21st CENTURY
实用规划教材

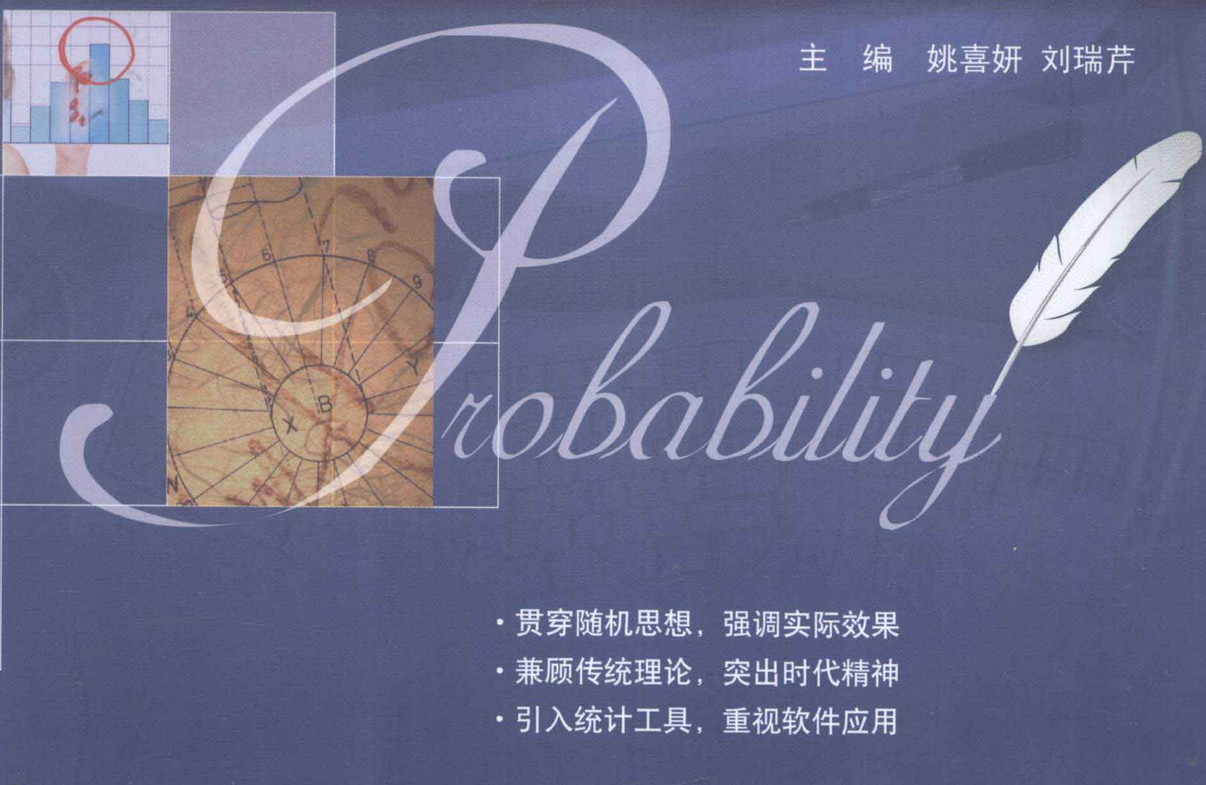
21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材

赠送 电子课件 www.pup6.cn

赠送 习题答案 www.pup6.cn

概率论与数理统计

主 编 姚喜妍 刘瑞芹



· 贯穿随机思想，强调实际效果

· 兼顾传统理论，突出时代精神

· 引入统计工具，重视软件应用

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材

概率论与数理统计

主　编　姚喜妍　刘瑞芹
副主编　冯变英　辛京奇
参　编　孙国伟　买阿丽
　　　　李秋英　崔颖冀
　　　　刘　媚

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

全书共10章，分为3篇。第1篇概率论部分包括第1～4章，主要内容有概率论的基本概念、随机事件及其概率、随机变量的分布和数字特征、多维随机变量的分布和数字特征、大数定律与中心极限定理。第2篇数理统计部分包括第5～8章，主要讲授数理统计的基本概念、统计量与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。第3篇SPSS和Excel软件应用部分包括第9章和第10章，主要介绍统计软件SPSS和Excel中的统计分析功能。

