SHIJIE ZHUMING SHUXUE
JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名数学经典著作钩沉

立体几何卷

《世界著名数学经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHIJIE ZHUMING SHUXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名数学经典著作钩沉

立体几何卷

《世界著名数学经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社

前　言

让我们先从2010年最时髦的话题世博会谈起:比利时首都布鲁塞尔标志性建筑"原子球"建造于1958年世博会,高102 m,总质量2 200 t,由9个直径18 m的空心金属球体组成,1个圆球代表1个原子,球面用5 800块三角弧形金属板焊接而成.球与球之间由长26 m,直径3 m的空心钢管连接.各圆球与连接圆球的钢管构成一个正方体,它表现的是放大了1 650亿倍的原子结构.

几年前的秋天布鲁塞尔时间清晨4点我们在淡淡的晨雾中参观了这个庞然大物.在2010年之前,哈工大的标志也是钢球,它是一个巨大的无缝焊接的球体,放在哈工大广场的中心位置,标志着哈工大焊接技术的领先地位.而置身于比利时的"原子球"下,笔者首先联想到的不是化学不是汤姆逊,也不是门捷列夫,而是立体几何,想到设计及施工者对立体几何应用的无与伦比的娴熟.从欧洲回来后,笔者找到高中的立体几何课本想试验一下从开始学习到设计会有多大的难度,结果是大吃一惊,因为这完全是不可能的.现在的立体几何课本已完全不支持这样的一个壮举,笔者又辗转找到我国20世纪50年代的中学课本,发现似有门径,所以萌生重版老课本之意.当然,这只是

一个契机,之前也有多次的意念闪回,主要是对以前的回忆.回忆的发生有两个主要原因,一是对现实的失望与不满意,二是有曾经辉煌的过去.人们对现实多有批评,主要集中在环境、腐败、医疗与教育,而这之中教育尤甚,别的离题尚远,数学教育可置一喙.笔者觉得今日之立体几何课本与昔日相比,已丧失了推理与证明的乐趣,而这正是数学之所以吸引人而区别于别科的主要特征之一.在伯特兰·罗素的回忆录《来自记忆里的肖像》中有这样一段,英国著名教育家哈代(G.H.Hardy)曾对罗素说:如果能找到证据证明我(罗素)会在5 min内死去,他会为此感到难过,但是悲伤的心情很快就会被验证的乐趣所掩盖,我(罗素)完全同意他的看法丝毫不觉得受到冒犯(伯特兰·罗素.罗素回忆录——来自记忆里的肖像.吴凯琳,译.北京:希望出版社,2006:14).

在一本石康著的《我眼里的文化人生》(长春:时代文艺出版社,2007:21)一书中对中国作家进行了“攻击”.他写道:中国的文理分科使一帮文人的知识偏颇得可笑之极,特别是文理分科之后的文科生似乎更不必掌握多少空间概念了,殊不知这应是所有文化人知识结构的交集部分.中国作家中好奇心强的,肯定会挑点那种没有公式及试题的数学书看一下,以为这就能对数学有所了解,从而壮起鼠胆,敢于对自然科学领域内的一些问题发言了.我就从报纸上看到一些作家对于网络、电脑之类的问题发了不少言,那些言论惊人的愚昧与可气,还是别丢人现眼了,学习吧,别投机取巧了,要不,就诚实点,免开尊口总能做到吧?

过去的课本可不是这么个编法.就从本书来说吧,它当时取材于前苏联A.П.吉西廖夫所编的立体几何课本和H.A.格拉哥列夫编的《初等几何学(立体部分)》,在初稿修改后,请当时中国科学院数学研究所的关肇直先生和万哲先先生进行了审读(这两位当时都是中国顶级的一线数学家,不像现在净是一些二三线人员在编课本),后来又在时任北京师范大学副校长傅种孙领导下,由赵慈庚、钟善基、梁绍鸿诸位先生进行了审读.

管理大师彼得·德鲁克对管理有这样的高论:“管理是一种实践,其本质不在于知而在于行;其验证不在于逻辑,而在于成果;其唯一的权威就是成就.”

