化,其中 $\rho_0=1\ \mathrm{g/cm^3}$,$A=0.01\ \mathrm{g/cm^4}$. 把用细线连接的两个小球放进溶液内,两球心深度差不超过细线的长度 $l=5$ cm. 两球的体积均为 $V=1\ \mathrm{cm^3}$,质量分别为 $m_1=1.2$ g,$m_2=1.4$ g. 试求平衡时两球所在的深度.

答案解析

1. 证明:如图 1-42 所示,甲、乙分别为环 A、B 的受力分析图. 由于钉子光滑,绳的质量不计,所以绳的张力处处相等,在甲、乙图中均用 T 表示. 设 OO' 间距为 d,圆环半径为 R,由图可见,A 或 B 受力平衡的力的矢量三角形与 $\triangle OAO'$ 相似. 由对应边成比例,可得 $\frac{T}{P}=\frac{r}{d}$,$\frac{T}{Q}=\frac{r'}{d}$. 所以 $\frac{Q}{P}=\frac{r}{r'}$.

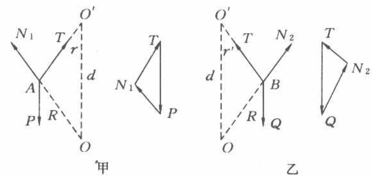

图 1-42

由合比定理,有 $\frac{Q+P}{P}=\frac{r+r'}{r'}$.

由于 $r+r'=l$,所以 $\frac{r}{Q}=\frac{r'}{P}=\frac{l}{Q+P}$.

2. 解析:(1)沙堆表面上的沙粒受重力、弹力和摩擦力的作用而静止,如图 1-43 所示,则 $mg\sin\theta=F_f=\mu mg\cos\theta$,

所以 $\mu=\tan\theta$(θ 称为摩擦角)$=\frac{h}{R}(l=2\pi R)$,

即 $\mu=\frac{2\pi h}{l}=\frac{2\pi\times1.5}{12.5}\approx0.75$,$\theta=37°$.

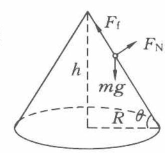
图 1-43

(2)因为黄沙是靠墙堆放的,只能堆成半个圆锥状,由于体积不变,θ 不变,要使占场地面积最小,则取 R_x 为最小.

$\mu=\frac{h}{R}$,所以 $h_x=\mu R_x$.

由圆锥体积公式,有 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R_x^2\cdot\mu R_x=\frac{1}{3}\pi\mu R_x^3=\frac{1}{3}\pi\times\frac{3}{4}R_x^3=\frac{1}{4}\pi R_x^3$

因为只能堆成半个圆,所以 $\frac{1}{8}\pi R_x^3=\frac{1}{4}\pi R^3\left(R=\frac{l}{2\pi}\approx2\ \mathrm{m}\right)$,$R_x=\sqrt[3]{2R^3}=\sqrt[3]{16}$ m,占地面积 $S_x=\frac{1}{2}\pi R_x^2=2\pi\sqrt[3]{4}\ \mathrm{m^2}$.

3. 解析:m_1、m_2 两环受力如图 1-44 所示,将各力沿支架的方向和垂直于支架的方向进行分解,有

对 m_1:$T\cos\alpha=m_1g\sin\theta$ ①

$N_1=m_1g\cos\theta+T\sin\alpha$ ②

对 m_2:$T\sin\alpha=m_2g\cos\theta$ ③

$N_2=m_2g\sin\theta+T\cos\alpha$ ④

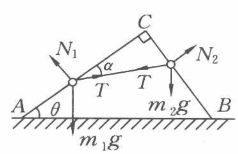
图 1-44

联立①③两式得 $T=\sqrt{m_1^2g^2\sin^2\theta+m_2^2g^2\cos^2\theta}$.

联立②③两式得 $N_1=(m_1+m_2)g\cos\theta$.

