锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

数列、推理与证明

丛 书 主 编　司马文　曹瑞彬

丛书副主编　冯小秋　钟志健 [redacted]

本 册 主 编　许学龙

品牌连续热销 8 年

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

数列、推理与证明

丛书主编　司马文　曹瑞彬

丛书副主编　冯小秋　钟志健

执行主编　江　海

本册主编　许学龙

编　　者　万强华　孙志明　许学龙　曹建峰　毛金才　李庆春　周志祥　朱燕卫　金尤国　胡志彬　丁锁勤　钱　勇　吴志山　何福林　沈桂彬　李小慧　朱时来　王春和　周拥军　王新祝　李家亮　丁　勇　肖亚东　吴淑群　张季锋　李金光

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目(CIP)数据

锦囊妙解创新导学专题. 高中数学. 数列、推理与证明/司马文，曹瑞彬丛书主编；许学龙本册主编. 一北京：机械工业出版社，2010. 10（2010. 11 重印）

ISBN 978-7-111-31843-9

Ⅰ. ①锦… Ⅱ. ①司… ②曹… ③许… Ⅲ. ①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 175918 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：石晓芬　　　责任编辑：崔汝泉
责任印制：李　妍
北京诚信伟业印刷有限公司印刷
2010 年 11 月第 1 版第 2 次印刷
169mm×228mm · 10.5 印张 · 300 千字
标准书号：ISBN 978-111-31843-9
定价：14.00 元

前言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚爱，在此深表感谢。为了对得起广大读者的信任，对得起自己的职业良心，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书，力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而力求让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付裕如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合“课标解读”、“知识清单”、“易错清单”、“点击高(中)考”、“模拟演练”等栏目设计，突出教材中的重点和难点。并将高(中)考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生的记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔，吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果，选例新颖典型，难度贴近高(中)考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然而细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解，从而收到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以“新课程标准”为纲，以“考试说明”与近年考卷中体现的高(中)考命题思路为导向，起点低、落点难，重点、难点诠释明了，高(中)考关健热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握“捕鱼之术”，其实就是创新教育的主要目标。本丛书策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助你学到知识，掌握知识，而且能掌握其学习方法，养成创新意识，增强创新能力，那将能让你终身受益。

司马文

曹瑞彬

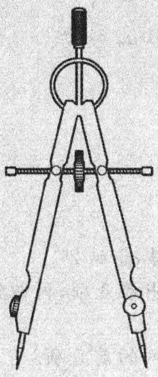
目录

第一章

数列

第1讲 数列的概念与通项公式

课标解读



【学习目标】

1. 知识目标：通过枚举归纳：

(1) 认识数列的特点，掌握数列的概念及表示方法.

(2) 了解数列通项公式的意义及数列分类.

(3) 能由数列的通项公式求出数列的各项，反之，能由数列的前几项写出数列的一个通项公式.

2. 能力目标：通过对数列通项公式的探究和应用，帮助学生通过问题解决获得数学知识；在交流过程中，养成表述、抽象、类比、概括、总结的思维习惯.

3. 情感目标：通过各种有趣的、贴近学生生活的素材激发学生的学习兴趣和热爱生活的情感.

【重难点聚焦】

1. 重点：数列的概念及理解数列是一种特殊的函数.

2. 难点：根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

这是这一章的开启课，以后所学的等差数列、等比数列都是本节所学数列的特殊情况，故如何根据数列的前几项推导出数列的一个通项公式是本节课要突破的一个教学难点.

知识清单

知识要点1：

数列的定义

按一定次序排列的一列数称为数列.数列中的每一个数都叫做这个数列的项.排在第一位的数列称为这个数列的第1项(通常也叫做首项),排在第二位的数称为这个数列的第2项……,排在第n位的数称为这个数列的第n项.所以,数列的一般形式可以写成:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\cdots$,简记为$\{a_n\}$,项数有限的数列为"有穷数列",项数无限的数列为"无穷数列".

例 (1)数列:1,2,3,4,5;数列:5,4,3,2,1;它们是否是同一数列?

(2)$-1,1,-1,1$是否为数列?

