志鸿优化系列丛书

丛书主编：任志鸿

根据最新国家课程标准和考试大纲编写

Master

弥补知识短板的最佳方案

高考专题复习

模块高手

数学

⑫ 三角与不等式

知识出版社

Master

高考专题复习

模块高手

⑫ 三角与不等式

数学

丛书主编 任志鸿
本册主编 王少春 牟林青
副 主 编 孙连信 张银环 李乐浩 张素阁

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考专题复习模块高手.数学.三角与不等式/任志鸿主编．—北京：知识出版社，2009.5(2010.5 重印)

ISBN 978-7-5015-5674-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.任…　Ⅲ.①几何课—高中—升学参考资料　②代数课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 067575 号

责任编辑：崔小荷

知识出版社出版

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号　电话 010-88390797

新华书店经销

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

山东鸿杰印务集团有限公司印刷

*

开本 890×1240 毫米　1/32　印张 8　字数 220 千字

2009 年 6 月第 1 版　2010 年 5 月修订　2010 年 5 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5015-5674-8

定价：14.50 元

FOREWORD

前言

《高考专题复习模块高手》

——弥补知识短板的最佳解决方案

每个学科的知识都按一定的内在规律构成一个个相互联系而又相对独立的模块，每个模块内部又细分为若干个更具体的专题。“木桶理论”告诉我们，木桶盛水的多少并不取决于箍合木桶的较长木板，而是完全受制于构成木桶的最短的木板；在高手对决中，获胜一方的武功不一定处处都比对手强，但他肯定是武功全面，没有让对手置于死地的软肋。

在高考选拔中，每个专题、每个模块、每个学科的成绩决定着高考的总成绩。也许你各学科成绩大部分不错，但总体成绩却可能会因某一学科中的薄弱模块、专题而受到影响。只要找到影响整体成绩提升的模块、专题，加以强化巩固提升，就会快捷高效地提升整体考试成绩。《高考专题复习模块高手》就是以模块为单元、以专题为复习切入点，为帮助考生快速提升整体考试成绩而精心编写的一套自学用书。

本套丛书为你精心设计了以下弥补知识短板，快速提升成绩，成为真正的模块高手、学科高手、得分高手的最佳解决方案：

1 高手策略之一

科学细分专题模块备考单元，全面透彻地解读最新高考大纲对本专题模块内容的考试要求，透彻剖析最新的高考真题，明确把握复习的方向，使复习有的放矢、少走弯路。

2 高手策略之二

概括提炼专题主干知识，分析重点，解决难点，关注热点，揭示考点，使考生系统把握专题知识内在规律，深入理解知识、有效整合知识，形成更系统、更完备的学科知识体系。

前言

3 高手策略之三

精心提炼各学科最实用的解题方法技巧，使备考复习变得更加轻松而有效；使考生形成规范的解题习惯，掌握灵活实用的解题方法技巧，让备考复习事半而功倍。

4 高手策略之四

按照专题知识体系的内在逻辑结构，精心遴选能覆盖专题基础知识和基本能力的训练题和一定数量的拓展创新题，以帮助考生进行跨越式提升。

愿你成为真正的模块高手、学科高手、得分高手！

丛书编委会

目录

Contents

知识方法快速索引

Contents

Contents

Contents

备考指导

一、考点网络

- 三角与不等式
  - 三角函数
    - 任意角的三角函数
      - 定义
      - 三角函数线
      - 角度与弧度的互化
    - 同角三角函数关系式与诱导公式
      - 关系式：平方关系、倒数关系、商数关系
      - 诱导公式
        - 同名公式
        - 异名公式
        - 奇变偶不变，符号看象限
    - 三角函数的恒等变换
      - 两角和与差的三角函数公式
      - 倍角、半角、万能、降幂公式
      - 积化和差与和差化积公式
      - 求值、化简、证明
    - 三角函数的图象与性质
      - 图象变换
        - 振幅变换
        - 周期变换
        - 相位变换
        - 对称变换
      - 函数性质
        - 单调性
        - 周期性
        - 奇偶性
        - 对称性与有界性
    - 三角函数的应用
      - 三角函数的最值
      - 解斜三角形
        - 正弦定理
        - 余弦定理
        - 面积公式
  - 不等式
    - 不等式的性质
    - 不等式的证明
      - 求差比较法、求商比较法、分析法、综合法
      - 反证法、数学归纳法、构造法、判别式法、放缩法等
    - 不等式的解法：等价转化法与图解法
    - 不等式的应用
      - 均值不等式的应用
      - 简单的线性规划
        - 最值问题
        - 整点问题
        - 参数问题
        - 概率问题

