普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第三册　第三版

四川大学数学学院高等数学教研室 编

（物理类专业用）

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（物理类专业用）

第三册

第三版

四川大学数学学院高等数学教研室 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材。本次修订对第二版内容进行了适当的调整，同时注重保持原书理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点。本套教材共分四册，本书是第三册，主要内容为线性代数与概率论。

本书可供高等学校物理学类、电子信息科学类、电气信息类等对数学要求较高的专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.第三册/四川大学数学学院高等数学教研室编.
—3版.—北京：高等教育出版社，2010.8
物理类专业用
ISBN 978-7-04-029231-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①四… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第119604号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 赵 阳
责任绘图 于 博 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 金 辉
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印 刷	北京外文印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1979年3月第1版 2010年8月第3版
开 本	850×1168 1/32		
印 张	12.625	印 次	2010年8月第1次印刷
字 数	320 000	定 价	19.30元

物料号 29231-00

第三版序言

由四川大学数学学院高等数学教研室编写的《高等数学》自1978年出版以来，被多所高校物理类专业广泛采用。在30年教学实践和教学改革的基础上，结合国内兄弟院校使用本教材的反馈信息及当前的实际教学需求，本次修订保持原书理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点，吸收国内外优秀教材的长处，引入题材新颖的应用例题和实际模型，例题与习题的配置更加丰富、合理、便于自学，有利于提高学生数学应用能力的培养。

在广泛征集本教材使用意见的基础上，为适应当前大学数学的教学计划，第三册删去了常微分方程的内容，并对线性代数、概率论部分进行了如下修改：

线性代数部分，采用通用符号，如矩阵的转置符号用“T”替换原版的“′”；将少数内容的顺序作了调整，如第一章末利用行列式的性质计算与拉普拉斯定理部分换序，以便学生选学；对于书中所有带编号的公式，按照章节顺序依次编号；对现行大纲外的内容，如拉普拉斯定理、酉矩阵部分，采用小字号加以区别。

概率论部分，首先，对有些记号和定义进行了替换，比如，随机变量用大写英文字母替换原版的希腊字母；公式按照章节顺序依次编号；分布函数的定义、事件的独立性的定义也有所变化。其次，进一步强调概率的思想与方法，比如，对于连续型随机变量函数的分布，本版强调掌握一般方法；第八章与第九章中有的例题在计算概率时注重用事件的运算及相应的公式来求解。

此外，对部分内容进行了增减与调整。

本套教材共分四册。第一册主要内容为函数与极限、一元函数微积分及其应用；第二册主要内容为空间解析几何与矢量代数、多元函数微积分及其应用、级数、微分方程等；第三册主要内容为线性代数、概率论；第四册主要内容为数学物理方法，包括复变函数、数学物理方程、积分变换、特殊函数等。使用本教材的各高校可按照原有教学习惯组织教学，根据教学实际情况，对加*号或小字的内容以及专业性较强的物理专业例题作灵活处理，修改后的本套教材可供对数学要求较高的其他专业数学课程教学或教学参考使用。

本套教材的修订得到四川大学教务处、四川大学数学学院和高等教育出版社的大力支持，教材编写组专门召开会议讨论修订方案；学院领导及原书作者周城璧先生、姚昌瑞先生等对本次修订提出了全面、系统的修改建议；本教材自1978年出版以来，收到许多读者来信，对内容安排、习题配备和教材中出现的错漏提出了许多宝贵的意见和建议，对确保本书质量起到了重要作用，在此谨向他们表示衷心的感谢。

本套教材第三册的修订工作由四川大学数学学院陈丽（线性代数部分）、何腊梅（概率论部分）承担，在修订过程中，得到原书作者田涛老师、杨秀清老师给予的大力支持和帮助。邹述超副教授仔细地阅读了概率论部分，并提出许多宝贵意见。在此一并表示衷心的感谢！

限于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，希望广大读者予以指正。

编　者

2010 年 3 月于四川大学

目　录

第一部分

线性代数

第一章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具, 同时它在数学的其他分支及社会经济学、物理、力学等许多科学领域中也有广泛的应用. 在初等数学中我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组时, 可以分别用二阶和三阶行列式来表示线性方程组的解与未知量的系数与常数项的关系. 推广到研究 n 元线性方程组, 需要把行列式推广到 n 阶. 因此我们把学习 n 阶行列式的定义、性质及计算方法作为本章的首要内容.

第一节 n 阶行列式的定义

§1.1.1 二、三阶行列式

为了把二、三阶行列式推广到 n 阶行列式, 我们先看看二、三阶行列式的一些共同特点, 以便给 n 阶行列式的定义提供某些依据. 为了叙述的方便, 我们将二、三阶行列式写成下面的规范形状, 并利用"对角线法则"将其展开.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.2}$$

这里我们用 a_{ij} $(i,j=1,2$ 或 $1,2,3)$ 表示位于第 i 行, 第 j 列处的数, 我们称 a_{ij} 为行列式的元, 它的第一个下标 i 称为行标, 第二个下标 j 称为列标. 从 (1.2) 易知三阶行列式有下列几个特点:

第一, 三阶行列式是 3! 个项的代数和.

第二, 它的每项都是行列式中三个元的乘积, 且它们恰好是所有位于不同行、不同列的三个元之积.

第三, 每项都带有确定的正负号, 且带正号和负号的项恰好各占一半.