本书注重基本概念与方法，强调随机处理的思想，在内容选择上突出实用性，在解决方法上带有普遍适用性。每章都配有针对性强的习题，并附有参考答案，有利于读者自学、掌握和理解书中的知识点，拓宽解题思路，融会贯通。

本书可作为高等学校理工类、经济和管理学类各专业的教材和研究生入学考试的参考书，也可作为各类专业人员学习概率论与数理统计的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/姚喜妍，刘瑞芹主编．—北京：北京大学出版社，2011.11

(21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材)

ISBN 978-7-301-18395-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①姚…②刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第178043号

书　　名：概率论与数理统计

著作责任者：姚喜妍　刘瑞芹　主编

策 划 编 辑：郑　双

责 任 编 辑：程志强

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-18395-3/O・0853

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路205号　邮编：100871

网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.cn

电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962

电 子 邮 箱：pup_6@163.com

印　刷　者：北京鑫海金澳胶印有限公司

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787毫米×1092毫米　16开本　15.25印张　348千字

2011年11月第1版　2011年11月第1次印刷

定　　价：29.00元

前　言

概率论与数理统计是研究广泛存在的随机现象规律性及其应用的数学学科，是培养学生利用随机思维模式认识和处理随机现象的一门重要的数学基础课程，其分析与解决问题的方法直接指导人们的研究与实践。因此，它在自然科学、经济管理和工程技术等各个领域内起着越来越重要的作用。

本书力求做到语言简洁、条理清楚。在编写过程中广泛参考了国内外相关教材和书籍，借鉴和吸收了其他同行的研究成果，书中蕴涵了编者多年来的教学与科研体会，有助于读者理解概念实质，体会计算技巧以及掌握应用过程。

作为概率论与数理统计课程的配套教材，国内外已经出版了很多，本书与其他教材相比，有如下几方面特点。

(1) 贯穿随机思想，强调实际应用。

本书既重视基本概念与方法，又强调随机处理的思想，在内容选择上突出了实用性。许多例题与习题来源于生活，其解决方法带有普遍的适用性。每章都配有一定量针对性强的习题，并附有参考答案。这样既有利于学生自学、掌握和理解知识点，又有利于拓宽解题思路，融会贯通。

(2) 概率统计前后呼应，相互融合，兼顾传统理论与时代精神。

本书以统计引领概率，重视两者融合，既尊重传统的教学大纲，又注意统计的应用性，注意吸纳新方法、新技术，力求做到与时俱进。

(3) 广泛应用计算机工具。

本书第 3 篇内容介绍了应用极为广泛的统计软件 SPSS 和 Excel，主要侧重于统计功能、统计分析与工具软件操作相结合的应用，用计算机进行数据统计、分析与处理，从而进行科学决策。

全书分 3 篇，共 10 章。第 1 篇概率论部分包括第 1～4 章，第 2 篇数理统计部分包括第 5～8 章，第 3 篇 SPSS 和 Excel 软件应用部分包括第 9 章和第 10 章。

本书第 1 章由运城学院辛京奇编写；第 2 章由运城学院李秋英编写；第 3 章由运城学院孙国伟编写；第 4 章由运城学院姚喜妍和买阿丽编写；第 5 章、第 9 章及附表由运城学院冯变英编写；第 6 章由咸阳师范学院崔颖冀编写；第 7 章和第 8 章由华北科技学院刘瑞芹编写；第 10 章由宁夏师范学院刘媚编写；各章习题答案由各章编者给出。最后，由姚喜妍、刘瑞芹和冯变英负责统稿，王静龙教授对本书的编写提出了许多宝贵的意见。同时，本书的编写得到北京大学出版社、运城学院教务处和应用数学系以及相关兄弟院校的帮助和支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目 录

第1篇　概　率　论

概率论起源于博弈问题．中世纪的欧洲流行用骰子赌博，当时，有一个“分赌本问题”曾引起人们的热烈讨论．问题是：“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 s 局就算赢了，当赌徒A赢 a 局($a<s$)，而赌徒B赢 b 局($b<s$)时，赌博被迫中止，应该怎样分配赌注才合理?”

