

Lectures of Linear Partial Differential Equations



数学·统计学系列

线性偏微分方程讲义

[美] L·尼伦伯格 著 陆柱家 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



Lectures of Linear Partial Differential Equations

线性偏微分方程讲义

● [美] 尼伦伯格 著 ● 陆柱家 译



0175.2
N440



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内容提要

本书共分两章:第Ⅰ章论述一个颇为古典的问题,即通过适当的自变量变换,把(一阶)算子组化为像 Cauchy - Riemann 方程组这样简单的典则形式;第Ⅱ章致力于一些现在已被证明是如此有用的工具,即拟微分算子,以及广义函数波前集(或奇谱)的概念,并介绍了它们的几个应用. 本书适合数学爱好者以及线性偏微分方程的研究者和有关方面的专家参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性偏微分方程讲义/(美)尼伦伯格著;陆柱家
译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5603-3224-6

I. ①线… II. ①尼…②陆… III. ①线性方程:偏
微分方程 IV. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038406 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 尹 凡
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 4.75 字数 83 千字
版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3224-6
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

绪 言 //1

第 I 章 化一阶算子组为典则形式的方法 //3

1. 一阶方程 //3
2. 齐次方程 //7
3. 高维空间中的齐次方程 //11
4. 几乎 (almost) 复结构的可积性 //15

第 II 章 拟微分算子及其某些应用 //20

5. 拟微分算子 //20
6. 有关 Cauchy 问题唯一性的 Calderón 定理和一个推广 //29
7. Cauchy 问题的唯一性(续) //36
8. 波前集和奇性的传播 //43
9. 次特征和奇性在边界处的反射 //48

参考文献 //58

编辑手记 //61

最近二十年来,偏微分方程理论有了显著的发展.新的问题被提出了,新的有力的工具也产生了,从而常常使得老问题获得较深刻的理解和解决.

这本讲义致力于线性偏微分方程理论中的若干课题.从比较初等的叙述性的材料开始,然后才接触现代的发展和技巧.对于非专业人们而言,这是一个对于一些现代问题和观点的介绍.它包含着老的成果,同时也包含新的成果.因为我希望考察一些深刻的结果,有时就必须技巧性强一些,但同时也尽力描述一下必要的背景.

第 I 章论述一个颇为古典的问题,即通过适当的自变量变换,把(一阶)算子组化为像 Cauchy - Riemann 方程组这样简单的典则形式.除了少数技巧性要求(这也是描述了的)外,这部分内容或多或少是自足的.在第 1 节中,我们介绍了无解非齐次偏微分方程的 Lewy 例的一个变种.把方程化为典则形式的问题与齐次方程非平凡解的存在性有关,在第 2 节和第 3 节中,给出了只有平凡解或狭义解的齐次方程的例子,这些结果是新的.在第 4 节中,用 Malgrange^[25]的方法处理了把 $\mathbf{R}^{2n}$ 中 n 个方程组变换为 C^n 中的 Cauchy - Riemann 算子组的问题.虽然我们对于 Malgrange 的推理没有增加新的东西,但在我看来,这种推理是这样惊人,以致我觉得有必要在这本讲义里向尽可能广的读者

再次介绍它.

在第 II 章中,我们致力于一些现在已被证明是如此有用的工具,即拟微分算子,以及广义函数波前集(或奇谱)的概念,并且,我们介绍了它们的几个应用.第 5 节中给出了一类(稍狭窄一些的)拟微分算子的定义和概观.在第 6 节和第 7 节中,作为这类拟微分算子的值得注意的应用,我们证明了 Calderón^[2]有关始值问题的局部唯一性的一个定理,并将其结果稍加推广.(这也许是这本讲义里技巧性最高的部分.)接着,在第 8 节中引进了波前集的概念,并证明了 Hörmander 的有关奇性传播的一个漂亮的定理^[15].最后,在第 9 节中,我们推广他的结果去概括由于波前集的“反射”而产生的边界处的性状,这个波前集满足某些“边界条件”.这个结果是 P. D. Lax 和作者正在进行中的共同工作的一部分.