【解析】判断一组数是否是数列以及两数列是否是同一数列,最根本还是从定义出发来加以判断.

【答案】(1)不是 (2)是

点评 集合中的元素互异且无序而数列中的元素有序且可相同.

变题1 观察下面各列数的特点,用适当的数填空,使之构成一个数列

(1)2,4,( ),16,32,( ),128

(2)( ),4,9,16,25,( ),49

(3)$-1,\frac{1}{2}$,( ),$\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6}$,( )

(4)$1,\sqrt{2}$,( ),$2,\sqrt{5}$,( ),$\sqrt{7}$

【解析】找出数列前后项之间的关系以及规律,由观察可得(1) $a_n=2^n$

(2)$a_n=n^2$ (3)$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ (4)$a_n=\sqrt{n}$

【答案】(1)8,64 (2)1,36 (3)$-1/3$ (4)$\sqrt{3},\sqrt{6}$

点评 数列的排列规律的研究有利于题目的解决.

变题2 已知$a_1=2,a_{n+1}=2a_n$写出前3项,并猜想a_n.

【答案】$a_1=2,a_2=2\times2=2^2,a_3=2\times2^2=2^3$,观察可得$a_n=2^n$.

点评 这类问题要求不高,主要掌握由首项和递推关系,先求出前几项,再归纳、猜想a_n.

变题3 设数列$\{a_n\}$满足$\begin{cases}a_1=1\\a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n>1)\end{cases}$写出这个数列的前5项.

【解析】题中已给出$\{a_n\}$的第1项即$a_1=1$,递推公式:$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$,

据题意可知结果.

【答案】$a_1=1,a_2=1+\frac{1}{a_1}=2,a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{3}{2},a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{3},a_5=\frac{8}{5}$

点评 数列的通项公式与递推关系在不同条件下作用不同,很多时候可由递推关系总结出通项公式,有时递推关系比通项公式更为有用.

知识要点 2：

数列的表示方法

①通项公式法：如果数列$\{a_n\}$的第n项与序号n之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式.

②递推公式法：如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项(或前几项)，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}(或前n项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

③图像法：以项数n为横坐标，相应的项a_n为纵坐标，即以(n,a_n)为坐标在平面直角坐标系中做出点，所得的数列的图像是一群孤立的点，因为横坐标为正整数，所以这些点都在y轴的右侧，而点的个数取决于数列的项数. 从图像中可以直观地看到数列的项随项数由小到大变化而变化的趋势.

例 观察钢管堆放示意图如图 1-1-1，寻其规律，并用恰当的方法表示每堆钢管数.

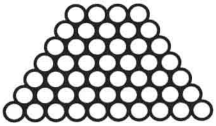


图 1-1-1

【解析】考查数列的多种表示方法：

【解】解法一：通项公式法

自上而下：第 1 层钢管数为 4；即：$1\leftrightarrow 4=1+3$

第 2 层钢管数为 5；即：$2\leftrightarrow 5=2+3$

第 3 层钢管数为 6；即：$3\leftrightarrow 6=3+3$

第 4 层钢管数为 7；即：$4\leftrightarrow 7=4+3$

第 5 层钢管数为 8；即：$5\leftrightarrow 8=5+3$

第 6 层钢管数为 9；即：$6\leftrightarrow 9=6+3$

第 7 层钢管数为 10；即：$7\leftrightarrow 10=7+3$

若用a_n表示钢管数，n表示层数，则可得出每一层的钢管数为一数列，且$a_n=n+3(1\leqslant n\leqslant 7)$

解法二：递推公式法

考虑上下层之间的关系自上而下每一层的钢管数都比上一层钢管数多 1，

即$a_1=4$；$a_2=5=4+1=a_1+1$；$a_3=6=5+1=a_2+1$

依此类推：$a_n=a_{n-1}+1(2\leqslant n\leqslant 7)$

解法三：列表法

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	5	6	7	8	9	10

解法四：图像法(如图 1-1-2)