MATH

二、高考预测

1. 三角函数

从近几年高考来看，每年分别有一道考查本单元基础知识的选择题、填空题和解答题，其中分值约占全卷分值的15%．这一部分知识最可能出现的是"结合实际，利用三角变换（尤其是余弦的倍角公式和特殊情形下公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 的应用）来考查三角函数性质"的命题，难度以灵活掌握倍角的余弦公式的变式运用为宜．高考对本单元的考查侧重于：

(1)三角变换．主要考查公式的灵活应用、变形能力，一般要运用和角与差角、倍角、降幂公式、引辅助角公式、诱导公式等．

(2)三角函数的图象、性质及其变换．主要是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象、性质及其变换，三角函数的奇偶性、周期性、单调性、有界性、最值、图象的对称性及图象的平移、伸缩、五点法作图等．

(3)三角函数的应用，以平面向量、解析几何等为载体，或者用解三角形等来考查学生对三角恒等变形及三角函数性质的应用的综合能力．

2. 不等式

分析近几年高考试题，本单元主要考查不等式的解法与证明，以及与其他单元（如函数、数列等）的综合应用．从题型上看，选择题、填空题主要考查不等式的性质，比较大小，解简单的不等式以及线性规划等；解答题主要考查含参数的不等式的证明以及与函数、导数、数列的综合应用．

预测今后高考命题趋势为：

(1)从题型上看，选择题、填空题都有可能考查．把不等式的性质与指数、对数函数、三角函数等结合起来综合考查不等式的性质、函数单调性等，多以选择题形式出现；解不等式的试题常以填空题和解答题形式出现；解答题以含有参数的不等式的证明、求解为主．

(2)以当前经济、社会、生活为背景与不等式综合的应用题仍是高考的热点，主要考查考生阅读以及分析、解决问题的能力．

(3)在函数、不等式、数列、解析几何、导数等知识网络的交汇点处命题，特别注意与函数、导数综合命题这一变化趋势．

三、复习指导

复习三角函数必须做好以下三个方面的工作：

1. 掌握三角函数基本的三角变换．虽然三角变换的考查要求有所降低，但它终究是三角函数的基础，没有三角函数的恒等变形就谈不上图象和性质的应用，所以要立足课本，掌握课本的三角变换及基本方法．首先要熟练掌握基本公式，主要是：诱导公式、和角与差角、二倍角，要求学生会推导掌握它们之间的内在联

系.特别要注意公式 $\cos2\alpha$ 的变形及由此而得到的降幂公式 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$；引辅助角的公式 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，辅助角 φ 的意义（φ 所在的象限、$\sin\varphi$、$\cos\varphi$、$\tan\varphi$ 的值、φ 的具体值主要掌握辅助角 φ 是特殊角的情况）.对于半角公式、万能公式、积化和差、和差化积公式虽然不做要求，但应会推导.其次要掌握变换的基本策略：①差异分析……观察角、函数名称、代数结构差异；②寻找联系……运用相关公式，找出差异之间的内在联系；③合理转化……选择恰当的公式，促进差异的转化.

2. 掌握三角函数的概念、图象和性质.高考加强了对三角函数的图象与性质的考查，三角函数的图象和性质是本单元复习的重点，重点放在知识理解的准确性、熟练性和灵活性上.在复习时要充分运用数形结合的思想，把图象与性质结合起来，即利用图象的直观性得出函数的性质，或由单位圆上线段表示的三角函数值来获得函数的性质，同时也要能利用函数的性质来描绘函数的图象，这样既有利于掌握函数的图象和性质，又能熟练地运用数形结合的思想、方法.

3. 重视数学思想方法的复习.本单元试题以选择题、填空题、解答题的形式出现，因此复习中要重视选择、填空题的一些特殊方法，如数形结合法、函数法、代入检验法、特殊值法、待定系数法、排除法等.另外对有些具体问题还要掌握和运用一些基本结论（如对正弦、余弦函数的图象的对称轴经过最高点或最低点，对称中心为三角函数值为零的点，应熟练的写出对称轴的方程及对称中心的坐标；应用三角函数线解三角方程、比较三角函数值的大小；对三角函数的角的限制及讨论；常数1的代换等）.

