上海市普教系统数学名师培养工程杨浦基地成果

优化学习

总主编　张民生

中考复习必备书

中考数学专题讲座

主编　陈双双

华东师范大学出版社

优化学习

中考数学专题讲座

主编　陈双双

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优化学习. 中考数学专题讲座/陈双双主编. —上海：华东师范大学出版社，2010
ISBN 978 - 7 - 5617 - 8117 - 3

Ⅰ. 优… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学课—初中—升学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 187724 号

优化学习
中考数学专题讲座

主　　编　陈双双
策划编辑　倪　明
组稿编辑　潘海林
项目编辑　潘海林
审读编辑　朱英东　张　慧　张　玉
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　昆山亭林彩印厂
开　　本　890 × 1240　32 开
印　　张　15.5
字　　数　658 千字
版　　次　2010 年 12 月第一版
印　　次　2010 年 12 月第一次
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5617 - 8117 - 3/G · 4736
定　　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

《优化学习丛书》出版前言

《优化学习丛书》问世了。这是一套由上海市中学界几个名师培养基地的导师、特级教师领衔，参加基地学习的优秀教师共同编写的，重点面向初高三学生的辅导教材。目前《优化学习丛书》先出四本分册，即《高中数学专题讲座》，《中考数学专题讲座》，《天天作文：高中作文专题讲座》，《中考语文专题讲座》。

《优化学习丛书》是一套配合“优化学习”数字电视教学节目的辅导讲义。在中共上海市委宣传部的直接关心与指导下，2009 年起数字电视推出了适合初高三学生需要的“优化学习”教学辅导节目，受到了好评。“优化学习”节目的意义在于普及均衡教育，如今政府教育主管部门正在大力推进均衡教育，上海基础教育的各级各类学校的硬件设施大大改善，已无多大差别，但是师资力量、教育内涵、教育资源等方面学校间还是存在差异的，因此利用数字电视这一平台让上海的优秀教师直接面对所有有需要的学生，让广大同学有机会来分享特级教师，名师，优秀教师的教育资源，在追求教育公平上又跨出了可喜的一步。为了使荧屏授课视频点播更有效，老师和同学们都希望有一份配套的教学讲义，以提高听课效率。“优化学习”教学辅导的目的，是利用每周一课时的教学时间，帮助同学们对所学课程内容进行归纳分析整理，以利于他们更好地巩固学科知识和技能，更好地掌握学习方法，全面提高同学们的学习水平。所以这份讲义一定能很好的发挥学习资料的作用。

《优化学习丛书》是一套配合学生课堂学习很好的自学丛书。“优化学习”是由市教委下属的健生文化教育发展公司推出的教育节目，在市教研室关心下，一批有经验的在职的特级教师，优秀教师参与了视频教学工作。我们把目标锁定在，以中等学习水平的学生为主同时兼顾两头的辅导教学。辅导教学强调独立成章，体现模块化，所以每一专题的讲座都为学生提供最有需要的那些知识和技能的学习辅导。而这套丛书又是由各专题主讲老师将自己讲稿经整理后并配上习题，附上答案汇总出书的。所以即使同学们没有收看教学电视同样也可以利用这套丛书作为课程内容复习自学用。当然如果学生自己自学后再点播教学节目那效果一定更好，辅导教学中老师们用流畅和易懂的最具逻辑性的语言，用最合适的教学方法，用最能说明问题的例题进行专题教学，学生完全可以根据自己的需求有选择的收看某一专题讲座，而不需要收看全部。

《优化学习丛书》各分册采用编委会领导下主编负责制。各位主编都是荧屏“优化学习”各学科专题讲座的领衔者(有的也是主讲者之一)，康士凯是原杨浦高级中学特级校长特级教师，上海市数学名师培养基地主持人，他的团队在他的带领下编撰了

《高中数学专题讲座》,陈双双是华师大二附中数学教研组长特级教师,上海市数学名师培养基地副主持人,在她和她的团队努力下《中考数学专题讲座》也编撰成功。这两位主编下属的成员是分布全市各学校的优秀教师。李强是上海育才中学的语文教研组长,特级教师,上届名师学习班负责人,他用自己超强语文功底和经验结累编写了《天天作文:高中作文专题讲座》这本书的适应面可能不仅是高三学生其他年级的高中生也会适用。诸灵康是松江教师进修学院的语文教研员,特级教师,他与其他两位优秀教师倾他们之实力编撰了《中考语文专题讲座》。