本书中我们将用比较标准的记号.对于定义于 $\mathbf{R}^n$ 的一个区域中的 $x = (x^1, \dots, x^n)$ 的函数 $u(x)$,我们使用下述记号: $\partial_{x_j} = \partial/\partial x^j$, $D_j = \partial_{x_j}/i$, $D = (D_1, \dots, D_n)$. 有时,我们用下标表示微商 $u_x = \partial u/\partial x$, 等等. 对于一组非负整数的多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ 是一个 $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ 阶的微商. $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ 的倒数将作为系数出现于 Taylor 级数展开式中. 在 Fourier 变换中, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ 将起着对偶变量的作用,并且,我们令 $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$. 一个线性偏微分算子是系数为 x 的函数(这里,它们总是 C^∞ 的)的 D 的多项式:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

相应的多项式 $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ 被称为算子 P 的(全)算符,它的最高次齐次部分 $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ 被称为 P 的主算符,记为 p .

读者将在文献中找到这里所讨论的课题的更多的资料.我们特别提醒大家注意 Hörmander^[17]的讲义,那个讲义描述了很多新的发展;也请注意(即将出版的)①1971 年 8 月在 Berkeley 由美国数学会主办的偏微分方程夏季讨论班的论文集(*Proceedings of the American Mathematical Society Summer Institute on Partial Differential Equations*, Berkeley, August 1971).

① 现已出版.——译者注

化一阶算子组为典则形式的方法

第

I

章

1. 一阶方程

让我们从最简单的例子开始. 这个例子如同方向导数, 它是作用在实值函数 $w(x)$ 上的实系数一阶线性偏微分算子

$$Pw = \sum_1^n a^j(x) (\partial w / \partial x^j) \quad (1.1)$$

其中 $a^j(x)$ 是实的, 而 $x = (x^1, \dots, x^n) \in \Omega, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为开集. 在 Ω 中的每一点 x , 给出一个光滑变动的 (C^∞) 向量

$$a(x) = (a^1, \dots, a^n)$$

P 对函数 w 的作用是沿 a 的方向对 w 求导数, 此算子 P 也称为一个向量场. 我们用求这个向量场的“积分曲线”来解方程

$$Pw = f$$

所谓积分曲线, 就是具有下述性质的曲线: 在一条曲线上的每一点处, 在该点的向量 a 与此曲线相切. 若这样的曲线由

$$x = x(t)$$

给出, 这里 t 作为实参数, 那么 $x(t)$ 满足所谓“特征方程”的常微分方程组

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j(x(t)), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

从常微分方程的理论知道,通过 Ω 中的每一点 x_0 恰有一条积分曲线. 如果我们把一个函数 $w(x)$ 限制在这样的一条曲线上,在此曲线上 w 就变为 t 的函数,则得到(用求和的约定)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = f$$

这样,在积分曲线上 w 满足一个简单的常微分方程,因而 w 的值通过给出在横截于该向量场的超曲面(一个 $n-1$ 维曲面)上的初始值而唯一确定(至少是局部的).

我们可以局部的引进新自变量 $y = (y^1, \dots, y^n)$, 把积分曲线“变直”, 并把微分算子(1.1) 化为特别简单的形式

$$P = \lambda \frac{\partial}{\partial y^n}, \quad \lambda \neq 0 \quad (1.3)$$

此时,主算符(leading symbol) $a^j \xi_j$ 变为 $\lambda \eta_n$. 这样, $Pw = 0$ 的任一解即为 $(y^1, \dots, y^{n-1})$ 的一个任意函数. 所以我们看到,微分算子 P 的局部的研究只包含常微分方程组(1.2) 和算子 $\frac{\partial}{\partial y^n}$. 然而,用以决定积分曲线或特征曲线的方程组(1.2) 是非线性的——即使我们是从作用在 w 上的线性算子 P 出发的.

现在来考察一阶算子(1.1), 其中不仅系数,而且连 w 也允许为复值的. 任一这样的算子可写为

$$P = P_1 + iP_2$$

其中 P_1 和 P_2 是向量场,即具有实系数的算子. 如果 P_1 和 P_2 处处线性相关,即它们都是某一算子 P_3 的实倍数,那么 P 是 P_3 的一个(复)倍数,因此 P 的研究被归结为上面我们已描述过的 P_3 的研究. 这样,要研究的下一个有代表性的情形即为当 P_1 和 P_2 是处处线性无关的情形.

这中间最熟悉的例子是在具有坐标 (x, y) 的 $\mathbf{R}^2$ 中的 Cauchy - Riemann 算子

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (1.4)$$

这里 $z = x + iy$. 用 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 表示 P 和用 $\frac{\partial}{\partial z}$ 表示 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ 是方便的,因为此时一个函数 $w(x, y)$ 的微分取下述形式

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

满足齐次 Cauchy - Riemann 方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \text{ 即 } \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

的函数 $w = u + iv$ 的研究涉及解析函数理论. 解析函数或全纯函数的经典文献

不考虑非齐次方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f \quad (1.5)$$

然而,在解析函数理论的近代处理方法中,关于非齐次方程的结果在研究解析函数时被证明是很有用的. 对于“好”的函数 f ,方程(1.5)在一区域 Ω 中的解由(这里 $\zeta = \xi + i\eta$)

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

给出;这个公式导出解的许多性质,如果对(1.5)的研究如何导出解析函数方面的结果感兴趣的话,我们介绍读者看 Hörmander[13] 的第1章.