早在15～16世纪，就有意大利的数学家对此进行了讨论．17世纪，又有法国数学家帕斯卡和费马、荷兰数学家惠更斯等人对这类赌博问题进行了许多研究．1654年，帕斯卡和费马在书信交往中用组合方法给出了解决方法．1657年，荷兰数学家惠更斯发表了《论赌博中的计算》，这是概率论最早的论著．1713年，雅可比·贝努利的遗著《推测术》的发表，奠定了概率论的理论基础．1812年，法国数学家拉普拉斯发表了《分析概率论》，具有划时代的意义．1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫完成了概率论的公理体系，在几条简洁的公理之下，发展出概率论整座的宏伟建筑，概率论成为一门独立的数学分支．

概率论虽起源于赌博，但其迅速发展主要是由于实际问题的需要．最近几十年中，概率论的方法被引入到各个工程技术学科和社会学科中．目前，概率论在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验、经济、金融和管理科学等方面都得到了重要应用．

【案例1】　一名优秀数学家的作用超过10个师的兵力

在第二次世界大战中，美国曾经宣布：一名优秀数学家的作用超过10个师的兵力．这句话有一个非同寻常的来历．

1943年以前，在大西洋上英美运输船队常常受到德国潜艇的袭击，当时，英美两国限于实力，无力增派更多的护航舰，一时间，德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额．为此，有位美国海军将领专门去请教了几位数学家，数学家们运用概率论分析后发现，舰队与敌潜艇相遇是一个随机事件，按数学角度来看这个问题，它有一定的规律．一定数量的船(如100艘)编队规模越小，编次就越多(如每次20艘，就要有5个编次)；编次越多，与敌人相遇的概率就越大．例如，5位同学放学都回自己家里，老师要找一位同学，那么随便去哪家都行，但若这5位同学都在其中某一家，老师要找几家才能找到，一次找到的可能性只有20%．美国海军接受了数学家的建议，命令船队在指定海域集合，再集体通过危险海域，然后各自驶向预定港口．结果奇迹出现了，盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的25%降低为1%，大大减少了损失，保证了物资的及时供应．

【案例2】　保险数学(精算师)

天有不测风云，人有旦夕祸福．在生活中，人们难免遇到意外或不幸．火灾、水灾、疾病、交通事故，难以预计它们何时到来，会降临到谁的头上．于是，人们建立了保险制度作为安全对策．办法是这样的：参加保险的人预先缴纳少量金钱(保险费)给承保人——保险公司，一旦灾难降临在他头上，保险公司便支付给他一笔比所交保险费多得多的钱帮

他应付局面，尽可能地弥补损失．这对参加保险者——受保人是有利的，如果他没有遇到灾害，则支出不多，花小钱买了个大平安．一旦发生意外，社会为他提供了生活保障．这对承保人也有利，保险公司运用积少成多的保险费可以兴办事业、企业，获取利润．但是，保险费应当收多少才合理？多收了受保人吃亏；少收了，保险公司赔不起，会破产，也就不保险了．保险数学就是研究这类问题的一门应用数学，而且是很早就开始的在社会生活中运用数学的成功的例子．

【案例3】 天气预报

传统的天气预报一般预报有雨或无雨，而概率预报则给出可能出现降水的百分数，百分数越大，出现降水的可能性越大．一般来讲，概率值小于或等于30%，可认为基本不会降水；概率值在30%～60%，降水可能发生，但可能性较小；概率值在60%～70%，降水可能性很大；概率值大于70%，有降水发生．概率天气预报既反映了天气变化确定性的一面，又反映了天气变化的不确定性和不确定程度．在许多情况下，这种预报形式更能适应经济活动和军事活动中决策的需要．