随着国家战略的推出,有线电视将整转为数字电视,上海东方有线股份有限公司正在积极有序推进这项整转工作。《优化学习丛书》的问世,一定会让更多学生主动去接触"优化学习"数字电视节目,他们会有条件直接面对面接受上海名师、特级教师、优秀教师的授课辅导,有幸使用他们编撰的辅导教材,真正分享到上海的优质教育资源。

可以告诉学生读者的是,今后通过数字电视将会看到更多类型的学习节目,除了上面介绍的覆盖更多学科面向毕业班学生的每周一次的辅导教学外,还会有受众面更广普适性更大的学习节目。我们会争取出版配套的辅导书籍。希望这些书籍会得到你的喜欢,也恳切的要求把你看了这些书以后的点的意见反馈给我们,我们以及所有的读者会感激你的。

《优化学习丛书》编委会

2010-9-26

致读者

老师讲过的，我们忘记了；前几天刚练过，结果又错了。这是平时考试时常遇到的尴尬事。毛病出在对数学的理解上。因为只有理解的内容才能深刻记忆，只有理解的内容才能牢固掌握。理解是摆脱在题海中机械操练的窘境的出路。为此我们组织了上海市数学名师基地部分教师开展“为理解而学”的探究。

为理解而学需要走出三大学习误区：

误区一：“题目十步骤”的低效复习模式。

步骤不等于思路，忽视思路，忽视思维产生的过程是缺乏理解的学习，因此我们竭力围绕揭示思维产生的逻辑起点，知识的归纳与梳理，方法的提炼与反思安排专题。

误区二：“难题＝难点”的学习习惯。

学习的注意力放在搜寻难题和应付考试。担心遇到没有见过的难题。停留在能看懂步骤的学习层次，这并不代表有能解决这些难题的能力。而且有不少是远离课程标准的偏题。为此我们的讲座将紧贴课程标准，揭示基本概念和基本技能背后的思想方法，使学生的理解能力有实实在在的提高。

误区三：“重复操练＝能力提高”的学习方式。

重复操练是低效的学习方式，学习心理学认为：机械重复的操练仅仅着眼于技能的熟练，无非是运算速度的追求和动作的熟练，在学习评价对学生的素质越来越清晰的今天，有识之士都明白重复大运动量的低层次操练是过重负担之源。

我们的讲座将关注过程。概念形成的思考过程而不是文本和结论的记忆；解决问题的思维产生过程，而不是步骤的简单模仿。讲座将围绕“是什么”“为什么”“还有什么”的方式来展开。

初中数学复习共设三十讲，设计的一条主线是学会知识的梳理和应用、方法的归纳及分析问题的常规思考次序与方法。上海现行的初中数学教材的编写体系是按照“数与运算”、“方程与代数”、“图形与几何”、“函数与分析”、“数据统计与概率初步”五个部分套筒式安排，螺旋上升的。在整个初中数学学习过程中，上述五个部分的内容都分散在不同的年级。在复习过程中，我们注意把这五个部分相对集中，以形成该部分知识内容相对完整的认识。

考虑到与学生校内学习基本同步，我们的课程大致划分为两个时段。前一时段，基本与初三新授内容保持一致，后一时段则以整体复习的形式进行设计。在注意保持与初三的数学教学内容基本同步的同时，我们还浓缩地穿插了初三之前的相关内容的复习梳理，并且注意将这些专题按照其内容的特点，划归到五大主题系列之中，旨在引导初三学生学会学习、学会复习，也学会数学的思想、观点和方法，为将来进入高中继续学习打下坚实可靠的基础。

由于时间紧等因素，我们的组织及编写肯定会有疏漏之处，恳请提出宝贵的意见。

康士凯　陈双双

2010 年 11 月

目录

第1讲　学会知识的梳理(1)

比例线段与平行线

平行线是我们在几何学习时最早遇到的处于特殊位置的直线.我们运用平行线研究了一些特殊位置的角的数量关系,又运用特殊位置的角的数量关系研究了直线之间的位置关系;我们还运用了平行线研究了线段之间的数量关系;运用平行线进行了三角形的等积变形;等等.进入初三年级我们学习了比例线段,它与平行线有着密切的内在联系.利用“比例线段与平行线”可以直接用来计算与证明,但更重要的是为学习相似三角形做准备.所以我们梳理与归纳“比例线段与平行线”,明晰知识之间的联系、进行知识的重组、改善知识的结构、洞悉知识的发生发展过程,希望能够提升理解层次、改善思维品质.