我们把 (1.2) 中每项的三个因子按它们在行列式中行的顺序排列成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.3}$$

即每项三个元的行标恰好按自然数顺序排列成 123, 而三个元的列标排列成 $j_1j_2j_3$, 构成自然数 1,2,3 的一个排列. 按此方法写出 (1.2) 式中六个项的列标排列 123,231,312 和 321,213,132. 这恰好是 1,2,3 所能构成的一切排列, 共 $3!=6$ 个. 其中前面三个排列对应的项带正号, 后面三个排列对应的项带负号. 为了说明各项的符号与其列标排列的关系, 我们引入下面的术语.

定义 1　对 n 个不同正整数 (可以不必是前 n 个正整数) 的一个排列, 若某个数字的右边有 r 个比它小的数字, 则称该数字在此排列中有 r 个**逆序**. 一个排列中所有数字的逆序之和称为该排列的**逆序数**. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如

$$\begin{aligned}
\tau(31254) &= 2+0+0+1+0=3,\\
\tau(12345) &= 0,\\
\tau(315) &= 1+0+0=1,\\
\tau(n(n-1)\cdots 21) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

显然, 对任何一个排列, 最右边一个数的逆序都是零. 由 n 个不同自然数组成的一切排列 (共 $n!$ 个) 中, 唯一一个逆序数等于零的排列是按自然数由小到大的排列. 这个排列称为**标准排列**或**自然排列**. 例如 1234,2347 分别是两个标准排列.

定义 2 逆序数等于奇数的排列称为**奇排列**. 逆序数等于偶数的排列称为**偶排列**.

标准排列是偶排列.

把一个排列中某两个不同数字的位置互换, 其余的数字不动, 就得到另一个排列. 进行一次这种操作称为一次**对换**. 例如, 把排列 1324 中的 3,4 两个数字对换得到排列 1423. 这时我们看到: 经一次对换奇排列 1324 变成了偶排列 1423. 同样地, 偶排列 1423 经一次对换变成了奇排列 1324. 一般地, 有下面的结论

引理 对换改变排列的奇偶性. 即经过一次对换后, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

证 先考虑相邻两数的对换. 设 $c_1c_2\cdots c_kabd_1d_2\cdots d_l$ 为一个 n 阶排列. 对换 a 与 b 得到 n 阶排列 $c_1c_2\cdots c_kbad_1d_2\cdots d_l$. 在这两个 n 阶排列中, 除了这两个数外, 其它各数在两个排列中是否构成逆序的情况完全相同. 因此, 若 $a>b$, 则有

$$\tau(c_1c_2\cdots c_kabd_1d_2\cdots d_l)=\tau(c_1c_2\cdots c_kbad_1d_2\cdots d_l)+1,$$

而当 $a<b$ 时, 则有

$$\tau(c_1c_2\cdots c_kabd_1d_2\cdots d_l)=\tau(c_1c_2\cdots c_kbad_1d_2\cdots d_l)-1.$$

所以排列 $c_1c_2\cdots c_kabd_1d_2\cdots d_l$ 与排列 $c_1c_2\cdots c_kbad_1d_2\cdots d_l$ 的奇偶性不同.

再考虑不相邻两数的对换。设 $c_1c_2\cdots c_sae_1e_2\cdots e_rbd_1d_2\cdots d_t$ 为一个 n 阶排列, 在 a 与 b 之间有 r $(r\geqslant 1)$ 个数. 对换 a 与 b 后得到 n 阶排列 $c_1c_2\cdots c_sbe_1e_2\cdots e_rad_1d_2\cdots d_t$. 这实际上等同于先把 a 依次与右边相邻数对换, 得到排列 $c_1c_2\cdots c_se_1e_2\cdots e_rabd_1d_2\cdots d_t$, 再将 b 依次与左边相邻数对换, 得到排列 $c_1c_2\cdots c_sbe_1e_2\cdots e_rad_1d_2\cdots d_t$. 其间共进行了 $2r+1$ 次相

邻两数的对换，即排列 $c_1c_2\cdots c_sbe_1e_2\cdots e_rad_1d_2\cdots d_t$ 是由排列 $c_1c_2\cdots c_sae_1e_2\cdots e_rbd_1d_2\cdots d_t$ 改变 $2r+1$ 次奇偶性得到的，所以他们的奇偶性不同.

由数学归纳法和引理不难证明

定理 n $(n\geqslant 2)$ 个不同正整数的任一排列必可经若干次对换变成标准排列，并且对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性一致.

即奇 (偶) 排列必须经奇 (偶) 数次对换才能变成标准排列. 反过来，标准排列经奇 (偶) 数次对换得到的排列必为奇 (偶) 排列.

例如排列 $32154\xrightarrow{1,3}12354\xrightarrow{5,4}12345$，因此排列 32154 是偶排列 (对换的方法与次数不唯一).

还可证明 $n\geqslant 2$ 时,n 个不同自然数的一切排列中奇排列、偶排列各占一半 (见习题)

现在来看 (1.2) 中带正号的三项，其列标排列的逆序数

$$\tau(123)=0,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2$$

都是偶数. 三个带负号的项其列标排列的逆序数

$$\tau(321)=3,\ \tau(213)=1,\ \tau(132)=1$$

都是奇数. 这样我们就完全清楚了展开式 (1.2) 的构成规律. 现叙述如下: 三阶行列式是一切这种项 (3! 项) 的代数和，每项都是行列式中位于不同行不同列的三个元的乘积. 若把每项写成式 (1.3) 的形状，则当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时该项带正号，为奇排列时带负号，即每项带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$. 显然，二阶行列式 (1.1) 也有上述的特点.

利用上面的说明与记号，就可以把二阶行列式、三阶行列式的展开式 (1.1) 和 (1.2) 改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$