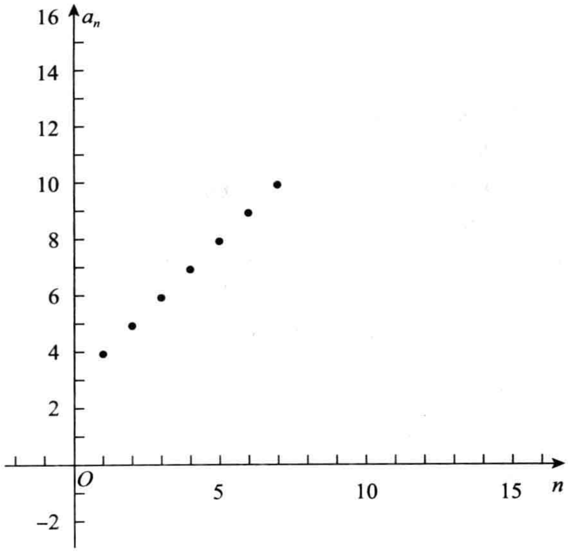


图 1-1-2

点评 数列的表示方法多种多样，但不是所有的数列都适用每一种方法.

变题1 写出下面各数列的一个通项公式：

(1) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\cdots$;

(2) $-1,\frac{3}{2},-\frac{1}{3},\frac{3}{4},-\frac{1}{5},\frac{3}{6},\cdots$;

(3)3,33,333,3333,⋯.

【解析】(1) 每一项的分子比分母少1，而分母组成数列 $2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots$，所以 $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$.

(2) 奇数项为负，偶数项为正，故通项公式中含因子 $(-1)^n$；各项绝对值的分母组成数列 1，2，3，4，⋯；而各项绝对值的分子组成的数列中，奇数项为1，偶数项为3，即奇数项为 $2-1$，偶数项为 $2+1$，所以 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{2+(-1)^n}{n}$，也可写为 $a_n=\begin{cases}-\frac{1}{n}(n\text{ 为正奇数})\\ \frac{3}{n}(n\text{ 为正偶数})\end{cases}$.

(3) 将数列各项改写为 $\frac{9}{3},\frac{99}{3},\frac{999}{3},\frac{9\,999}{3},\cdots$，分母都是3，而分子分别是 $10-1,10^2-1,10^3-1,10^4-1,\cdots$，所以 $a_n=\frac{1}{3}(10^n-1)$.

点评 求通项方法有：(1) 化归思想 —— 把未知的问题化为已知的问题；(2) 把每一项表示成两项的和、差 或乘积.

变题2 根据下面各数列前几项的值，写出数列的一个通项公式：

(1) $\frac{2}{3},-1,\frac{10}{7},-\frac{17}{9},\frac{26}{11},-\frac{37}{13},\cdots$;

(2)5,55,555,5 555,55 555,…;

(3)5,0,－5,0,5,0,－5,0,….

【解析】(1) 偶数项为负,奇数项为正,故通项公式必含因子$(-1)^{n+1}$,观察各项绝对值组成的数列,从第3项到第6项可见,分母分别由奇数7,9,11,13组成,而分子则是$3^2+1,4^2+1,5^2+1,6^2+1$,按照这样的规律第1、2两项可改写为$\frac{1^2+1}{2+1}$,$-\frac{2^2+1}{2\times2+1}$,

所以$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^2+1}{2n+1}$.

(2) 联想$\overbrace{99\cdots9}^{n个}=10^n-1$,则$a_n=\overbrace{55\cdots5}^{n个}=\frac{5}{9}\overbrace{(99\cdots9)}^{n个}=\frac{5}{9}(10^n-1)$,

即$a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$.

(3) 数列的各项都具有周期性,联想基本数列1,0,－1,0,…,

则$a_n=5\sin\frac{n\pi}{2}$.

知识要点3:

用函数的观点认识数列

数列是一个定义域为正整数集$\mathbf{N}^*$(或有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.即$f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$

从第2项起,每一项都大于它的前一项的数列叫做递增数列;从第2项起,每一项都小于它的前一项的数列叫做递减数列;从第2项起,有些项大于它的前一项,有些项小于它的前一项的数列叫做摆动数列;各项呈周期性变化的数列叫做周期数列;各项相等的数列叫做常数列.