第1章

随机事件及其概率

学习目的

通过本章的学习，了解随机现象、随机试验、随机事件；理解概率的统计定义、古典定义、几何定义；了解公理化定义，会计算古典概率和几何概率；掌握事件的性质及运算、条件概率及乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式；理解独立性概念及独立重复试验的概念；掌握利用事件独立性进行概率计算．

概率论是数学的一个重要分支，它研究的是随机现象的数量规律，概率论的应用几乎涉及所有的科学领域，例如，天气预报、地震预报、工厂产品的质量管理、金融保险业．在通信工程中，概率论还可用于提高信号的抗干扰性、分辨率等．

1.1 随机现象和随机事件

1.1.1 随机现象

1986年1月28日，美国肯尼迪航天中心发射场发生了一件震惊国际的大事——挑战者号航天飞机在升空12秒之后突然爆炸，7名宇航员全部遇难．这一悲惨事件给美国造成了至少12亿美元的损失，并使得美国航天局在一年之内无法进行新的航天飞机试验．这一事件的发生虽然有技术上的原因，但也不能说它不带有一定的偶然性．也就是说，部分是由于某些偶然因素的影响才酿成了这一悲剧．

事实上，在社会生活与生产实践中，经常会碰见这种带有偶然性的现象．例如，未来市场的股票价格可能会涨也可能会跌；某人买的彩券是否能中头等奖；公司下个月的销售额度问题；灯管的寿命问题；抛一枚硬币国徽面是朝上还是朝下等．这些现象在试验或观察之前都无法断言其确切的结果，具有偶然性或不确定性，那么诸如此类的现象是不是无规律可循？并非如此，人们通过长期实践并深入研究之后，发现这类现象就每次试验或观察结果来说，它具有偶然性，但在大量的重复试验或观察下它的结果却呈现出某种规律性．例如，从一大批同类产品中任意抽取一个产品，抽到的合格品或不合格品是随机的，然而当重复抽取时，合格品率是稳定的．这种在个别试验中其结果呈现出不确定性但在大量的重复试验中所得结果又呈现出固有的规律性的现象称为**随机现象**(random phenomenon).

自然界还存在只有一个结果的现象，称为**确定性现象**．例如，水在一个标准大气压下加热到100℃就要沸腾；太阳不会从西边升起；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引等．

在相同条件下可以重复进行的随机现象又称**随机试验**(random trial)，记为E. 并不是所有随机现象都可以重复进行，例如，人的成长过程是不能重复的，某些经济现象(金融危机等)也是不能重复的．

概率论就是研究随机现象的本质规律的一门数学学科．

1.1.2 随机事件

随机试验的每一个可能结果称为基本事件，全体基本事件组成的集合称为试验的**样本空间**(sample space)；通常用字母Ω来表示．样本空间Ω的元素称为**样本点**(sample point).在一定条件下，可能发生也可能不发生的结果称为**随机事件**(random event)，简称**事件**，通常用大写的英文字母A、B、C、…来表示．

【例1.1】 E：投掷一枚硬币，观察其正反面出现的情况，则样本空间为$\Omega=\{$正，反$\}$. “正面朝上”这个结果用A来表示，记为$A=$“正面朝上”，显然在一次试验中A可能出现也可能不出现，是一个随机事件．在该试验中，“正面朝下”用B来表示，记为$B=$“正面朝下”，也是一个随机事件．

【例1.2】 E：投掷两枚硬币，则样本空间为$\Omega=\{$正正，反反，正反，反正$\}$. $A=$“两个都是正面朝上”，$B=$“两个都是正面朝下”，$C=$“一个正面朝上，一个正面朝下”，显然A、B、C都是随机事件，不难看出$D=$“至少有一个正面朝上”也是随机事件．