我们知道在图形的缩放过程中,对应线段的比保持不变,这是研究相似三角形的基础.为了研究相似三角形,我们应首先研究与它密切相关的比例线段与平行线.

一、平行线的判定方法

我们知道:在同一平面内两条不重合的直线的位置关系有且仅有两种:相交、平行.

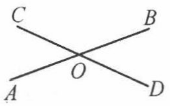

图1-1

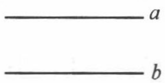

图1-2

问题1. 如何判定两条直线平行呢?

(1) 利用“三线八角”的数量关系

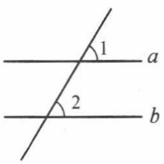

图1-3

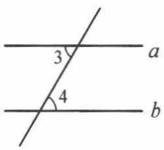

图1-4

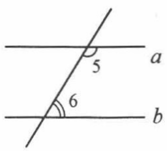

图1-5

因为 $\angle 1=\angle 2$,所以 $a /\!/ b$.

因为 $\angle 3=\angle 4$,所以 $a /\!/ b$.

因为 $\angle 5+\angle 6=180^\circ$,所以 $a /\!/ b$.

我们利用“三线八角”的数量关系来判定两条直线平行的位置关系,这是判定平行线的第一个方法.

(2) 利用平行四边形的定义

随着学习内容的深入，我们又借助全等三角形有关边角的数量关系，研究了平行四边形，利用平行四边形的定义来判定两条直线平行的位置关系.

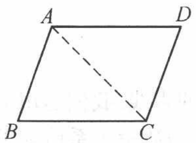

图 1－6

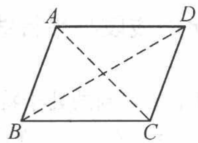

图 1－7

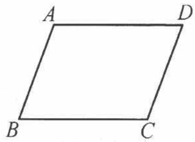

图 1－8

如图，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$.

这是判定平行线的第二个方法.

(3) 利用比例线段

我们利用平行四边形的有关定理推导得到了三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半. 三角形中位线定理提供了判定两条直线平行的方法.

三角形中位线定理具体表述如下：

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，

因为 $AD = BD$，$AE = CE$，所以 $DE \parallel BC$.

注意：这里我们把三角形中位线定理的题设：

“$AD = BD$，$AE = CE$”改写成“$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE} = 1$”.

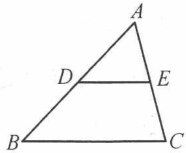

图 1－9

在学习的过程中我们体会到：把 $AD = BD$，$AE = CE$ 用 $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE} = 1$ 的形式来表达是我们认识上的一个重要转折.

我们知道研究一个问题在特殊条件下得到的结论，往往会考虑在一般情况下是否成立.

经过证明我们已经确认：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，

如果 $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$，那么 $DE \parallel BC$.

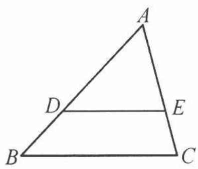

图 1－10

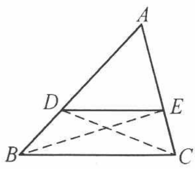

图 1－11

回忆当时的证明过程，我们是将已知线段的比例式转化为三角形面积的关系式来证明的.

我们继续将问题引申：如图，如果点 D、E 分别在线段 AB、AC 的延长线上或分别在它们的反向延长线上，同样可以推出 $DE \parallel BC$.

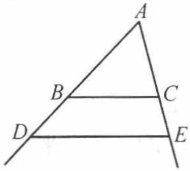

图 1－12

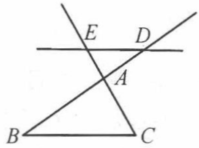

图 1－13

这是我们证明平行线的第三种方法：利用比例线段.