中学课本也一样，它不是科学论文，它的本质不在于提出新知识，而在于教学实用，它的好坏、优劣评价不在于所谓上级主管部门领导，也不在于教学研究所谓专家的自卖自夸，而在于教学的成果，即培养出的学生有真实的水平，其唯一的权威就是一线教师和学生的评价，除此之外一切都没有意义.现在的情况是教育行政部门都说多么有创新，多么有新意，多么有水平，而社会各界包括一线教师质疑声不断，批评声不绝于耳.如果是清代之前尚有情可原，因为中国这个民族是不善于用几何思维的，几何学引入中国是由徐光启开始的，作为一位科学家，徐光启充分意识到西方科学对中国传统文化的意义，他首先为引进几何学投入了巨大的精力.

徐光启最重“象数之学”，因为“道有理数所不能秘者，非言弗直，有语言所不能详者，非图弗里”.重视图像思维同推崇几何之间显然具有某种内在联系，这表现了对西方传统科学的一种深刻领悟.中国古代数学重代数而轻几何，重数量关系而轻空间形式，这代表两种不同的文化精神.现代物理学家狄拉克甚至认为，数学家可分为几何学家和代数学家两种，各代表不同的民族性格，前者代表希腊精神，后者代表阿拉伯、印度、中国等东方民族的精神.所以到了今天21世纪应该是代数与几何成为一个文明人的基本常识的时代，立体几何应该是全世界各民族的共同基础智商，中国自然不应落后，中国数学奥林匹克选手屡次在国际领先，其中试题中没有立体几何也是其中一个因素，因为这是我们数学教育这只木桶上的一块短板.

重温老课本会使我们重回“学好数理化，走遍全天下”的书声朗朗的20世纪50年代.

一位西方哲学家说：“所谓教育，就是找回前世的经验.”而乔治·史坦纳在《勘误表——审视后的生命》中则写道：“歌曲引导我们回到我们未曾到过的家.”

画画立体图形，找找异面直线，用用三垂线定理，你会重回火红年代！

刘培杰

2010.12

目　录

第一章　直线和平面

第一节　平面位置的确定

1. **引言**　立体几何所研究的是空间图形的性质. 空间图形是所有的点不全在同一个平面内的图形,几何体就是空间图形的一个例子.

空间图形可以按照某些规则,用画在一个平面内的图形来表示,这些图形给予我们类似于实际空间图形的印象.

2. **平面的表示法**　我们在日常生活中见到的物体的表面,有些很像平面的一部分,大都具有矩形的形状,例如窗玻璃面和课桌面等. 当我们在适当的角度和适当的距离观察这些物体的表面的时候,它们类似平行四边形. 因此,我们通常都画平行四边形来表示平面,如图 1.1 所示,一个平面可用一个大写的字母来表示,如图 1.1(a),(b) 中的平面 M;也可用两个字母来表示,如图 1.1(c) 中的平面 AC 或平面 AD.

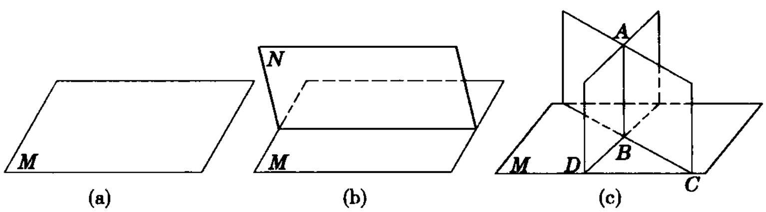

图 1.1

必须注意,虽然我们在这里画的只是一些平行四边形,但要想象它们是表示在空间无限伸展着的平面.

3. **平面的基本性质**

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这直线上所有的点都在这平面内.

这种情形我们说直线在平面内,或平面过直线.

公理 2　如果两个平面有一个公共点,那么它们相交于过这点的一条直线.

公理 3　过不在一条直线上的任意三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面.（就是说，不在一条直线上的三点确定一个平面.）

推论 1　过一条直线和这条直线外的一点可以作一个平面，并且只可以作一个平面.