例 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+2n+3$,这个数列所有项中有没有最小的项或最大的项?若有,请写出来;若没有,请说明理由.

【解析】利用一元二次函数$y=x^2+2x+3$的图像及性质,对称轴为$x=-1$,在$(0,+\infty)$上为增函数,所以在$n=1$时取最小项,无最大项.

【答案】有最小项为$a_1=6$.

变题1 设$a_n=-n^2+11n+11$,则数列$\{a_n\}$第几项最大.

【解析】利用一元二次函数的单调性解题,但要注意此时的自变量只能取整数,所以当n取5或6时a_n最大.

【答案】有最大项为$a_5=41$,或者$a_6=41$.

变题2 已知数列的通项公式为$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$.

(1)0.98是不是它的项?

(2) 判断此数列的增减性.

【解析】利用数列相邻两项的关系考虑数列的单调性.

【答案】(1) 假设0.98是它的项,则存在正整数n,满足$\frac{n^2}{n^2+1}=0.98$,

$\therefore n^2=0.98n^2+0.98$. $\because n=7$ 时成立，$\therefore 0.98$ 是它的项.

(2)$a_{n+1}-a_n=\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\dfrac{n^2}{n^2+1}=\dfrac{2n+1}{[(n+1)^2+1](n^2+1)}>0$.

$\therefore$ 此数列为递增数列.

点评 作差或比商是判定数列单调性的重要的思想方法.

易错清单

易错点 1：

数列是一种特殊的函数，易错误认为它的解析式(通项公式)是唯一的.

例1 下列对数列的理解有四种：

① 数列可以看成一个定义在 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的函数；

② 数列的项数是有限的；

③ 数列若用图像表示，从图像上看都是一群孤立的点；

④ 数列的通项公式是唯一的.

其中说法正确的是__________(填序号).

【解析】数列的项数有限的数列为"有穷数列"，项数无限的数列为"无穷数列"；它是定义在 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的函数，故其图像都是一群孤立的点且通项公式是唯一的. 例如 $0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots$ 的通项公式 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

【答案】 ①③

【评议】深刻掌握数列的定义及其简单性质.

易错点 2：

易将数列的单调性与函数的单调性混为一谈，数列是定义在 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的.

例2 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2+kn$，若数列$\{a_n\}$恒为递增数列，求实数 k 的取值范围.

【解析】数列是定义在 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的而函数定义域是 $\mathbf{R}$ 考虑时不能一起考虑，要从具体题目出发解决实际问题.

【答案】$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+k(n+1)-n^2-kn=2n+1+kn+k-kn>0$

$\therefore k>-2n-1$

$\therefore k>-3$

【评议】作差或比商是判定数列单调性的重要思想方法.

点击高考

1.(2009·北京)已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{4n-3}=1, a_{4n-1}=0, a_{2n}=a_n, n\in\mathbf{N}^*$，则 $a_{2009}=$

________；$a_{2014}=$ ________.

【解析】本题主要考查周期数列等基础知识.属于创新题型.

依题意，得 $a_{2009}=a_{4\times503-3}=1$，$a_{2014}=a_{2\times1007}=a_{1007}=a_{4\times252-1}=0$.

∴ 应填 1，0.

【答案】1，0

2.（2007·江西理）数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}(1\leqslant n\leqslant1000),\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}(n\geqslant1001),\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$的极限值（　　）

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 0 或 1　　D. 不存在

【解析】正确考虑数列极限的概念，仅需考虑 n 趋向于正无穷大的时候.

【答案】B

3.（2008·北京）已知数列$\{a_n\}$对任意的 $p,q\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_{p+q}=a_p+a_q$，且 $a_2=-6$，那么 a_{10} 等于（　　）

A. -165　　B. -33　　C. -30　　D. -21

【解析】根据题意找出下标的关系：下标和也就是相对应的项的和.