刚才我们一起梳理了在三角形中利用比例线段判定两条直线平行的方法，下面我们对平行线的判定方法作一个小结：

我们注意到，判定两条直线平行是用角之间的数量关系、线段之间的数量关系来判定的，而线段之间的数量关系经历了从相等到比例关系的转变，它是我们对图形研究的逐渐深入，是我们认识上的一个重要转折. 它使我们体会到位置关系可以通过数量关系来呈现，即利用“线段的比例关系”推出“直线的平行关系”.

$$\text{平行线的判定方法}\begin{cases}\text{利用“三线八角”的数量关系；}\\ \text{利用平行四边形的定义；}\\ \text{利用比例线段.}\end{cases}$$

（从）线段的比例关系→（得到）直线的平行关系

数　　→　　形

二、平行线的性质

问题 2. 反过来，角的数量关系、线段的数量关系是否可以通过线段（或所在的直线）平行的位置关系来呈现呢？已知直线平行，我们有哪些结论呢？

通过以前学习的平行线性质、平行四边形性质，可得到明确的答案.

(1) 平行线的性质所呈现的角的数量关系

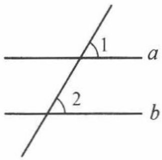

图 1－14

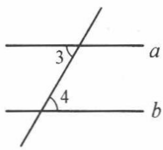

图 1－15

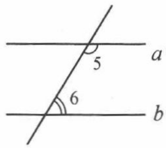

图 1－16

如图：因为 $a \parallel b$，
所以 $\angle 1 = \angle 2$.

因为 $a \parallel b$，
所以 $\angle 3 = \angle 4$.

因为 $a \parallel b$，
所以 $\angle 5 + \angle 6 = 180°$.

（2）平行四边形的性质所呈现的边的数量关系

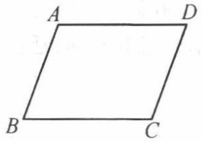

图 1－17

如图，因为 $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

于是 $AB=DC$、$AD=BC$. 即 $\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{AD}{BC}=1$.

从中我们感受到：线段之间的数量关系：$AB=DC$、$AD=BC$，可以通过线段的平行关系：$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$ 来呈现. 进一步体会到有关线段的比例关系：$\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{AD}{BC}=1$，可以通过两条直线平行的位置关系：$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$ 来呈现.

（3）两条直线平行的位置关系呈现有关线段的比例关系

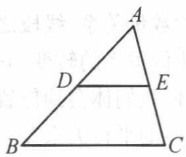

图 1－18

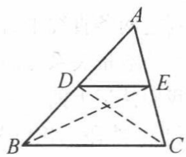

图 1－19

我们注意到：如图，在$\triangle ABC$ 中，如果 $\dfrac{AD}{BD}=1$，且 $DE \parallel BC$，

那么 $\dfrac{AE}{CE}=1$，即$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AD}{BD}=1$.

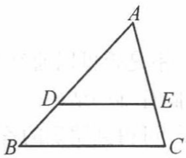

图 1－20

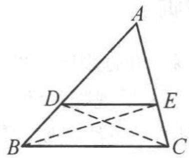

图 1－21

研究一个问题，往往启发我们从特殊中发现一般规律：

减少条件 $\dfrac{AD}{BD}=1$，保留 $DE \parallel BC$.

我们得到：在$\triangle ABC$ 中，如果 $DE \parallel BC$，那么$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$.

回忆学习过程，我们是利用线段比与面积比之间的联系进行证明的.

将上述问题进一步引申：利用平行线与三角形的不同位置关系，但 $DE \parallel BC$ 这一已知条件保持不变，与刚才方法类似，比例式 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$ 仍然成立.

对三角形一边的平行线性质定理中的条件作适当的改变，得出了平行线分线段成比例定理，即由“直线的平行关系”推出“线段的数量关系”.

如图 1－24：因为 $BE' \parallel CF'$，如图 1－25：因为 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，

所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE'}{E'F'}$，从而 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

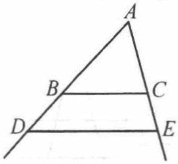

图 1－22

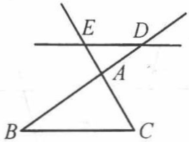

图 1－23

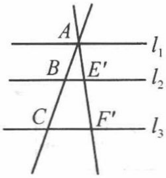

图 1－24

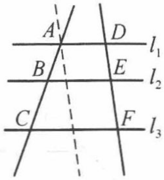

图 1－25

平行线分线段成比例定理启发我们：三条平行线（l_1、l_2、l_3）位置固定时，当一条直线被它们所截，无论这条直线的位置如何变化，所截得的相应两条线段的比值是一个不变量 $\left(\dfrac{AB}{BC}\right)$，这个不变量实际上反映了三条平行线的相对位置关系.