现在对于 $n = 2$ 考虑一般的算子

$$P = P_1 + iP_2$$

其中 P_1 和 P_2 是 Ω 中线性无关的(实)向量场. 这个算子是椭圆的. 值得注意的是:局部地,此算子并不比 Cauchy - Raemann 算子更一般些. 事实上,存在新的局部坐标 (x, y) , $z = x + iy$,使 P 取下述形式

$$P = \lambda \frac{\partial}{\partial z}$$

这里 λ 是一非零因子. 这样,方程 $Pw = f$ 就局部地等价于 $w_z = f$. 因此算子 P 导致一个 Ω 中的“复结构”(complex structure); $Pw = 0$ 的解变为关于此结构的全纯函数;特别,它们都是类 C^∞ 中的元素. 局部坐标 z 作为 $Pz = 0$ 的使 $\operatorname{Re} \operatorname{grad} z$ 和 $\operatorname{Im} \operatorname{grad} z$ 线性无关的局部解而被得到. 如果 z 是一个这样的局部解,那么用坐标 z 和 $\bar{z}$ 表示,算子 P 必定有形式 $P = \lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \mu \frac{\partial}{\partial z}$,但是其中 $\mu \equiv Pz \equiv 0$. 这样的局部解的存在性的证明不是显然的,例如可参阅 Courant 和 Hilbert[5] 的第4章第8节.

其次,转到 $n > 2$ 和 $P = P_1 + iP_2$,这里 P_1 和 P_2 在 Ω 中线性无关. 在 Ω 中的每个点处,这两个向量场生成一个二维平面. 尝试把在处理单个向量场(1.1)时用到的方法加以推广,即求一族二维积分曲面,这是合理的. 这些积分曲面有这样的性质:在它们中的任一个上的任一点处,两个向量场都与其相切. 一般这是不可能的. 经典的 Frobenius 定理给出了一个使此成立的充要条件. 这个条件是:算子 P_1 和 P_2 的交换子(commutator) $[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$ 是 P_1 和 P_2 的线性组合. 如果这个条件被满足,那么,由 Frobenius 定理,集合 Ω 被积分曲面——这些曲面通过 Ω 的每一点——所分片(一次覆盖). 这时,算子 P_1, P_2 ,因而算子 P 不超出每一曲面而作用. 这意味着,在每一曲面 S 中,我们有上述情形的结论: P 决定了 S 上的一个复结构.

现在假设 Frobenius 可积条件不成立,即 P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 是线性无关的.

奇怪的现象会发生. 1957 年 Hans Lewy [22] 提出了现在著名的 $\mathbf{R}^3$ 中这样算子的例

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + i(x^1 + ix^2) \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (1.6)$$

它有下列性质: 对很多(在某种意义下) C^∞ 函数 f , 方程

$$Pw = f$$

在任何开集中没有解. 这里

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

$$[P_1, P_2] = \frac{\partial}{\partial x^3}$$

其后, Hörmander 立刻得到任何阶的任何线性偏微分方程 $Pw = f$ 的局部可解性的一个一般的必要条件. 在

$$P = P_1 + iP_2 + c$$

的情形, 这里 P_1, P_2 是向量场(不必线性无关), 这个必要条件是, 在每一点, $[P_1, P_2]$ 是 P_1 和 P_2 的线性组合; 参阅 [12] 的 6.1 节.

下面的 $\mathbf{R}^2$ 中的算子或许是上面的条件不成立的最简单的情形

$$P = \frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.7)$$

这里 $P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, P_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$, 且 $[P_1, P_2] = \frac{\partial}{\partial y}$, 除了在 $x = 0$ 上之外, 处处皆为 P_1 和 P_2 的线性组合. 不可解方程的很多简单的例子已发表了.