【答案】C

模拟演练

1. 数列$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{27}$，$-\dfrac{7}{81}$，… 的一个通项公式是（　　）

A. $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{3n}$　　B. $a_n=(-1)^n\dfrac{2n-1}{3n}$

C. $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{3^n}$　　D. $a_n=(-1)^n\dfrac{2n-1}{3^n}$

2. 数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$，$a_1=2$，则 $a_4=$（　　）

A. $\dfrac{2}{25}$　　B. $\dfrac{2}{19}$　　C. $\dfrac{2}{13}$　　D. $\dfrac{2}{7}$

3. 不能作为数列 2，0，2，0，… 的通项公式的是（　　）

A. $a_n=1+(-1)^{n+1}$　　B. $a_n=1-(-1)^n$

C. $a_n=1+(-1)^n$　　D. $a_n=1-\cos(n\pi)$

4. 把 1，3，6，10，15，21，… 这些数叫做三角形数，这是因为这些数目的点子可以排成一个正三角形（如图 1-1-3）.

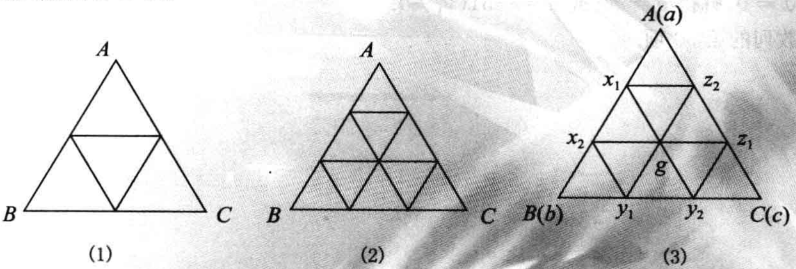


图 1-1-3

则第 7 个三角形数是(　　)

A. 27　　B. 28　　C. 29　　D. 30

5. $2\sqrt{5}$ 是数列$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$ 的第(　　)

A. 7 项　　B. 8 项　　C. 9 项　　D. 10 项

6. 数列$\{a_n\}$中,$a_n=-2n^2+29n+3$,则此数列最大项的值是(　　)

A. 103　　B. $108\frac{1}{8}$　　C. $103\frac{1}{8}$　　D. 108

7. 数列$-\frac{1}{4},\frac{3}{7},-\frac{7}{10},\frac{15}{13}$ 的一个通项公式为______

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n(n+2)}$,那么$\frac{1}{120}$是这个数列的第______ 项.

9. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-5n+4$.

(1) 数列中有多少项是负数?

(2)n 为何值时,a_n 有最小值?并求出最小值.

10. 写出数列 $2+13,6+13,12+13,20+13,30+13,\cdots$ 的一个通项公式,并验证 2563 是否为该数列中的一项.

答案

1. C　2. B　3. C

4. B　**提示:**第七个三角形数是 $1+2+3+4+5+6+7=28$.

5. A　**提示:**$a_n=\sqrt{3n-1}$,令$\sqrt{3n-1}=2\sqrt{5}$,得 $n=7$.

6. D　**提示:**$a_n=-2n^2+29n+3=-2\left(n^2-\frac{29}{2}n\right)+3=-2\left(n-\frac{29}{4}\right)^2+3+\frac{29}{8}$,

$\therefore n=7$ 时,$a_n=108$ 为最大值.

7. $a_n=(-1)^n\frac{2^n-1}{3n+1}$.

8. 10 .

9. (1) 由 $n^2-5n+4<0$,解得 $1<n<4$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n=2,3$,$\therefore$ 数列有两项是负数.

(2)$\because a_n=n^2-5n+4=(n-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$,$n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n=2$ 或 3 时,a_n 有最小值,其最小值为 $2^2-5\times2+4=-2$.

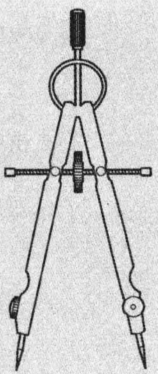
10. 该数列的一个通项公式为 $a_n=n(n+1)+13$,令 $n(n+1)+13=2563$,则

$n^2+n-2550=0$,解得 $n=50$ 或 $n=-51$(舍去).

$\therefore$2563 是该数列的第 50 项.

第2讲 等差数列

课标解读



【学习目标】

1. 知识目标：掌握等差数列的概念；理解等差数列的通项公式的推导过程；了解等差数列的函数特征；能用等差数列的通项公式解决相应的一些问题.