下面我们对平行线的性质作一个小结：

从上面的几种情况我们可以归纳出：角之间的数量关系及线段之间的比例关系可以通过有关线段（或所在的直线）平行的位置关系来呈现.

平行线的性质 $\begin{cases}\text{平行线的性质所表示的角的数量关系；}\\ \text{平行四边形的性质所表示的边的数量关系；}\\ \text{两条直线平行的位置关系呈现有关线段的比例关系.}\end{cases}$

（从）直线的平行关系→（得到）线段的比例关系

形　→　数

我们在研究一个问题时除了考虑它的一般结论，往往还考虑它是否存在特例.

如果我们对平行线分线段成比例定理增加条件：$AB=BC$，那么得到平行线分线段成比例定理的特例，即平行线等分线段定理.

表述如下：

如图，因为 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB=BC$，所以 $DE=EF$.

这个定理启发我们：利用比例线段与平行线可以证明线段相等.

我们注意到这几个定理的逐渐形成过程，反映了我们对问题的认识过程：从特殊推广到一般，再从一般到特殊（即从一般中发现特例，研究特例）.

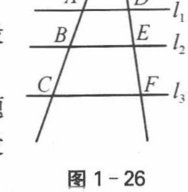

图 1－26

三、知识结构图

两条线段的比 → 比例线段 → 三角形一边的平行线性质定理及推论 → 平行线分线段成比例定理 → 平行线等分线段定理

比例线段 → 三角形一边的平行线判定定理及推论

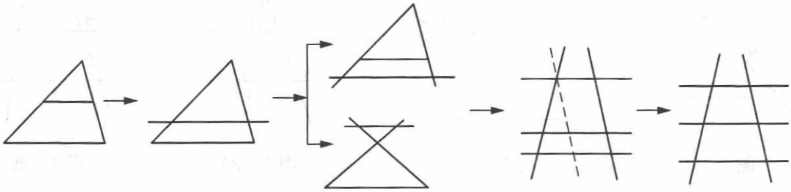

图 1－27

以上是这几个定理的关系示意图：

我们对比例线段与平行线的有关定理进行了梳理，下面我们借助这些知识解决有关问题.

四、应用举例

1. 求线段长、求线段的比

我们直接利用这两个基本图形解决有关问题.

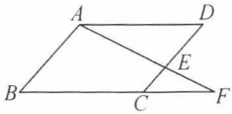

图 1－28

例1 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 上一点，连结 AE 并延长交 BC 延长线于点 F，$BF=8$，$AD=6$，$AB=4$，求 CE、DE 长.

分析 由于四边形 $ABCD$ 是平行四边形，显然 $AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$. 利用两个基本图形可求得 CE、DE 长.

从原图中分解得到两个基本图形：

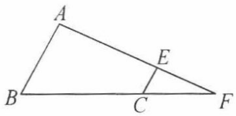

图 1－29

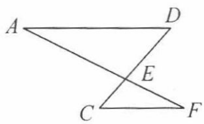

图 1－30

解 因为 $CE \parallel AB$，

所以 $\dfrac{CE}{AB}=\dfrac{CF}{BF}$.

又 $AB=4$，$CF=2$，$BF=8$，

当然我们也可以借助 $AD \parallel CF$，建立比例式 $\dfrac{AD}{CF}=\dfrac{DE}{CE}$，求得 CE、DE 长.

于是有 $\frac{CE}{4} = \frac{2}{8}$，

从而 $CE = 1$.

同理：$DE = 3$.

反思 借助两个基本图形，利用三角形一边平行线的性质定理得到比例式求出线段长.

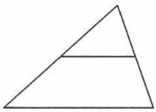

图 1－31

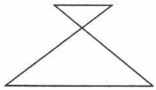

图 1－32

如果例 1 中直线 EF 绕着点 E 旋转，看如下问题：

2. 证明比例式(等积式)

例 2 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，G 是对角线 BD 上任一点，过点 G 的直线交 BA、BC 的延长线于点 I、F，交 AD、CD 于点 H、E.