【例 1.3】　E：从 5 个同类产品(其中有 3 个正品，2 个次品)中任意抽取 3 个，那么 $A=$ “有一个是次品”，$B=$ “至少有一个是次品”，均为随机事件，而“3 个都是次品”和“至少一个是正品”这两个事件，前者是不可能发生的，后者是必定发生的．像这样，称不可能发生的事件为**不可能事件**，记为$\varnothing$；称必然要发生的事件为**必然事件**，记为 Ω. 必然事件与不可能事件本质上没有随机性，即它们本质上不是随机事件，但为了讨论问题方便，把不可能事件$\varnothing$和必然事件 Ω 也当成特殊的随机事件．

注：随机事件其实就是随机试验的样本空间的子集。

1.1.3　随机事件的关系及运算

从 1.1.2 的 3 个例子中可以看到，在一个随机试验中往往有多个随机事件，有比较简单的，也有比较复杂的．为了进一步认识复杂事件，建立复杂事件和简单事件的关系，进而为后面计算复杂事件的概率奠定基础．下面介绍事件之间的一些重要关系与事件之间的运算．

1. 事件的包含与相等

定义 1　设有事件 A、B，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，就称事件 B 包含事件 A，并记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如，若以 A 记“呼叫次数不超过 5”，B 记“呼叫次数不超过 6”．显然 A 发生 B 就一定发生，故 $A\subset B$. 投掷两枚均匀的硬币，令 A 表示“正好有一个正面朝下”，B 表示“至少有一个正面朝下”，显然也有 $A\subset B$.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，那么就称**事件 A 与事件 B 相等**(或称等价)，并记为 $A=B$.

2. 事件的和与积

定义 2　事件“A 或 B”至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与 B 的和，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

某次试验中 $A\cup B$ 发生，即“A 或 B”发生，它意味着 A 与 B 中至少有一个发生．例如，某种产品的合格与否是由该产品的长度或直径是否合格所决定的，因此“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并集．

定义 3　事件“A 且 B”称为事件 A 与 B 的积，记为 AB 或 $A\cdot B$ 或 $A\cap B$.

某次试验中 $A\cap B$ 发生，即“A 且 B”发生，它意味着 A 与 B 同时发生．例如，某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定的，因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件．

于是有 $A+B=C$，$A\cdot C=A$，$BC=A$.

不难把事件和与积的概念推广到多于两个事件的情形．

3. 互不相容事件与对立事件

定义 4　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是两两互不相容的事件或互斥事件．

例如，抛掷一枚骰子并观察出现的点数这一试验中“点数为 3”与“点数为 5”就是互不相容的事件．

一般来说，如果 n 个事件中任意两个互不相容，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的.

定义 5 设 A 表示事件“A 出现”，则事件“A 不出现”称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$.

例如，投掷骰子，A 表示“出现点数之和至少为 5”的事件，$\overline{A}$ 表示“出现点数之和至多为 4”的事件，则事件 $\overline{A}$ 是事件 A 的对立事件．

由定义 4 和 5 可知事件 A 和 $\overline{A}$ 对立意味着事件 A 和 $\overline{A}$ 不能同时发生但必然有一个发生且仅有一个发生，即 A 和 $\overline{A}$ 满足：$A\cap\overline{A}=\varnothing$ 且 $A\cup\overline{A}=\Omega$.

由定义 4 与定义 5 可知，对立事件与互斥事件的关系为：对立必互斥；互斥不一定对立.

4. 事件的差

定义 6 由事件 A 发生而事件 B 不发生所得的事件称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$.