第一章 任意角的三角函数

三角函数是高中数学中的重要内容,也是高考考查的重点和热点.任意角的三角函数的定义以及任意角的概念和弧度制都是学习和研究三角函数的基础,但是作为任意角的三角函数一章在高考中极少单独命题,一般都是间接考查,因此学习本章的重点在于掌握三角函数的定义,理解单位圆中的三角函数线的实质,学会判断三角函数值正负号的方法,深刻体会数形结合思想与坐标定义法在解决三角函数问题中的重要作用.

高/考/导/引

1. 知识目标

了解任意角、象限角的概念,掌握终边相同角的表示;掌握任意角的三角函数的定义(正弦、余弦、正切),能正确进行弧度与角度之间的换算.

2. 能力目标

掌握任意角的正余弦、正切的定义,会判定三角函数值的符号;会用单位圆中的三角函数线解答有关问题,能熟练运用终边相同角的集合研究相关问题.

3. 命题趋势

在高考命题中,角的概念考查一般仅限于基础知识,即对角的交、并等运算技能的考查,有一定的综合性,涉及的知识点较多,但都较为浅显,尽管三角函数的意义与三角函数的符号一般仅限于较低层面上的考查,但对培养学生的数形结合能力却起到了一定的作用,题型多以选择题形式出现.

考点梳理

考点1 角的概念

1. 任意角

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形，按旋转的方向，可分为正角、负角和零角.

正角：按逆时针方向旋转形成的角叫正角.

负角：按顺时针方向旋转形成的角叫负角.

零角：一条射线不作任何旋转形成的角叫零角.

角的三要素：顶点、终边、始边，角可以任意大小.

2. 象限角与象限界角

当角的顶点在坐标原点，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么角的终边(除端点)在第几象限，就说这个角是第几象限角. 如果终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限，这样的角叫象限界角或轴线角.

(1)象限角

若 α 为第一象限角，则$\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

若 α 为第二象限角，则$\{\alpha|k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

若 α 为第三象限角，则$\{\alpha|k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

若 α 为第四象限角，则$\{\alpha|k\cdot360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)象限界角

终边在 x 轴非负半轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 x 轴负半轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 x 轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 y 轴正半轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 y 轴负半轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 y 轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在坐标轴上的角可表示为$\{\alpha|\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

3. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一个与角 α 终边相同的角，都可表示成角 α 与整数个周角的和.

几何意义：β 角可由 α 的终边绕着原点旋转周角的整数倍而产生. 当 $k>0$ 时，沿逆时针方向旋转，当 $k<0$ 时，沿顺时针方向旋转，当 $k=0$ 时，β 角就是 α 角.

一般地，$\beta=k\theta+\alpha,k\in\mathbf{Z}$ 表示 β 角可由 α 的终边绕着原点旋转 θ 角的整数倍而产生.

考点 2　角度制与弧度制

1. 角度制与弧度制的定义

规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角，表示为 1°. 用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制，规定把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作“弧度”. 这种以弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

2. 角度制与弧度制的换算

(1)$360^\circ=2\pi$ rad；(2)$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx 0.017\ 44$ rad；(3)1 rad$=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx 57.30^\circ=57^\circ18'$.

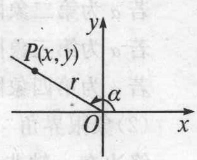
注：用弧度制表示角时，通常将“弧度”或“rad”省略不写. 如 $30^\circ=\frac{\pi}{6}$，$45^\circ=\frac{\pi}{4}$，$90^\circ=\frac{\pi}{2}$等.

3. 扇形弧长公式与面积公式

$l=|\alpha|\cdot r$，$S=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$. 其中 l 为扇形弧长，α 为圆心角，r 为扇形半径.

考点 3　任意角的三角函数

1. 任意角三角函数的定义



设 α 是一个任意大小的角，α 的终边上任意一点 P 的坐标是(x,y)，它与原点的距离 $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，那么

①比值$\frac{y}{r}$叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

②比值$\frac{x}{r}$叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

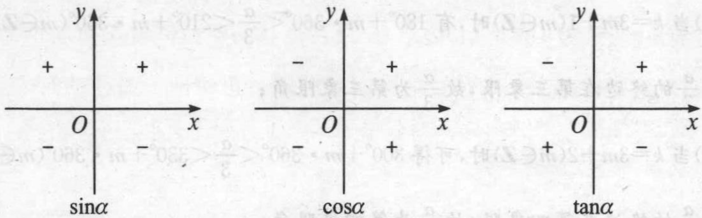
③比值$\frac{y}{x}$叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

