高等数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解 下册

GAODENG SHUXUE
XITI QUANJIE

主编　徐丽君　温松

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等数学学习辅导丛书

高等数学习题全解

（下册）

主　编　徐丽君　温　松

西南交通大学出版社

·成　都·

内容简介

本书是与张波汉、谭千蓉编写的 21 世纪高等教育规划教材《高等数学》（上下册）相配套的学习辅导书，书中内容包含了《高等数学》（上下册）中全部习题的详细解答。

本书不仅可以作为高等学校学习高等数学课程的学生的学习参考书与讲授高等数学课程的教师的教学参考书，也可以作为准备报考高等学校理工类各专业研究生的学生的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解 / 徐丽君，温松主编. —成都：西南交通大学出版社，2010.8

（高等数学学习辅导丛书）

ISBN 978-7-5643-0849-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①徐… ②温… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－解题 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 167087 号

高等数学学习辅导丛书

高等数学习题全解

（上、下册）

主编 徐丽君 温 松

*

责任编辑 张宝华

特邀编辑 孟秀芝

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

成都蜀通印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm × 260 mm 总印张：29

总字数：720 千字

2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-0849-0

套价：49.00 元

目　录

第八章　多元函数微分学及应用

第一节　多元函数的基本概念

习题 8.1

1. 用不等式组表示由下列曲线围成的平面闭区域 D，并画出图形.

（1）D 由 $y=\frac{1}{x},y=x,x=2$ 围成；

（2）D 由 $y^2=2x,x-y=4$ 围成；

（3）D 由 $y=2x,y=2,y=\frac{8}{x}$ 围成；

（4）D 由 $y=\mathrm{e}^x,x=0,y=\mathrm{e}$ 围成.

解　（图略）

（1）解法过程：先求出其中一个变量（如 x）的取值范围：将区域 D 投影到 x 轴上得 x 的取值范围 $1\leqslant x\leqslant 2$；然后平行 y 轴正向画直线穿过区域 D 时，依次与 D 的两条边界线相交 $y=\frac{1}{x},y=x$，这两条边界线即是 y 的取值范围 $\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x$. 于是得不等式组　D：$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\end{cases}$ 即为所求.

（2）D：$\begin{cases}\frac{y^2}{2}\leqslant x\leqslant y+4\\ -2\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$.

（3）D：$\begin{cases}\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant \frac{8}{y}\\ 2\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$　或　$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ 2\leqslant y\leqslant 2x\end{cases}$　和　$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4\\ 2\leqslant y\leqslant \frac{8}{x}\end{cases}$.

（4）D：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ \mathrm{e}^x\leqslant y\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时，求 $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$.

解　当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时，

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2}=\frac{|xy|}{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 x 与 y 同号时为 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，当 x 与 y 异号时为 $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. 试证明函数 $F(x,y)=\ln x\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明 左端 $=F(xy,uv)=\ln(xy)\ln(uv)$

$$\begin{aligned}右端&=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)\\&=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v\\&=\ln x[\ln(uv)]+\ln y[\ln(uv)]\\&=\ln(uv)\ln(xy)=左端，得证.\end{aligned}$$

4. 求下列函数的定义域.

（1）$z=\ln(y-x^2+1)+\dfrac{1}{x-y}$；（2）$z=\sqrt{x-\sqrt{2y}}$；

（3）$z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$；（4）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

（5）$z=\ln(y-x^2)-\sqrt{1-y-x^2}$；

（6）$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$.

解 （1）$z=\ln(y-x^2+1)+\dfrac{1}{x-y}$ 的定义域为：$y-x^2+1>0$ 且 $x-y\neq0$，

故 $$D=\{(x,y)|y>x^2-1 且 x\neq y\}$$

（2）$z=\sqrt{x-\sqrt{2y}}$ 的定义域为：$2y\geqslant0$ 且 $x-\sqrt{2y}\geqslant0$，

故 $$D=\left\{(x,y)\middle|x\geqslant0,y\geqslant0,y\geqslant\frac{x^2}{2}\right\}$$

（3）$z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$ 的定义域为：$0\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant1$，

故 $$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant4\}$$

（4）如图 8.1 所示，$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域为

$$x+y>0 \quad 且 \quad x-y>0$$

故 $$D=\{(x,y)|-x<y<x 且 x>0\}$$

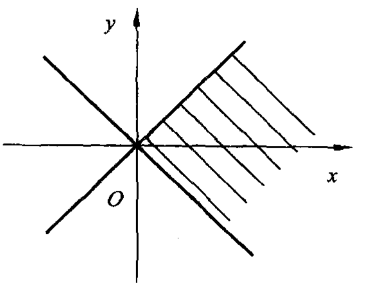

图 8.1

（5）$z=\ln(y-x^2)-\sqrt{1-y-x^2}$ 的定义域为

$$y-x^2>0 \quad 且 \quad 1-y-x^2\geqslant0$$

故
$$D=\{(x,y)\mid y>x^2 \text{ 且 } y\leqslant 1-x^2\}$$

（6）$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ 的定义域为

$$R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0 \quad \text{且} \quad x^2+y^2+z^2-r^2>0$$