求证：$\frac{GI}{GF} = \frac{GE}{GH}$.

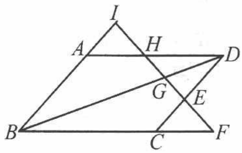

图 1－33

分析 要证 $\frac{GI}{GF} = \frac{GE}{GH}$，其中的 $\frac{GI}{GF}$、$\frac{GE}{GH}$ 无法从 $CD \parallel AB$，$AD \parallel BC$ 直接得到，

再观察要证：$\frac{GI}{GF} = \frac{GE}{GH}$，利用比例的性质改变比例式的形式即证：$\frac{GI}{GE} = \frac{GF}{GH}$.

而由 $CD \parallel AB$，$AD \parallel BC$ 可以分别得到 $\frac{GI}{GE} = \frac{GB}{GD}$，$\frac{GF}{GH} = \frac{GB}{GD}$.

这里 $\frac{GB}{GD}$ 起到了“牵线搭桥”的作用，这种寻找“中间比”的方法是我们在证明有关比例式或等积式时的常用方法.

证明由同学们完成.

反思

要证比例式，如果两个线段比无法直接建立相等关系，那么需借助平行线来寻找中间比；当有时证明一个比例式发生困难时，改变比例式的表达形式. 例如：将 $\frac{GI}{GF} = \frac{GE}{GH}$ 改写成 $\frac{GI}{GE} = \frac{GF}{GH}$ 的形式，可起到“柳暗花明”的效果.

3. 证明线段相等

例 3 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，G 是对角线 BD 上任一点，过点 G 的直线交 BA、BC 延长线于点 I、F，交 AD、CD 于点 H、E.

连结 AC 交 BD 于点 O，如果 $AC \parallel IF$，

求证：$IG=GF$.

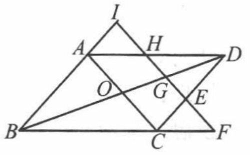

图 1 - 34

分析 由于四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 与 BD 交于点 O，则 $AO=OC$. 而 AO、OC 所在的直线与直线 IF 平行，这为证明 $IG=GF$ 提供了途径.

证明 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 与 BD 交于点 O，所以 $AO=OC$.

又 $IF \parallel AC$，

于是 $\frac{AO}{IG}=\frac{BO}{BG}$，$\frac{OC}{GF}=\frac{BO}{BG}$.

由 $\frac{BO}{BG}$ 这一"中间比"经"等量代换"得到：

$\frac{AO}{IG}=\frac{OC}{GF}$.

故 $IG=GF$.

反思

本题证明两条线段相等利用了 $\frac{x}{a}=\frac{m}{n}$，$\frac{y}{b}=\frac{m}{n}$，由 $\frac{m}{n}$ 这一"中间比"经"等量代换"得到 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，又 $a=b$ 得到 $x=y$.

用比例线段证明两条线段相等，常用思路还有：

证明 $\frac{x}{a}=\frac{y}{a}$ 得到 $x=y$；

证明 $\frac{x}{a}=\frac{m}{n}$，$\frac{y}{a}=\frac{m}{n}$ 得到 $\frac{x}{a}=\frac{y}{a}$，再得到 $x=y$；

证明 $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$，有 $x=\frac{a\cdot b}{c}$，再证明 $\frac{y}{b}=\frac{a}{c}$，有 $y=\frac{a\cdot b}{c}$，从而得到 $x=y$.

利用比例线段证明线段相等的常见图形有：

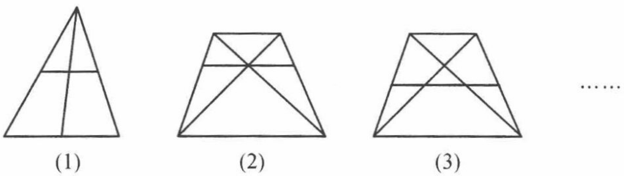

图 1 - 35

刚才的证明就是应用了图 1 - 35(1).

同学们肯定已经注意到例 1 与例 2 是如下图形绕着点 E 旋转形成的，这两题之间存在内在的联系.