2. 能力目标：让学生亲身经历“从特殊入手，研究对象的性质，再逐步扩大到一般”这一研究过程，培养他们观察、分析、归纳、推理的能力. 通过阶梯性的强化练习，培养学生分析问题解决问题的能力.

3. 情感目标：通过对等差数列的研究，培养学生主动探索、勇于发现的求索精神；使学生逐步养成细心观察、认真分析、及时总结的好习惯.

【重难点聚焦】

1. 重点：等差数列的概念的理解，通项公式的推导及应用.

2. 难点：(1) 对等差数列中“等差”两字的把握；

(2) 对等差数列函数特征的理解；

(3) 用不完全归纳法推导等差数列的通项公式.

知识清单

知识要点 1：

等差数列的定义

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列. 这个常数叫做等差数列的公差，通常用字母 d 来表示.

注意：

① 定义中有"从第二项起""同一常数"的描述，对此应理解为："从第二项起"首先是因为第一项(首项)没有"前一项"，更是因为如果一个数列是从第三项起每一项与它的前一项的差是同一个常数，那么这个数列不是等差数列，但这时可以说这个数列从第二项起是等差数列. 对"同一常数"应这样理解：如果一个数列，从第二项起，每一项与前一项的差是一个常数，那么这个数列不一定是等差数列，因为这些常数不一定相同，即不一定为"同一常数".

② 其也可以用数学语言表达为：

在数列$\{a_n\}$中，如果 $a_n - a_{n-1} = d$(d 是常数)，对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，$n \geqslant 1$ 都成立，则称数列$\{a_n\}$为等差数列，常数 d 称为等差数列的公差. 公差 d 可以是正数、负数，也可以是 0；

③ 公差是数列中的某一项(除第一项外)与其前一项的差，不可颠倒，即 $d = a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \cdots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$，所以求公差 d 时可以用 $a_{n+1} - a_n$，也可以用 $a_n - a_{n-1}$，还可以用 $a_2 - a_1$ 等. 公差 d 可以是任意实数，当 $d > 0$，是递增数列；当 $d < 0$，是递减数列；当 $d = 0$，是常数列.

知识要点 2：

等差数列的通项公式

1. 内容：一般地，对于等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n，有 $a_n = a_1 + (n-1)d$，这就是等差数列的通项公式，其中 a_1 为首项，d 为公差.

2. 公式的推算

(1) 归纳法：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以当 $n \geqslant 2$ 时，有

$a_2 = a_1 + d$，

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$，

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$，

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$，

……

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

当 $n = 1$ 时，上面的等式两边均为 a_1，所以等式也是成立的. 这就说明当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n = a_1 + (n-1)d$ 总成立.

(2) 累差法：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以当$n\geqslant 2$时，有

$a_n-a_{n-1}=d$,

$a_{n-1}-a_{n-2}=d$,

$a_{n-2}-a_{n-3}=d$,

……

$a_2-a_1=d$

将上面$n-1$个等式的两边分别相加可得

$a_n-a_1=(n-1)d$.

所以$a_n=a_1+(n-1)d$.

(3) 叠代法：因为$\{a_n\}$是等差数列，则有

$$
\begin{aligned}
a_n&=a_{n-1}+d=a_{n-2}+d+d\\
&=a_{n-2}+2d=a_{n-3}+d+2d\\
&=a_{n-3}+3d=\cdots\\
&=a_1+(n-1)d
\end{aligned}
$$

(4) 逐差法：因为$\{a_n\}$是等差数列，则有

$a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}$,

$a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-2}$,

$a_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-3}+a_{n-3}$,

……

$a_2=a_2-a_1+a_1$,

所以$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(n-1)d+a_1$.

3. 对公式的理解

(1) 公式的变形应用

对于等差数列的通项公式，我们常用到它的变形形式，对于等差数列中的任意两项a_m和a_n，有$a_m=a_1+(m-1)d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，两式相减则有$a_n-a_m=(n-m)d$，即$a_n=a_m+(n-m)d$. 此公式在以后的解题中会经常用到，要牢记.