故
$$D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$$

5. 求下列各极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+4}}{e^{xy}+\sin(xy)}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

（6）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（7）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

解　（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y=1\times 0=0$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(\sqrt{xy+4}+2)}{(\sqrt{xy+4})^2-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+4}+2)=4$

（3）因为当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $\sin\dfrac{1}{y}$ 为有界变量，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\frac{1}{y}=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\sin\frac{1}{x}=0$$

故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

（4）因为
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(3-\sqrt{xy+4})=1,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[e^{xy}+\sin(xy)]=1$$

故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+4}}{e^{xy}+\sin(xy)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(3-\sqrt{xy+4})}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[e^{xy}+\sin(xy)]}=1$$

（5）原式$=\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{\ln e}=e$

（6）因为
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln(x+e^y)=\ln 2,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=1$$

故 $$原式=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\ln2$$

（7）因为 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(1-xy)=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(x^2+y^2)=1$

故 $$原式=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(1-xy)}{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(x^2+y^2)}=1$$

6. 证明下列极限不存在.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^3}$； （2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x-y}{x+y}$.

证明 （1）当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^3}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^3x^3}=\lim_{x\to0}\frac{k}{x+k^3}=\frac{1}{k^2}(k\neq0)$$

当 k 取不同的非零实数时，上述值不同，所以原式无极限，得证.

（2）当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于$(0,0)$时 $(k\neq-1)$，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{2x-y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{2x-kx}{x+kx}=\frac{2-k}{1+k}$$

当 k 取不同的实数时 $(k\neq-1)$，上述值不同，所以原式无极限，得证.

7. 问：函数 $z=\frac{1}{\sin x\cos y}$ 在何处是间断的？

解 $z=\frac{1}{\sin x\cos y}$，当 $\sin x=0$ 或 $\cos y=0$ 时，函数间断. 故当 $x=k\pi$ 或 $y=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$时，函数间断，间断点为

$$\{(x,y)|x=k\pi,k为整数\}\cup\left\{(x,y)\middle|y=k\pi+\frac{\pi}{2},k为整数\right\}$$

8. 设 $z=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：函数在点 $(0,0)$ 处极限不存在.

证明 （1）当(x,y)沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+0}=1$$

（2）当(x,y)沿直线 $y=-x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0$$

由极限的唯一性，所以上述极限不存在，得证.

第二节 偏导数

习题 8.2

1. 求下列函数的偏导数.

（1）$z=x^2+y^2-\cos(xy)$；（2）$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

（3）$z=\mathrm{e}^x\ln\sqrt{x^2+y^2}$；（4）$z=(x^2+y^2)^x$；

（5）$z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；（6）$z=x^{x^y}$；

（7）$u=\mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)}$.

解 （1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y\sin(xy)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+x\sin(xy)$

（2）$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$

（3）$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\mathrm{e}^x\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{y\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}$$

（4）$z=\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right]=(x^2+y^2)^x\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}\cdot x\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=2xy(x^2+y^2)^{x-1}$$

（5）$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$$

（6）$z=\mathrm{e}^{x^y\ln x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^y\ln x}\left(yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^y\ln x}\cdot x^y(\ln x)^2=x^{x^y}x^y(\ln x)^2$$

（7）$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{(x^2+y^2+z^2)}\cdot 2x=2xe^{(x^2+y^2+z^2)}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{(x^2+y^2+z^2)}\cdot 2y=2ye^{(x^2+y^2+z^2)}$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{(x^2+y^2+z^2)}\cdot 2z=2ze^{(x^2+y^2+z^2)}$$

2. 设 $z=\begin{cases}(x+y)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解　（1）当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right]$$

$$=2(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x+y)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$=2(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

（2）当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x+\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

因为 $\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}$ 为有界变量，所以上式等于 0，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}2(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

3. 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

（1）$z=y\ln(xy)$；　　（2）$z=\sin^2(ax+by)$（a、b 均为常数）；

（3）$z=y^{\ln x}$.

解　（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{y}{x}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(xy)+\frac{yx}{xy}=\ln(xy)+1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=-\frac{y}{x^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\sin(ax+by)\cdot\cos(ax+by)\cdot a=a\sin[2(ax+by)]$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\cos[2(ax+by)]\cdot 2a=2a^2\cos[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin(ax+by)\cdot\cos(ax+by)\cdot b=b\sin[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos[2(ax+by)],\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos[2(ax+by)]$$

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln x}\cdot\ln y\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln y}{x}y^{\ln x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\ln y}{x^2}y^{\ln x}+\frac{\ln y}{x}y^{\ln x}\ln y\cdot\frac{1}{x}=\left[-\frac{1}{x^2}\ln y+\left(\frac{\ln y}{x}\right)^2\right]y^{\ln x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x\cdot y^{\ln x-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ln x(\ln x-1)y^{\ln x-2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}y^{\ln x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}y^{\ln x}+\frac{\ln y}{x}\ln x\cdot y^{\ln x-1}=\frac{1+\ln x\ln y}{xy}y^{\ln x}$$