现在我们来描述由 Grushin [11] 给出的一个例, 它是 Garabedian [10] 的一个例的修改. 它是关于下述方程的

$$\frac{\partial w}{\partial x} + ix \frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y) \quad (1.8)$$

首先我们注意, 如 $f(x, y)$ 是实解析的(即 $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 是解析的), 则从 Cauchy - Kowalewski 定理得到, (1.8) 在原点的一个邻域中有解析解. 而且, 若 f 是 C^∞ 函数, 则从前面的讨论知道, 在任一不在 y 轴上的点的一邻域中, (1.8) 是可解的.

不可解的例 令 $D_n, n = 1, 2, \dots$, 是 (x, y) 平面的右半平面 ($x > 0$) 中的闭的不交的圆盘的一个任意的序列, D_n 的中心在 $(x_n, 0)$, 这里 $x_n > 0$, 且 $x_n \rightarrow 0$. 设 $f(x, y)$ 是一任意选择的具有紧支集的 C^∞ 函数, 它是 x 的偶函数, 在 D_n 外且 $x \geq 0$ 处等于零, 并且使

$$\iint_{D_n} f \, dx \, dy \neq 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

这样的函数 f 容易被构造出来.

定理 1 如果 f 满足上面的条件, 那么在原点的任一邻域中, (1.8) 没有属于 C^1 的解.

这个定理的证明容易加以推广(参看[11]), 去证明在原点的任一邻域中不存在广义函数解.

证明 假设 w 是 (1.8) 在原点的某一邻域 Ω 中的解. 把 w 分解为 $w = u + v$, 作为关于 x 的它的奇部和偶部的和. 因为 f 关于 x 是偶的, 我们看到, 方程 (1.8) 的偶部是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + ix \frac{\partial u}{\partial y} = f \quad (1.9)$$

特别, 在 $x \geq 0$ 中 (1.9) 成立, 同时, $u(0, y) = 0$. 若在区域 $x \geq 0$ 中我们引进新的变量 $s = \frac{x^2}{2}$, 则 $\frac{\partial}{\partial s} = x^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$, 因此, (1.9) 除以 x 后我们得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2s}} f(\sqrt{2s}, y) & s \geq 0 \\ u = 0 & s = 0 \end{cases}$$

这样, u 在圆盘 D_n 的外部满足齐次 Cauchy - Riemann 方程 $\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = 0$, 因此 u 是复变量 $s + iy$ 的一个全纯函数. 因为这些圆盘的并集的余集是连通的, 且因为在 $s = 0$ 上 $u = 0$, 从关于全纯函数的著名的唯一性定理我们推得, 在圆盘 D_n 的外部 $u \equiv 0$. 特别, 在每一圆盘 D_n 的边界上 $u = 0$. 但是, 如果我们对 (1.9) 应用 Green 公式, 则得到

$$\iint_{\Omega_n} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega_n} (u_x + ixu_y) \, dx \, dy = \oint_{\partial \Omega_n} (u \, dy - ixu \, dx) = 0$$

这与我们的假设矛盾. 证毕.

近年来, 非齐次纯量(复)方程的局部可解性问题已经有很多的研究. 例如可参阅[28], [8], [17] 和[34], 在那里可以找到更多的文献.

2. 齐次方程

在由 Lewy[22] 给出的不可解方程的例—— $Pu = f$ 在 $\mathbf{R}^3$ 内——中, 方程在任一开集中无解. 正如 Lewy 指出的, 它有下列奇怪的推论: 在任一开集中, 方程 $(P - f)u = 0$ 的唯一解 u 是 $u \equiv 0$. 因为若在某开集中 $u \neq 0$, 则在那里 $w = \log u$ 是方程 $Pw = f$ 的一个解. 因此, Lewy 提出下述问题: 一阶齐次方程

$$Pw = \sum a^j \frac{\partial w}{\partial x^j} = 0, \quad \sum |a^j| \neq 0$$

是否恒有局部非平凡解,或是否存在这样的算子,对此算子, $w \equiv$ 常数是唯一的局部解.

这个有趣的问题的提出也与 Lewy 的另一篇论文[21] 有关,我想叙述一下这篇论文的主要结果. 也可以参阅[13] 中的定理 2. 6. 13. 令 P 是 $\mathbf{R}^3$ 的原点的某一邻域 Ω 中的复系数一阶算子

$$P = \sum_1^3 \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} = P_1 + i P_2, \sum |\alpha^j| \neq 0$$

其中, P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 线性无关. 假设 z 和 w 是 $Pw = 0$ 在 Ω 中的两个 C^2 解, 它们的梯度是线性无关的(在复域上). 显然, z 和 w 的任一全纯函数 $h(z, w)$ 也是此齐次方程的一个解. 用 S 表示由 $(z(x), w(x))$ 所得到的 C^2 中的三维曲面; 由上面的条件, 不难看出, S 是一个正规曲面. 令 u 是 $Pu = 0$ 在 Ω 中的一个 C^1 解. 因此不妨认为 u 是 S 上的函数, 并且, u 可以被延拓到 C^2 中 S 的一侧(S 是强拟凸的 (strongly pseudo-convex), 仅依赖于 P, z, w), 作为 (z, w) 的全纯函数. 反之, 在 S 的任一侧 S_+ 中的 (z, w) 的任一全纯函数 u , 在 $S_+ \cup S$ 中它属于 C^1 , 则在 S 上满足 $Pu = 0$.