因为在直线上的任意两点，同这条直线外的一点，组成了不在一条直线上的三点，根据公理 3，过这三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面. 又因为这直线上有两点在这平面内，所以根据公理 1，这平面是过这直线的. 因此，这平面是过这直线和直线外的这一点的唯一的平面.

推论 2　过两条相交直线可以作一个平面，并且只可以作一个平面.

因为这两条直线的交点，同每条直线上交点以外的任意一点，组成了不在一条直线上的三点. 根据公理 3，过这三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面. 又因为这两条直线各有两点在这平面内，所以根据公理 1，这平面是过这两条直线的. 因此，这平面是过这两条相交直线的唯一的平面.

推论 3　过两条平行直线可以作一个平面，并且只可以作一个平面.

因为根据平行直线的定义，两条平行直线必在同一平面内，所以过这两条平行直线可以作一个平面. 又根据推论 1，过这两条直线中的一条和另一条上的任意一点只可以作一个平面，所以过这两条平行直线的平面只有一个.

4. 平面绕着直线的旋转　过任意一条直线可以作无数个平面. 设已知一条直线 a（图 1.2），在这条直线外任意取一点 A，过直线 a 和点 A 可以作一个平面，叫它为平面 M. 在平面 M 外另取一点 B，过直线 a 和点 B 又可以作一个平面，叫它为平面 N. 因为 B 不在平面 M 内，所以平面 N 不能重合于平面 M. 再在平面 M 和平面 N 外另取一点 C，过直线 a 和点 C 又可以作一个平面，叫它为平面 P. 因为 C 不在平面 M 或平面 N 内，所以平面 P 不能重合于平面 M 和平面 N. 这样继续取新的点，我们可以继续得到过已知直线 a 的新的平面. 很明显的，这样的平面可以得到无数个.

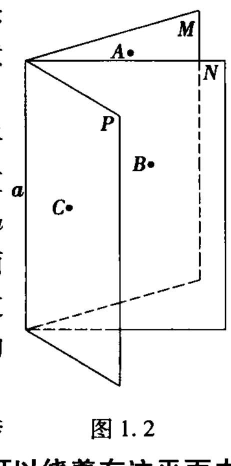

图 1.2

所有这些平面都可以看做是一个平面绕着直线 a 旋转所达到的不同位置. 因此，平面还有下面的性质：**一个平面可以绕着在这平面内的任意一条直线旋转.**

5. 关于空间的作图题　在平面几何中的作图，都是用作图仪器在一个平面内完成的，但是空间图形的作图，却不能在一个平面内完成. 并且，空间图形的作图，还多了一种元素 —— 平面；而要在空间作平面，是不能用像在平面内

作直线那样的简单方法来完成的.

因此,对于空间图形的作图,首先要确定什么叫做在空间完成各种图形的作图(包括平面的作图).

对于空间图形的作图,我们作下面的规定:

(1)如果已知确定一个平面的位置和条件,这平面就认为是可以作成的. 这就是说,我们认为能作平面,使它:① 过不在一条直线上的三个已知点;② 过一条已知直线和这直线外的一个已知点;③ 过已知的两条相交直线;④ 过已知的两条平行直线.

(2)如果已知两个相交的平面,它们的交线就认为是可以作成的.

(3)如果已知空间的一个平面,就认为可以在这平面内完成平面几何中所能完成的一切作图.

所谓在空间完成作图,就是指把它归结到有限次的运用下面的三种基本作图:

(1)过不在一条直线上的三个已知点作一个平面.

(2)求已知两个相交平面的交线.

(3)在一个已知平面内用圆规和没有刻度的直尺作平面图形.

例1　求作已知平面(图1.3中的P)和不在这平面内的已知直线a的公共点.

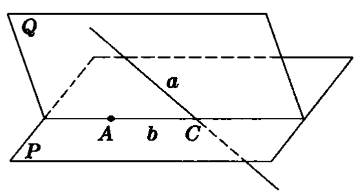

图1.3

在平面P内取任意一点A,过点A和直线a作平面Q(已知确定平面位置的条件,这平面就认为是可以作成的). 平面Q和平面P有公共点A,所以相交于过点A的直线b(已知两个相交的平面,它们的交线就认为是可以作成的). 在平面Q内求直线a和b的交点(已知一个平面,就可以在这平面内完成平面几何的作图).