(2) 从函数的角度看等差数列的通项公式

由等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$可得$a_n=dn+(a_1-d)$，如果设$p=d$，$q=a_1-d$，那么$a_n=pn+q$，其中p，q是常数.

当$p\neq 0$时，a_n是关于n的一次函数，即(n,a_n)在一次函数$y=px+q$的图像上，因此从图像上看，表示数列的各点均在一次函数$y=px+q$的图像上. 所以，公差不为零的等差数列的图像是直线$y=px+q$上的均匀排开的一群孤立的点.

当$p=0$时，$a_n=q$，等差数列为常数列，此时数列的图像是平行于x轴的直线(或在x轴)上的均匀排开的一群孤立的点.

从以上分析可以看出：

当$d>0$，是递增数列；当$d<0$，是递减数列；当$d=0$，是常数数列.

(3) 由两点确定一条直线的性质可知，已知等差数列的任意两项可确定这个等差数列.

(4) 等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 中共含有四个变数，即 a_1, d, n, a_n，如果知道了其中的任意三个数，就可以由通项公式求出第四个数，这一求未知量的过程我们通常称之为“知三求一”.

例 (1) 求等差数列 8,5,2,… 的第 20 项；

(2) -401 是不是等差数列 $-5,-9,-13,\cdots$ 的项？如果是，是第几项？

【分析】根据所给数列的前 3 项求得首项和公差，写出该数列的通项公式，从而求出所求项. 要想判断一数是否为某一数列的其中一项，则关键是要看是否存在一正整数 n 值，使得 a_n 等于这一数.

【解】(1) 由 $a_1 = 8, d = 5-8 = 2-5 = -3, n = 20$，得 $a_{20} = 8 + (20-1)\times(-3) = -49$

(2) 由 $a_1 = -5, d = -9-(-5) = -4$，得数列通项公式为：$a_n = -5-4(n-1)$

由题意可知，本题是要回答是否存在正整数 n，使得 $-401 = -5-4(n-1)$ 成立，解之得 $n = 100$，即 -401 是这个数列的第 100 项。

点评 关键是求出通项公式. 要注意解题步骤的规范性与准确性.

变题1 已知等差数列 18,15,12,9,…,

(1) 请写出 a_{20}, a_n.

(2) -279 是否是这个数列中的项？如果是，是第几项？

【分析】根据所给数列的前 3 项求得首项和公差，写出该数列的通项公式，从而求出所求项. ,要想判断一数是否为某一数列的其中一项，则关键是要看是否存在一正整数 n 值，使得 a_n 等于这一数.

【解】(1) $\because a_1 = 18, a_2 = 15, \therefore d = a_2 - a_1 = 15-18 = -3$,

$\therefore a_{20} = a_1 + (20-1)d = 18 - 3\times 19 = -39, a_n = a_1 + (n-1)d = 18 - 3(n-1) = -3n+21$;

(2) 解 $-3n+21 = -279$ 得 $n = 100$，即 -279 是该数列的第 100 项.

点评 要判断 -279 是不是数列的项，关键是求出通项公式，并判断是否存在正整数 n，使得 $a_n = -279$ 成立，实质上是要求方程 $a_n = -279$ 的正整数解.

变题2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_6 = 9, a_4 = 7$，求 a_3, a_9.

【分析】要求一个数列的某项，通常情况下是先求其通项公式，而要求通项公式，必须知道这个数列中的至少一项和公差，或者知道这个数列的任意两项（知道任意两项就知道公差），本题中，只已知一项和另一个双项关系式，想到从这双项关系式入手.

【解】$\because \{a_n\}$ 是等差数列,

$\therefore a_1 + a_6 = a_4 + a_3 = 9 \Rightarrow a_3 = 9 - a_4 = 9-7 = 2$

$\therefore d = a_4 - a_3 = 7-2 = 5$

$\therefore a_9 = a_4 + (9-4)d = 7 + 5\times 5 = 32$

$\therefore a_3 = 2, a_9 = 32$

点评 等差数列 $\{a_n\}$ 中的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 中共含有四个变数即 a_1, d, n, a_n，知道