这样, 这个结果导致下述问题: 我们能否找到具有线性无关梯度的 $Pw = 0$ 的两个解? 或者, 能否找到一个使 $\text{grad } w \neq 0$ 的解 w ? 这后一问题是与这样的问题密切相关的: 找新的自变量, 记为 x, y, t , 有 $x + iy = w$, 使 P 取作简单的形式

$$P = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial w} + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right), \lambda \neq 0 \quad (2.1)$$

事实上, 如果 w 是 $PW = 0$ 的一个解, 且 $\text{Re grad } w$ 和 $\text{Im grad } w$ 线性无关, 那么, $\text{Re } w, \text{Im } w$ 和第三个实变量 t 即可作为新的自变量而被引进, 因此 P 必定有形式(2.1).

我们将介绍一个 $\mathbf{R}^2$ 中的算子 $P = P_1 + i P_2$, 其中 P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 线性无关, 并使得最后一个问题的回答是否定的. 在介绍前, 让我们看一个形为

$$P = \frac{\partial}{\partial x} + i x \rho(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.2)$$

的 $\mathbf{R}^2$ 中算子 $P = P_1 + i P_2$ 的简单的例子, 它使得 $[P_1, P_2]$ 不是 P_1 和 P_2 的线性组合, 这里 ρ 是原点的某一邻域中正的 C^∞ 函数. 一个类似的问题是, 是否能局部地找到新的自变量 (ξ, η) , 使该算子变成方程(1.7)—— $\frac{\partial}{\partial \xi} + i \xi \frac{\partial}{\partial \eta}$ ——的倍数, 即 $\rho = 1$, 如果能够的话, 那么 $w = \frac{\xi^2}{2} + i \tau$ 将是

$$Pw = 0, \text{grad } w(0, 0) \neq 0 \quad (2.3)$$

的一个解.

我们将构造一个特殊的 C^∞ 正函数 ρ , 使得在原点的某一邻域中 $Pw = 0$ 的

唯一解 w 是 $w \equiv \text{常数}$ ①. 函数 $\rho(x, y)$ 是这样的形式

$$\rho(x, y) = 1 + x\phi(x, y) \quad (2.4)$$

其中 ϕ 是一个非负 C^∞ 函数, 它对 x 而言是偶函数, 在一相互不交的圆盘序列 $D_j^{m,n}$ 的内部是正的, 在 $D_j^{m,n}$ 的并集的外部的属于 $x \geq 0$ 的部分中 $\phi = 0$. 我们将在 $x \geq 0$ 中描述 ϕ ; 它在 $x = 0$ 上将是无穷阶地消失, 因此它可作为 x 的偶函数被延拓到 $x < 0$ 处. 对于正整数 m, n, j , $D_j^{m,n}$ 是两两不交的闭圆盘, 对每对固定的 (m, n) , 它们满足下述条件:

(i) $D_j^{m,n}$ 的圆心的纵坐标等于 $\frac{1}{n}$ ②;

(ii) 对于 $D_j^{m,n}$ ($j = 1, 2, \dots$) 中的任何 (x, y) , $\frac{1}{m} < x < \frac{1}{(m-1)}$;

(iii) 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $D_j^{m,n}$ 的圆心的横坐标递减于 $\frac{1}{m}$.

容易构造这样的圆盘序列, 我们看到, 对固定的 (m, n) , $D_j^{m,n}$ 收敛于点 $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$. 给出 $D_j^{m,n}$ 后, 容易构造出具有上面所描述的所希望的性质的 ϕ .

定理 2 令 ρ 由 (2.4) 确定, 其中 ϕ 有上述性质, 则在原点的邻域中, $Pw = 0$ 的任何一个属于 C^1 的解 w 必定恒等于常数.

定理 2 的证明, 很容易加以推广至对于任何广义函数解, 同样的结论仍成立.