如果能求得直线a和b的交点C,那么C就是我们所求作的点,如果不能求得直线a和b的交点(就是如果$a \parallel b$),那么本题无解.

例2　过已知直线(图1.4中的a)外的一个已知点A,求作这直线的平行线.

过直线 a 和点 A 作平面 M,在平面 M 内过 A 作平行于直线 a 的直线 b,直线 b 就是所求作的直线.

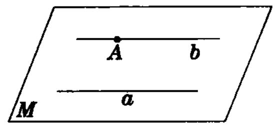

图 1.4

根据平行线的定义,所求作的直线必须和直线 a 在同一平面内. 求作的直线所过的点 A 也必须在这同一平面内,但是过直线 a 和点 A 只可以作一个平面,这就是平面 M. 所以所求作的直线必须在平面 M 内. 因为在平面 M 内过 A 只可以作一条直线与直线 a 平行,因此本题只有一解.

从这个作图题可以知道:**过已知直线外的一个已知点,可以作一条直线,并且只可以作一条直线平行于这直线.**

习题一

1. 画平行四边形来表示平面.

2. 四点中如果有三点同在一条直线上,这四点必在一个平面内,为什么?

3. 四点不都在一个平面内,如果过其中的任意三点各作一个平面,一共可作几个平面?

4. 一条直线分别与两条平行直线相交,这三条直线是不是在一个平面内?为什么?

5. (1) 过一点任意作三条直线,这三条直线是不是一定在一个平面内?为什么?

(2) 把一点分别与不过这点的一条直线上的三点联结起来,这样得到的三条直线是不是一定在一个平面内?为什么?

6. 三条直线两两平行,但不在一个平面内,如果过其中的任意两条各作一个平面,一共可作几个平面?

7. 如果直线 a 不在平面 M 内而与平面 M 有一个公共点,那么绕着直线 a 旋转的一切平面各与平面 M 有一条公共直线,并且只有一条公共直线,为什么?

8. 在已知平面内,求作一条直线,使它过这平面内的一个已知点,并且与不在这平面内的一条已知直线相交.

9. 过已知直线外的一个已知点,求作这直线的垂线.

10. 过已知直线上的一个已知点,求作这直线的垂线. 这样的垂线有多少条?

第二节　直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系

6. 两直线的位置关系　在同一平面内，两条不重合的直线或者相交，或者平行，反过来，如果两条直线相交或平行，那么它们必在同一平面内.

在空间还存在着不在同一平面内的两条直线. 例如，在图 1.5 中，直线 a 是不在平面 M 内而与平面 M 有公共点 A 的一条直线，直线 b 是在平面 M 内而不过点 A 的另一条直线，那么直线 a 和 b 就不在同一平面内.（否则过直线 b 和点 A 就可以作两个平面，但这是不可能的.）

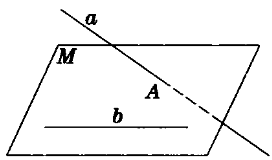

图 1.5

不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**，它们既不相交，也不平行.

7. 作图题　过已知点（图 1.6 中的 A）求作一条直线，使它与不过这点的两条已知异面直线（a 和 b）分别相交.

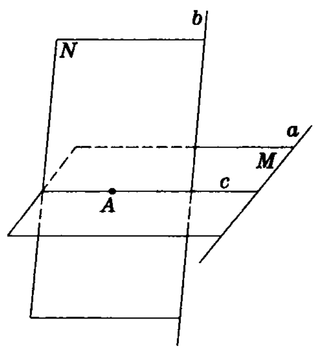

图 1.6

因为所求作的直线要与直线 a 相交，并且要过点 A，所以它必在过直线 a 和

点 A 的平面内. 同样,因为所求作的直线要与直线 b 相交,并且要过点 A,所以它又必在过直线 b 和点 A 的平面内. 因此,得到下面的作法:过直线 a 和点 A 作平面 M,过直线 b 和点 A 作平面 N,平面 M 与平面 N 相交于直线 c.