联立①④两式得 $N_2=(m_1+m_2)g\sin\theta$.

4. 解析：设堤坝的长度为 L，堤坝的重力为 G，则 $G=Lhb\gamma$，该力的作用点可认为在其几何中心.

由于水的压强与水深度成正比，故可取其平均压强为 $\bar{p}=\frac{qh}{2}$，水对堤坝的侧压力从上至下是逐渐增大的，与水的深度成正比，可以类比均匀等腰三角形板重力，将三角形板平行于底边分成若干条平行的薄条，则各条的重力从顶点到底边增大的，且与三角形的高成正比，其重力作用点在其底边高 h 上且距底边 $\frac{h}{3}$，则水对堤坝的侧压力的作用点在离底部 $\frac{h}{3}$ 处，如图 1-45 所示.

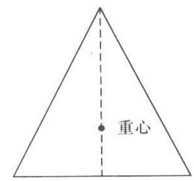

图 1-45

所以水的侧压力为 $F=Lh\bar{p}=\frac{Lqh^2}{2}$.

要防止堤身绕 A 点翻转，则应有 $M_G\geqslant M_F$，即 $Lhb\gamma\times\frac{b}{2}\geqslant\frac{Lqh^2}{2}\times\frac{h}{3}$，得 $\frac{b}{h}\geqslant\sqrt{\frac{q}{3\gamma}}$.

5. 解析：由题意知物体及杆受力情况如图 1-46 所示. 物体以 $a=g\sin\theta$ 沿 AB 杆做初速度为 0 的匀加速直线运动，物体对 AB 杆的压力 $N=mg\cos\theta$，以 AB 杆为研究对象，当物体滑到 D 点时，根据力矩平衡条件，即 $\sum M_A=0$，有

$$F\cdot\overline{AC}=N\cdot\overline{AD}=mg\cos\theta\cdot\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2=\frac{1}{4}mg^2\sin 2\theta\cdot t^2.$$

则 $F=\frac{1}{4}\frac{mg^2\sin 2\theta\cdot t^2}{\overline{AC}}$.

由上式可知 $F\propto t^2$，即 F 与 t 是二次函数关系.

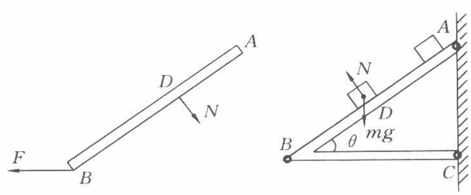

图 1-46

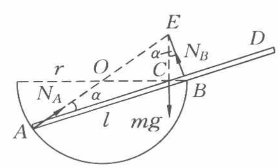

图 1-47

6. 解析：棒受支承力 N_A、N_B 和重力 mg 三力作用而处于平衡状态. N_A 沿圆的半径方向，N_B 垂直于棒，重力则通过质心. 三力的作用线(或其延长线)必交于一点，设交点为 E. 由于 BE 垂直于棒，即 $BE\perp AB$，AB 为圆的一条弦，AE 沿圆半径，故 E 点必在圆周上. 由几何关系不难求出 AC 的长. AC 长的两倍即为棒的全长.

由图 1-47 得 $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4r^2-l^2}$，$\frac{CB}{BE}=\tan\alpha=\frac{BE}{AB}=\frac{BE}{l}$. 所以 $CB=\frac{BE^2}{l}=\frac{4r^2-l^2}{l}$.

故 $L=2(AB-BC)=2\left(l-\frac{4r^2-l^2}{l}\right)=4l\left(1-\frac{2r^2}{l^2}\right)$.

7. 解析：(1) 梯子受力如图 1-48 所示. 由平衡条件得

$N_A+N_B=G_A+G_B$，

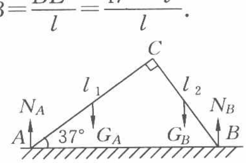

图 1-48