例如，投掷骰子“出现点数为 5”是“至少出现点数为 5”与“出现点数为 6”的差．

显然，由上述定义可知 $A-B=A\cdot\overline{B}$

5. 事件的运算规律

事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系就是集合之间的关系，事件的运算就是集合之间的运算．下面根据集合运算的性质来列出事件运算性质．

(1) $A\cup B=B\cup A$　　(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(3) $A\cup A=A$　　(4) $A\cup\overline{A}=\Omega$

(5) $A\cup\Omega=\Omega$　　(6) $A\cup\varnothing=A$

(7) $A\cdot B=B\cdot A$　　(8) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

(9) $A\cdot A=A$　　(10) $A\cdot\overline{A}=\varnothing$

(11) $A\cdot\Omega=\Omega$　　(12) $A\cdot\varnothing=\varnothing$

(13) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$　　(14) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(15) $A\cdot(B\cup C)=A\cdot B+A\cdot C$　　(16) $A\cup(B\cdot C)=(A\cup B)\cdot(A\cup C)$

1.2 事件的概率及其性质

对于随机事件，虽然不能预先知道它们在一次试验中是否发生，但是它们发生的可能性是有大小之分的．如在例 1.1 中，如果投掷的硬币是匀称的，随机事件 A ＝“正面朝上”和随机事件 B ＝“正面朝下”发生的可能性的大小是一样的；一个盒子中有 10 只球（9 只白球，1 只红球），则摸到白球的可能性大．然而，对事件发生的可能性仅仅停留在定性的了解与描述上是远远不够的，还需要对它给出客观的、定量的描述．即需用一个数字来描述这种可能性大小，称这种描述事件发生的可能性大小的数字为事件概率，并用

$P(A)$来表示事件 A 发生的概率．

1.2.1　概率的统计定义

例 1.1 中投掷一枚硬币的试验是在一定条件下做的．例如，规定“硬币是匀称的，放在手心上，用一定的动作向上抛一定的高度，让硬币自由落在平坦的地面上．”称这些条件为条件组 S. 于是，在条件组 S 的一次实现下，事件 A = “正面朝上”可能发生也可能不发生．然而当条件组 S 大量重复实现时，事件 A 发生的可能性呈现出一定的统计规律性，并且随着条件组 S 重复实现次数的增多，这种规律愈加明显．一般地，A 发生的频率定义如下：

$$A\text{ 发生的频率}=\frac{\text{频数}}{\text{试验次数}}$$

在人们的心目中，由长期经验积累所得的、所谓某事件发生的可能性的大小不就是这个“频率的稳定值”吗?

在抛硬币的重复试验中，历史上就有一些人统计过事件“正面朝上”发生的频率，其结果如表 1－1 所示．

表 1－1　抛硬币试验

试验者	投掷次数 n	出现正面朝上的次数 μ	频率＝μ/n
DeMorgan	2 048	1 061	0.518
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

表 1－1 说明，当试验次数充分多时，正面出现频率在 0.5 左右摆动，可见出现正面的次数的大小可由它的频率显示出来．因此，引进以下定义．

定义 7　在不变的一组条件 S 下，重复做 n 次试验．记 μ 为 n 次试验中事件 A 发生的次数．当试验的次数 n 很大时，如果频率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定地在某个数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈变愈小，则称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记为 $P(A)=p$.

显然，数值 p 就成为事件 A 在条件组 S 下发生的可能性大小的数量刻划．例如，0.5 就成为掷一枚硬币出现“正面朝上”的可能性的数量刻划．

上述定义也可简单地说成“频率的稳定值称为该随机事件的统计．”

这里给出了对概率的一个直观的描述，通常称为概率的统计定义．定义本身也给出了概率的一种近似求法，即做大量的试验，计算事件 A 发生的频率．这样得到的是概率的近似值．

需要强调的是，人类的大量实践证明，在实际中遇到的事件一般都是随机事件，也就是说都是有确定的概率的．因此，以后常将随机事件简称为事件．

由于频率 $\frac{\mu}{n}$ 总介于 0～1 之间，因而由概率的定义知，对任何随机事件 A，则有以下

性质．

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k是两两互不相容的事件，则

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$．

1.2.2 概率的古典定义

概率的统计定义提供了近似计算概率的一般方法，即求得频率的近似值作为概率．但是用这种方法去求随机事件发生的概率是困难的．在某些特殊情况下，可以根据问题本身所具有的某种“等可能性”直接计算其概率．例如，在例 1.1 中，对于均匀的硬币来说，出现“正面朝上”与“正面朝下”的机会是均等的．因此，“正面朝上”的概率为 1/2.