如果直线 c 与两条已知直线分别相交,它就是所求作的直线. 如果 $c \parallel a$,或 $c \parallel b$,那么本题无解.

8. **一条直线和一个平面的位置关系** 如果一条直线与一个平面有两个公共点,那么这直线就在这平面内;如果一条直线与一个平面只有一个公共点,那么这直线就与平面相交.

如果一条直线与一个平面没有公共点,那么我们说**直线与平面互相平行**.

从下面的定理可以知道互相平行的直线和平面是存在的.

9. **定理 不在一个平面内的一条直线,如果与在这平面内的一条直线平行,那么这直线与这平面平行.**

已知:不在平面 P 内的直线 a,与在平面 P 内的直线 b 平行(图 1.7).

求证:直线 a 平行于平面 P.

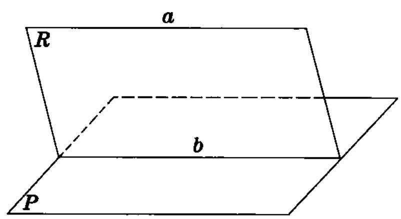

图 1.7

证明 过平行直线 a 和 b 作平面 R.

假定直线 a 和平面 P 有公共点,这公共点就既在过 a 的平面 R 内,又在平面 P 内,因此它就在平面 R 和 P 的交线 b 上. 这就是说,直线 a 就要与直线 b 相交,但这和已知的条件直线 a 与直线 b 平行相矛盾,所以是不可能的.

因此直线 a 与平面 P 不能有公共点,即直线 a 平行于平面 P.

10. **定理 如果一条直线与一个平面平行,并且过这直线的一个平面与这平面相交,那么这直线就与这交线平行.**

已知:直线 a 与平面 M 平行,平面 N 过直线 a 而与平面 M 相交于直线 b(图 1.8).

求证:$a \parallel b$.

证明 直线 a 和 b 在同一平面 N 内,并且它们不能相交. 因为如果它们相交,那么直线 a 就要与直线 b 所在的平面 M 相交,这是不可能的. 所以 $a \parallel b$.

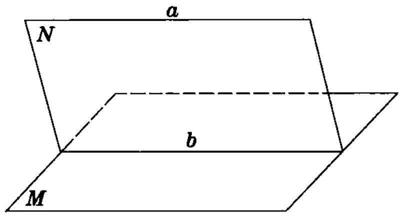

图 1.8

11. **定理　两个相交平面如果分别过两条平行直线中的每一条,它们的交线就与这两条直线平行.**

已知:直线 a 与 b 平行,平面 M 和 N 分别过直线 a 和 b,并且相交于直线 c(图 1.9).

求证:$c \parallel a, c \parallel b$.

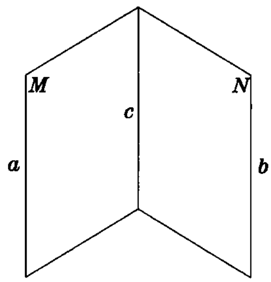

图 1.9

证明　因为直线 a 与在平面 N 内的直线 b 平行,所以直线 a 与平面 N 平行(不在一个平面内的一条直线,如果与在这平面内的一条直线平行,那么这直线与这平面平行). 因为直线 a 与平面 N 平行,直线 c 是过直线 a 的平面 M 与平面 N 的交线,所以 $c \parallel a$(如果一条直线与一个平面平行,并且过这直线的一个平面与这平面相交,那么这直线就与这交线平行).

同理可证 $c \parallel b$.

12. **定理　如果两条直线各与第三条直线平行,这两条直线互相平行.**

已知:$a \parallel c, b \parallel c$(图 1.10).

求证:$a \parallel b$.

证明　如果三条直线在同一平面内,这定理就是平面几何中的定理.