证明 我们可以假设 w 在一圆心在原点的开圆盘 D 中被确定. 因为 P 对于 $x \neq 0$ 是椭圆的, 因此对于 $x \neq 0$, 函数 $w \in C^\infty$, 我们写成

$$w = u + v$$

其中 u 和 v 是关于变量 x 的 w 的奇部和偶部. 方程 $Pw = 0$ 的偶部为

$$u_x + ixu_y = -ix^2\phi v_y \quad (2.5)$$

如果我们只考虑 $x \geq 0$, 并令 $s = \frac{x^2}{2}$, 则在除以 x 后我们就得到

$$u_s + iu_y = -i\sqrt{2s}\phi(\sqrt{2s}, y)v_y, \quad s \geq 0$$

并得到, 在 $s = 0$ 上 $u = 0$. 因此, 在连通集 $\Omega = D \setminus (\cup D_j^{m,n})$ 中, 当 $s > 0$ 时, u 是 $s + iy$ 的全纯函数, 并且, 在负 y 轴上 $u = 0$; 因此在 Ω 中 $u \equiv 0$. 特别, u 和它的各阶导数在圆盘 $D_j^{m,n}$ 的边界上都等于零.

① 鉴于这个例子, 我愿意感谢 F. Treves, 因为他与我进行了一次很有帮助的讨论. 这个例子多少有点模仿上面的 Grushin 的例子.

② 原文的条件 (i) 中为“圆心的坐标”; 现根据条件 (ii)、(iii), 已在条件 (i) 中改为“圆心的纵坐标”. ——译者注

现在我们将证明, 对 $m, n = 1, 2, \dots$ 有

$$v_y\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = 0 \quad (2.6)$$

假如相反, 设对某些 $m, n, v_y\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \neq 0$. 对于大的 j , 在 $D_j^{m,n}$ 上积分方程 (2.5); 由 Green 公式, 有

$$0 = \iint_{D_j^{m,n}} (u_x + ixu_y) dx dy = -i \iint_{D_j^{m,n}} x^2 \phi v_y dx dy \quad (2.7)$$

然而, 对于大的 j , 对于 $D_j^{m,n}$ 中的 (x, y) , $\arg v_y(x, y)$ 接近 $\arg v_y\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, 且对于 $\arg x^2 \phi v_y$ 也有同样的事实, 这就证明了 (2.7) 是不可能的. 因此 (2.6) 成立. 方程 $Pw = 0$ 关于 x 的奇部有形式

$$v_x + ixv_y = -ix^2 \phi u_y \quad (2.8)$$

因此我们也得到

$$v_x\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = 0$$

现在令 $n \rightarrow \infty$, 则点列 $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ 收敛于 $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$, 因此我们得到: v 对于 y 的各阶导数在 $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ 处为零. 因为 ϕ 在那里无穷阶地消失, 因此对 (2.8) 重复求导数即得: v 的所有导数在 $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ 处为零. 因而 w 的所有导数在 $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ 处也为零. 然而, 当 $x > 0$ 时方程 $Pw = 0$ 是椭圆的, 因此正如我们第 1 节中所描述的, 解 w 在 $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ 的一邻域中是适当的局部坐标的全纯函数. 因而, 当 $x > 0$ 时有

$$w(x, y) \equiv w\left(\frac{1}{m}, 0\right)$$

类似地, 我们看到, 当 $x < 0$ 时有 $w(x, y) = \text{常数}$, 这样, 由连续性, 在 D 中 $w(x, y) \equiv \text{常数}$. 证毕.

问题 1 这个例子导致一个奇怪的唯一性问题, 在圆盘 $D_j^{m,n}$ 的任一个中, 函数 u, v 满足耦合的 (coupled) 椭圆组

$$\begin{cases} u_x + ixu_y = -ix^2 \phi v_y \\ v_x + ixv_y = -ix^2 \phi u_y \end{cases}$$

并且, u 及其所有导数在圆盘的边界上为零. 鉴于在此圆盘中 $\phi > 0$ 这一事实, 我们能否证明: 在此圆盘中 $u \equiv 0$ 和 $v \equiv \text{常数}$? 注意, 如果 $\phi \equiv 0$, 则回答是否定的, 因为此时 $u \equiv 0$, 而 v 可以是 $v_x + ixv_y \equiv 0$ 的任何解.

问题 2 对于那些可以变为 $\frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y}$ 的 (非零) 倍数的一阶算子, 是否有某种刻画它们的方法?