若试验有 n 个互不相容的事件，每个事件的发生是等可能的，那么任意一个事件发生的概率是 $1/n$. 这类随机事件在生活中处处可见，如从一个装着标有 1、2、3、4 字样的球盒子里摸球，则其中任意一个球被摸到的概率都是 1/4. 由此可见这种事件组在计算概率中的重要性．

定义 8 设 A_1，A_2，…，A_n 为一事件组，

(1) 在任意一次试验中 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生（完全性）；

(2) 在任意一次试验中 A_1，A_2，…，A_n 至多有一个发生（互不相容性）；

(3) A_1，A_2，…，A_n 发生的机会相同（等可能性）.

满足(1)(2)的事件组为**完备事件组**，满足(1)(2)(3)的事件组为一个**等可能完备事件组**．等可能完备事件组在这里也称为**等概率基本事件组**；其中任一事件 A_i（$i=1$，2，…，n）称为**基本事件**．

若 A_1，A_2，…，A_n 是一个等概率基本事件组，而事件 A 包含其中某 m 个基本事件所构成，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含基本事件的个数}}{\text{基本事件的总个数}} \tag{1-1}$$

所谓**古典概型**就是指能利用式(1-1)来计算事件概率的概率模型．由以上可得，古典概型具有以下两个特征．

(1) 试验所有可能的结果只有有限个；

(2) 每个试验结果发生的可能性的大小都相同．

设 A 是随机事件，则由式(1-1)易得下列性质．

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

计算古典概型问题的概率的主要任务是把 n 和 m 找出来．简单问题可以直接看出 n 和 m，复杂问题就需要利用排列组合计算 n 和 m.

【例 1.4】 在 7 位数的电话号码中，第一位不能为 0，求数字 0 出现 3 次的概率．

解 易知本题属古典概型问题．由于第一位不能为 0，共有 9×10^6 种不同电话号码，

令 $A=$ "0 出现 3 次的电话号码" 则 A 包含的基本事件个数为 $9\times C_6^3\times 9^3$，于是 $P(A)=\frac{9\times C_6^3\times 9^3}{9\times 10^6}=0.015\ 58$.

【例 1.5】 盒中装有 5 个球，其中有 3 个红球、2 个黑球．现从中任取两个（不放回），求解以下问题．

(1) 两个都是红球的概率；

(2) 两个都是黑球的概率；

(3) 一个是红球，另一个是黑球的概率．

解 易知本题属古典概型问题．由于从 5 个球中不放回地任取两个，共有C_5^2种不同的取法，故有$n=C_5^2$.

(1) 令 $A=$ "两个都是红球"，则 A 包含的基本事件个数为 $m=C_3^2$. 则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$；

(2) 令 $B=$ "两个都是黑球"，类似(1)可得

$$P(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0.1$$

(3) 令 $C=$ "一个红球，一个黑球" 因取到一个红球的方法有C_3^1 种，取到一个黑球的方法有C_2^1 种，故从 5 个球中取到一个红球、一个黑球的方法有$C_3^1\ C_2^1$ 种，即 C 包含的基本事件个数 $m=C_3^1\ C_2^1$. 故

$$P(C)=\frac{C_3^1\ C_2^1}{C_5^2}=0.6$$

【例 1.6】 某国家队共有 20 名队员，其中 5 名是女队员．现任意抽取 3 名队员组成一个代表队，求

(1) 该队恰有一名女队员的概率；

(2) 该队至少有一名女队员的概率．

解 设 $A=$ "该队恰有一名女队员"，$B=$ "该队至少有一名女队员"．从 20 名队员中任意抽取 3 名，共有C_{20}^3种不同的组队方法，因此，基本事件总数 $n=C_{20}^3$.