如果三条直线不在同一平面内. 在直线 b 上任意取一点 P. 过直线 a 和点 P 作平面 M,过直线 c 和点 P 作平面 N. 平面 M 和平面 N 相交于过点 P 的一条直线,并且因为 $a \parallel c$,所以这交线必与直线 a 平行,又必与直线 c 平行(两个相交

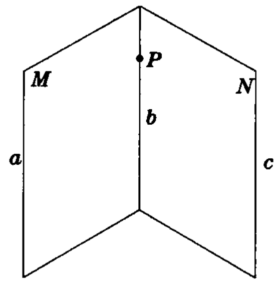

图 1.10

平面如果分别过两条平行直线中的一条,它们的交线就与这两条直线平行).但直线 b 也是过点 P 而与直线 c 平行的直线,所以直线 b 就是平面 M 和平面 N 的交线. 因此 $a \parallel b$.

13. **作图题** 求作过一条已知直线(图 1.11 中的 a) 而与另一条已知直线 b 平行的平面.

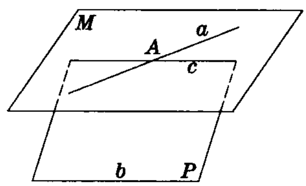

图 1.11

(1) 设直线 a 和 b 是异面直线.

如果过直线 a 上的任意一点 A 和直线 b 作平面 P,那么因为所求作的平面要与直线 b 平行,所以它与平面 P 的交线必与直线 b 平行. 因此得到下面的作法:

过直线 a 上的任意一点 A 作与直线 b 平行的直线 c. 过 a 和 c 作平面 M. 平面 M 就是所求作的平面(不在一个平面内的一条直线,如果与在这平面内的一条直线平行,那么这直线与这平面平行).

在这种情况下有一解,并且只有一解.

(2) 设直线 a 和 b 是平行直线.

因为过直线 a 而不过直线 b 的所有平面都是所求作的平面,所以在这种情况下有无数解.

(3) 设直线 a 和 b 是相交直线.

因为过直线 a 的所有平面都和直线 b 有公共点,所以在这种情况下无解.

14. 两平面的位置关系　两个不重合的平面如果有一个公共点，它们就相交于过这点的一条直线.

如果两个平面没有公共点，我们说**两平面互相平行**.

从下面的定理可以知道互相平行的平面是存在的.

15. **定理**　**如果两条相交直线分别与同一个平面平行，那么过这两条直线的平面也与这平面平行.**

已知：两条相交直线 a 和 b 分别与平面 M 平行，平面 N 过直线 a 和 b（图 1.12）.

求证：平面 N 平行于平面 M.

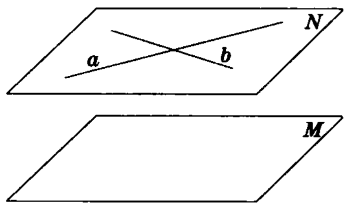

图 1.12

证明　假定平面 N 和平面 M 相交于某一条直线，那么两条相交直线 a 和 b 就都与这交线平行，但这是不可能的. 所以平面 N 平行于平面 M.

推论　**如果在一个平面内的两条相交直线，分别与在另一个平面内的两条直线平行，那么这两个平面平行.**

16. **定理**　**两个平行平面分别与第三个平面相交，它们的交线平行.**

已知：平面 M 平行于平面 N，平面 M 和平面 N 与平面 P 分别相交于直线 a 和 b（图 1.13）.

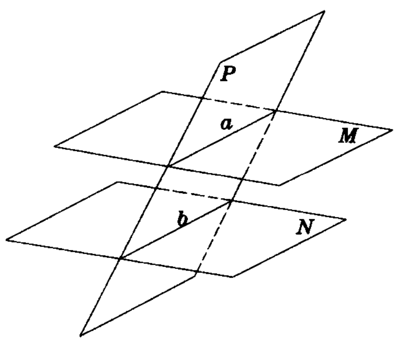

图 1.13

求证：$a \parallel b$.

证明 直线 a 和 b 在同一平面 P 内，并且它们不能相交，因为如果它们相交，那么它们所在的平面 M 和 N 就要相交，但这与已知的条件不合. 所以 $a \parallel b$.