我怀疑问题 2 会有肯定的答案; 我不相信我们可以通过有限个不变量来刻画这些算子. 因为如果 (2.2) 中的 ρ 是实解析的, 那么, 根据 Cauchy - Kowalewski 定理, 在原点的一个邻域中存在一个使得 $w(0, y) = iy$ 的 $Pw = 0$ 的解 w . 因此, $w_x = (0, y) = 0, w_{xx}(0, y) = \rho$. 但是, $\sqrt{2\operatorname{Re} w}$ (带有依赖于 x 的 $\pm$) 和 $\operatorname{Im} w$ 可作为新的自变量被引入, 此时 P 取为所要求的简单的形式.

3. 高维空间中的齐次方程

现在转到坐标为 x, y, t 的三维的情形; 令

$$x + iy = z = re^{i\theta}$$

我们将构造一个在原点的一邻域中使 $P_1, P_2, [P_1, P_2]$ 线性无关的算子 $P = P_1 + iP_2$, 并使得, 如果 w 是 $Pw = 0$ 在原点的一邻域中的 C^∞ 解, 则 w 的各阶导数在原点处为零. 这个例子否定地回答了第 8 页上的一个问题①.

在 r, t 平面中, 对于所有的正整数 k, n, j , 令 $B_{k,j}^n, D_{k,j}^n$ 是圆心在正 r 轴上的闭圆盘, 它们两两不交, 且对固定的 k, n , 它们满足:

(i) 对于 $B_{k,j}^n$ 中或 $D_{k,j}^n$ 中 ($j = 1, 2, \dots$) 任意的 (r, t) , 有 $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{(n-1)}$;

(ii) 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $B_{k,j}^n$ 和 $D_{k,j}^n$ 的圆心的 r 坐标递减于 $\frac{1}{n}$.

对于这些圆盘的这样给出的分布, 令 $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ 是非负 C^∞ 函数, 使得 $\tilde{\phi}$ 在每个 $B_{k,j}^n$ 的内部是正的, 在 $B_{k,j}^n$ 的并集的外部恒等于零; 同时, $\tilde{\psi}$ 在每个 $D_{k,j}^n$ 的内部是正的, 在 $D_{k,j}^n$ 的并集的外部恒等于零. 对于 $k = 1, 2, \dots$, 令 P_k (相应的, Q_k) 表示 $\cup_{n,j} B_{k,j}^n$ (相应的, $\cup_{n,j} D_{k,j}^n$) 的特征函数, 并令 $\phi_k = e^{-k^2} P_k \tilde{\phi}, \psi_k = e^{-k^2} Q_k \tilde{\psi}$. 注意, 函数 ϕ_k, ψ_l ($k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots$) 中的任何两个, 都不能在同一点都取正值.

我们的算子是 Lewy 例 (1.6) 的一个修改. 对于

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

有

① 最近, 作者作出了一个类似的算子 P , 在原点的任一邻域中 $w = \text{常数}$ 为它的唯一的 C^1 解. 这个算子是比较复杂的, 将在别处发表. (此例已发表: *On a question of Harts Lewy*. Usphehi Mat. Nauk Vol. 292(176), (1974), pp. 241 - 251) —— 译者注.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

我们定义 C^∞ 函数

$$\phi(x, y, t) = \sum_1^\infty z^{-k} \phi_k(r, t) \quad (3.1)$$

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{i} \sum_1^\infty z^{-k-1} \psi_k(r, t) \quad (3.2)$$

并令

$$P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + iz \frac{\partial}{\partial t} + z\phi \frac{\partial}{\partial t} + z\psi \frac{\partial}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + iz \frac{\partial}{\partial t} + z\phi \frac{\partial}{\partial t} + iz\psi \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (3.3)$$

注意,若记 $P = P_1 + iP_2$, 则算子 $P_1, P_2, [P_1, P_2]$ 在原点是线性无关的.

定理 3 若在包含原点的一个开球 B 中, w 是 $Pw = 0$ 的一个 C^∞ 解, 则它的各阶导数在原点处为零.