2. 各三角函数的定义域和值域

三角函数	定义域	值域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$\tan\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
$\cot\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$

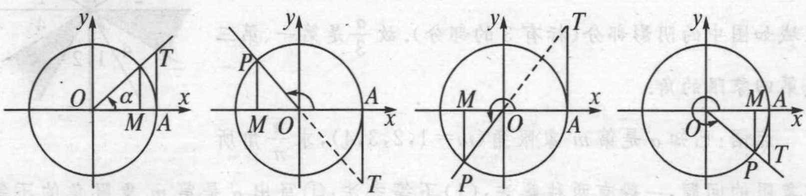
3. 三角函数值在各象限的符号

可用口诀:“一全正,二正弦,三两切,四余弦”判断. 见下图:



4. 三角函数线的定义

设任意角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$,过点 P 作 x 轴的垂线,垂足为 M,我们把线段 MP,OM 分别叫做角 α 的正弦线和余弦线,过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线,交角 α 的终边(或反向延长线)于 T,则有向线段 OT 叫做角 α 的正切线. 如图所示:



点悟:(1)理解三角函数的定义,掌握弧长公式、扇形的面积公式以及三角函数值的符号规律,学会用三角函数线比较大小是本章学习的重点和难点.

(2)由三角函数的定义,易知终边相同的角的同一三角函数的值相等,即 $\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha$,$\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha$,$\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha$.

方法攻略

1. 判断等分角所在的象限

【例 1】已知 α 为第三象限角,试确定 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

解法一:(利用终边相同角的集合法,即不等式法判断).

$\because \alpha$ 为第三象限角,$\therefore 180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$. $\therefore 60°+k\cdot 120°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot 120°$.

(1)当 $k=3m(m\in\mathbf{Z})$ 时,有 $60°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<90°+m\cdot 360°(m\in\mathbf{Z})$,

$\therefore \frac{\alpha}{3}$的终边在第一象限，故$\frac{\alpha}{3}$为第一象限角；

(2)当 $k=3m+1(m\in\mathbf{Z})$时，有 $180^\circ+m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<210^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$，

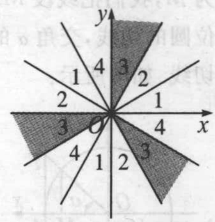
$\therefore \frac{\alpha}{3}$的终边在第三象限，故$\frac{\alpha}{3}$为第三象限角；

(3)当 $k=3m+2(m\in\mathbf{Z})$时，可得 $300^\circ+m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<330^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \frac{\alpha}{3}$的终边在第四象限，故$\frac{\alpha}{3}$为第四象限角.

综上所述，$\frac{\alpha}{3}$是第一、第三或第四象限的角.

解法二：等分象限法，将坐标系每个象限三等分，再自 x 轴正向逆时针依次循环标注 1，2，3，4，如图所示：$\frac{\alpha}{3}$所在区域如图中的阴影部分(标有 3 的部分). 故$\frac{\alpha}{3}$是第一、第三或第四象限的角.



点悟：已知 α 是第 m 象限角($m=1,2,3,4$)，求$\frac{\alpha}{n}$角所在象限的问题，一般有两种解法：(1)不等式法：①写出 α 是第 m 象限角的不等式；②求出$\frac{\alpha}{n}$满足的条件；③对 k 进行分类讨论，一般地 n 是几就分几类，即 $k=nm, nm+1, nm+2, \cdots, nm+(n-1), m\in\mathbf{Z}$. (2)等分象限法：①将各象限 n 等分；②自 x 轴正方向上方第一个区域开始，按逆时针方向依次标注 1，2，3，4，1，2，3，4，…，周而复始，直至填完所有区域；③出现数字 m 的区域即为所求.

即时训练

① 已知 α 是第二象限角，求$\frac{\alpha}{4}$所在的象限.

2. 判断角所在的象限

【例 2】已知 $\sin\theta\cos\theta>0$，试确定 θ 所在的象限.

解法一：(转化法).

$\because \sin\theta\cos\theta>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta<0,\\ \cos\theta<0,\end{cases}$ $\therefore$ 由 $\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\end{cases}$ 知 θ 在第一象限，

由 $\begin{cases}\sin\theta<0,\\ \cos\theta<0,\end{cases}$ 知 θ 在第三象限. $\therefore \theta$ 在第一、三象限.