17. **作图题** 过已知平面(图 1.14 中的 M)外的一个已知点 A，求作这平面的平行平面.

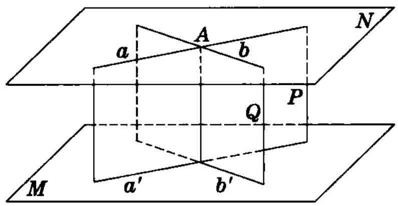

图 1.14

在平面 M 内任意作两条相交直线 a'，b'，并且过直线 a' 和点 A 作平面 P，过直线 b' 和点 A 作平面 Q. 因为所求作的平面要与平面 M 平行，所以它与平面 P、平面 Q 的交线必分别与直线 a'，b' 平行. 因此得到下面的作法：

在平面 M 内任意作两条相交直线 a'，b'，过点 A 作直线 $a \parallel a'$，作直线 $b \parallel b'$. 过直线 a 和 b 作平面 N.

平面 N 就是所求作的平面(如果在一个平面内的两条相交直线，分别与在另一个平面内的两条直线平行，那么这两个平面平行).

本题有一解，并且只有一解.

从这个作图题可以知道：**过已知平面外的一个已知点，可以作一个平面，并且只可以作一个平面平行于这平面.**

18. **定理** **夹在两个平行平面间的平行线段相等.**

已知：AB 和 CD 是夹在平行平面 M 和 N 间的平行线段(图 1.15).

求证：$AB = CD$.

证明 过平行直线 AB 和 CD 作平面 P，那么平面 P 与平行平面 M 和 N 的交线 AC 和 BD 平行. 因此 $ABDC$ 是平行四边形，所以 $AB = CD$.

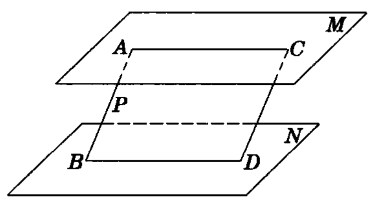

图 1.15

定理 **两条直线被三个平行平面所截，对应线段成比例.**

已知：直线 AC 和 DF 分别被三个平行平面 M，N，P 截于 A，B，C 和 D，E，F(图 1.16).

求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

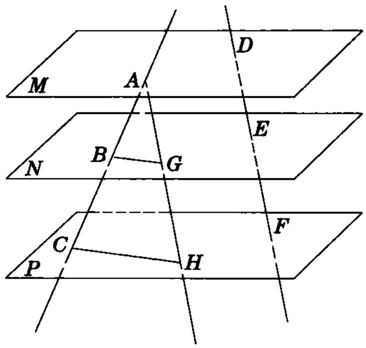

图 1.16

证明　过 A 作直线 $AH\parallel DF$，直线 AH 被平面 N,P 截于 G,H，则 $AG=DE$，$GH=EF$（夹在两个平行平面间的平行线段相等）. 过直线 AC 与 AH 作平面，那么它与平面 N 和 P 就分别相交于 BG 和 CH. 在 $\triangle ACH$ 中，$BG\parallel CH$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}$. 但因 $AG=DE$，$GH=EF$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

19. **定理　如果两个角的两双边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.**

已知：在 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 中，$AB\parallel A'B'$，$AC\parallel A'C'$，并且方向都相同（图 1.17）.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

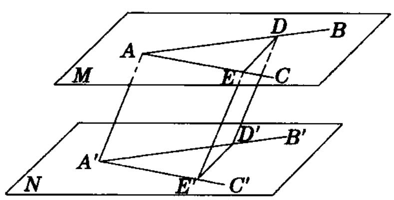

图 1.17

证明　如果两个角在同一平面内，这定理就是平面几何中的定理.

如果两个角不在同一平面内. 在 AB 和 $A'B'$ 上分别取相等的线段 AD，$A'D'$，在 AC 和 $A'C'$ 上分别取相等的线段 AE，$A'E'$. 联结 AA'，DD'，EE'，DE，$D'E'$.

线段 AD 和 $A'D'$ 平行且相等，所以 $AA'D'D$ 是平行四边形，因此线段 AA' 和