4. 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2}{u}$

证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-y\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{z\cdot 2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(y^2+z^2+x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{u}$$

5. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+xy$（其中 f 可微），求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解 因为 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+xy$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+y=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)\cdot x+x=f'(xy)+x$$

6. 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线对于 y 轴正向的倾角是多少？

解 由题意可知，函数 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 在 $(1,1,\sqrt{3})$ 处关于 y 的偏导数就是所求倾角的正切值. 因为

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

又因为
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\beta=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$.

7. 设 $u=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，验证 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

证明
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{y}{2y\sqrt{y-x}\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{y-x}}}{y-x}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{xy}{2y^2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}=\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2y\sqrt{y-x}}+\frac{\sqrt{x}}{2y}\cdot\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{y-x}}(-1)}{(y-x)}=\frac{1}{4\sqrt{x}y\sqrt{y-x}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{3/2}}$$

$$=\frac{y-x+x}{4y\sqrt{x}(y-x)^{3/2}}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{3/2}}$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

得证.

8. 证明：$z=\varphi(x)\psi(y)$ 满足方程 $z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$，其中 $\varphi(x),\psi(y)$ 可微.

证明　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)\psi(y)\text{，}\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'(x)\psi'(y)\text{，}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(x)\psi'(y)$$

故
$$\text{左端}=\varphi(x)\psi(y)\cdot\varphi'(x)\psi'(y)$$
$$\text{右端}=\varphi'(x)\psi(y)\cdot\varphi(x)\psi'(y)=\varphi(x)\psi(y)\cdot\varphi'(x)\psi'(y)=\text{左端}$$

得证.

9. 设 $f(x,y,z)=2xy^2+2yz^2+2zx^2$，求 $f''_{xx}(0,0,1)$，$f''_{yz}(0,-1,0)$，$f''_{xz}(1,0,2)$.

解　因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2+4zx$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4z$，所以 $f''_{xx}=(0,0,1)=4$.

因为 $\frac{\partial f}{\partial y}=4xy+2z^2$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=4z$，所以 $f''_{yz}(0,-1,0)=0$.

因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=4x$，所以 $f''_{xz}=(1,0,2)=4$.

10. 设 $u=\mathrm{e}^{xyz}$，求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{xyz}\cdot yz=yz\mathrm{e}^{xyz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z\mathrm{e}^{xyz}+yz\mathrm{e}^{xyz}\cdot xz=(z+xyz^2)\mathrm{e}^{xyz}$$

所以
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+2xyz)\mathrm{e}^{xyz}+(z+xyz^2)\mathrm{e}^{xyz}\cdot xy=(1+3xyz+x^2y^2z^2)\mathrm{e}^{xyz}$$

第三节　全 微 分

习题 8.3

1. 求下列函数的全微分.

（1）$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　（2）$z=x^y\ln(xy)$；

（3） $z=x^{yz}$； （4） $z=\ln\left(\tan\dfrac{y}{x}\right)$；

（5） $z=\tan(x+y)+3\cos(xy)$.

解 （1）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以 $$dz=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy=\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$$

（2）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\ln(xy)+x^y\cdot\frac{y}{xy}=[y\ln(xy)+1]x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x\cdot\ln(xy)+x^y\frac{x}{xy}=\left[\ln x\ln(xy)+\frac{1}{y}\right]x^y$$

所以 $$dz=[y\ln(xy)+1]x^{y-1}dx+\left[\ln x\ln(xy)+\frac{1}{y}\right]x^y dy$$

（3）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1}，\quad\frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}\ln x\cdot z=zx^{yz}\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{yz}\ln x\cdot y=yx^{yz}\ln x$$

所以 $$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$$

（4）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}}=-\frac{2y}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}$$

所以 $$dz=-\frac{2y}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}dx+\frac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}dy=\frac{2}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}(xdy-ydx)$$

（5）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sec^2(x+y)-3y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sec^2(x+y)-3x\sin(xy)$$

所以 $$dz=[\sec^2(x+y)-3y\sin(xy)]dx+[\sec^2(x+y)-3x\sin(xy)]dy$$

2. 设函数 $z=\frac{y}{x}$，求当 $x=1,y=2,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

所以 $$dz\big|_{\substack{(1,2)\\(0.1,-0.2)}}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,2)}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,2)}\Delta y=-0.4$$

3. 设 $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求 $df(1,1,1)$.

解　因为 $u=f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{zy^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,1,1)}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,1,1)}=-1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(1,1,1)}=0$$

$$df(1,1,1)=dx-dy$$

4. 设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，试证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处两个一阶偏导数都存在，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}}{\Delta x}=0$$