(1) 事件 A 的结果可通过先抽一名女队员，再抽两名男队员的做法来实现，这样 A 包含的基本事件的个数$m=C_5^1\ C_{15}^2$. 于是

$$P(A)=\frac{C_5^1\ C_{15}^2}{C_{20}^3}\approx 0.46$$

(2) 因为 $B=$ "该队至少有一名女队员"，则$\overline{B}$包含的样本点个数 $m=C_{15}^3$，故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}\approx 0.40$$

【例 1.7】 设有 n 个明信片，现将每个明信片都等可能地分配到 N 个信封($n\leqslant N$)中的任意一个，求以下事件的概率．

(1) 指定的 n 个信封各有一个明信片；

(2) 恰好有 n 个信封各有一个明信片．

解 因为每个人都有 n 个信封可供选择，那么 n 个明信片放的方式就有N^n 种，每一种都是等可能的．因此基本事件总数为N^n.

(1) 设 $A=$ "指定的 n 个信封各有一个明信片"，则 A 包含的基本事件个数就是 n 个明信片的全排列 $n!$，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2) 设 $B=$ "恰好有 n 个信封各有一个明信片"．此时 B 包含的基本事件个数可以这样来计算：先从 N 个信封中任意选出"指定"的 n 个信封，这有 C_N^n 种选法；再让"指定"的信封放有一张明信片，按(1)的算法有 $n!$ 种方式．于是 B 包含的基本事件个数为 $C_N^n n!$，故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$$

此例是古典概型中的一个经典题目，概率论中的一些问题如果适当类比就可用此例来解决．例如，若将明信片看成是粒子，信封看成是空间的小区域，上述问题则对应统计物理学中的麦克斯威尔——波尔兹曼统计问题；若将 365 天看成例中的"$N=365$ 信封"，则用此例中(2)的结论即可获得 n 个人的生日全不相同的概率．当然，也可把例题中的"信封"类比成其他一些对象，进而解决相应的概率问题．注意学习这种类比的处理方法将会得到举一反三的效果．

1.2.3 概率的几何定义

在古典概型中，人们利用等可能性概念成功地计算了一系列随机事件的概率．但古典概型要求样本空间的样本点总数有限．而在某些场合下，会碰到样本点总数是无限的随机试验．下面将古典概型这种计算方法推广到样本点总数是无限的情况．

若随机试验具有以下两个特点：①试验结果都落在区域 G 中，G，$A(A\subset G)$是有度量的集合(长度、面积、体积等)，其度量记为 $S(A)$，$S(G)$；②试验结果落在区域 G 中每点的可能性是相同的，则随机事件 $A=\{$结果落在区域 $A\}$的概率为 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(G)}$.

生活中有很多具有上述两个特点的随机试验，因此将它们称为几何概型．

【例 1.8】 某 1 000km² 的范围内有面积为 100km² 的矿床，现任选一点进行钻探，求钻探到矿床的概率．

解 由于 1 000km² 的范围内每点被选到的可能性相同，因此所求概率为矿床面积和总面积之比，即$\dfrac{100}{1\,000}=0.1$.

1.2.4 概率论的公理化定义

从前面讨论的内容可以看出，统计概率和古典概率及几何概率的方法都有其理论上的局限性，如统计概率定义要求做大量的试验，有时这是不现实的；几何概型要求每个样本点都等可能发生；而古典概率定义不仅要求每个样本点都等可能发生且样本空间的元素是有限或可列无限多个，但是一般的随机试验不一定完全具备这种性质．因此要想把这 3 种方法之一作为概率的一般定义是不现实的，但是这 3 个不同的定义却有相同的最基本的因素，因此人们从中受到启发，用这些最基本的因素来作为一般的概率定义，使以后的推理有所依据，以便更深入地研究概率的性质．