证明 把方程 $Pw = 0$ 用坐标 (r, θ, t) 写出, 我们得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + ir \frac{\partial w}{\partial t} + r\phi \frac{\partial w}{\partial i} + r\psi \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (3.4)$$

把 w 展开成 θ 的 Fourier 级数

$$w = \sum_{-\infty}^{\infty} w_j(r, t) e^{ij\theta}$$

并把它代入方程(3.4). 这样, 对每个整数 j , 我们得到关于 $e^{ij\theta}$ 前面的 Fourier 系数的方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w_j}{\partial r} - \frac{j}{2r} w_j + ir \frac{\partial w_j}{\partial t} + r \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(r, t) r^{-k} - \frac{\partial w_{j+k}}{\partial t} + \\ & r \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(r, t) r^{-k-1} (j+k+1) w_{j+k+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

如果我们令

$$v_j = r^{-j} w_j(r, t)$$

并用 r^{-j-1} 乘以(3.5), 则对每个整数 j , 我们就得到

$$\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} v_j + i \frac{\partial}{\partial t} v_j + \sum_1^\infty \phi_k \frac{\partial}{\partial t} v_{j+k} + \sum_1^\infty \psi_k (j+k+1) v_{j+k+1} = 0 \quad (3.6)$$

注意, 当 $j < 0$ 时有 $v_j(0, t) = 0$. 令 $\rho = r^2$, 我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) v_j + \sum_1^\infty \phi_k \frac{\partial}{\partial t} v_{j+k} + \sum_1^\infty \psi_k (j+k+1) v_{j+k+1} = 0 \quad (3.7)$$

在 (r, t) 平面中, 集合 $\Omega = B \setminus \{ (\cup B_{k,j}^n) \cup (\cup D_{k,j}^n) \}$ 是开的和连通的, 根据(3.7), 当 $\rho > 0$ 时每个函数 v_j 在 Ω 中是 $\rho + it$ 的全纯函数. 因为对于 $j < 0$,

函数 v_j 在 $\rho = 0$ 处(特别,在负 t 轴上)为零,这就得到

$$v_j \equiv 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中, } j > 0$$

因而,当 $j < 0$ 时,函数 v_j 及其各阶导数在圆盘 $B_{k,j}^n, D_{k,j}^n$ 的边界上为零. 现在考虑 $j = -1$ 的方程(3.6)(乘以 r 以后)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ir \frac{\partial}{\partial t} \right) v_{-1} + r \sum_1^\infty \phi_k \frac{\partial}{\partial t} v_{k-1} + r \sum_1^\infty \psi_k k v_k = 0 \quad (3.8)$$

我们将证明,当 $k \geq 1$ 时,函数 v_{k-1} 的一阶导数及函数 v_k ,在 B 中的点 $(\frac{1}{n}, 0)$ 处都为零.

首先,我们假设,对某个 n 和 $k \geq 1$ 有

$$\frac{\partial v_{k-1}}{\partial t} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \neq 0$$

在 $B_{k,j}^n$ (为了方便,我们用 b 表示它) 上积分(3.8)

$$\iint_b r \phi_k \frac{\partial}{\partial t} v_{k-1} dr dt = -\frac{1}{2} \iint_b \left(\frac{\partial}{\partial r} + ir \frac{\partial}{\partial t} \right) v_{-1} dr dt = 0 \quad (3.9)$$

然而,对于大的 j ,当 (r, t) 在 $B_{k,j}^n$ 的内部时, $\arg(r \phi_k (\frac{\partial}{\partial t}) v_{k-1}) (r, t)$ 接近 $\arg(\frac{\partial}{\partial t}) v_{k-1} (\frac{1}{n}, 0)$. 显然,此时(3.9)是不可能的. 因此

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{k-1} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = 0, \quad k \geq 1$$

从微分方程(3.6) 我们还得到:对于 $k \geq 1$ 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right) v_{k-1} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = 0$$

在 $D_{k,j}^n$ 上施行积分,由类似的推理得到

$$v_x \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = 0, \quad k \geq 1$$

现在令 $n \rightarrow \infty$, 则点列 $(\frac{1}{n}, 0)$ 趋于 $(0, 0)$, 因而推得:对于 $k \geq 1, v_k$ 以及 v_{k-1} 对 r 的各阶导数在 $(0, 0)$ 处为零. 从 $j \geq 0$ 时的微分方程(3.6) 得到,当 $k \geq 1$ 时, v_{k-1} 的各阶导数在 $(0, 0)$ 处为零,并且 $v_k(0, 0) = 0$. 对于 w_k , 同样的事实亦必成立;即,当 $k \geq 1$ 时, w_k 以及 w_{k-1} 的各阶导数在 $(0, 0)$ 处为零. 回忆到在 $k < 0$ 时 w_k 及其所有导数在 $(0, 0)$ 处为零,我们即看到,函数

$$w(x, y, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} w_k(r, t) e^{ik\theta}$$

的所有导数在原点为零. 证毕.

我们在定理 3 中给出的例可被略微地简化. 然而我们把它提成这样的形