Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

简明版

概率论与数理统计

（理工类·第四版）

◎吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

简明版

概率论与数理统计

（理工类·第四版）

⊙吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（理工类·简明版）/吴赣昌主编．—4版．—北京：中国人民大学出版社，2011.7

21世纪数学教育信息化精品教材．大学数学立体化教材

ISBN 978-7-300-13964-7

Ⅰ.①概… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第124565号

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

概率论与数理统计（理工类·简明版）

第四版

吴赣昌　主编

Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http：//www. crup. com. cn		
	http：//www. ttrnet. com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京昌联印刷有限公司	版　次	2006年10月第1版
规　格	170 mm×228 mm　16开本		2011年8月第4版
印　张	15.5插页1	印　次	2011年8月第1次印刷
字　数	311 000	定　价	32.80元(配网络学习空间)

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间交流缺乏等问题，这些都是在过去“精英教育”阶段没有遇到的.

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃. 正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美结合起来.

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话："数学教育的关键是彻底转变观念."当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目标：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设.

自2000年初起，我们成立了一个由专家、教师与软件技术人员组成的研发团队，围绕上述改革目标进行攻关，2002年推出了第一个"高等数学多媒体教学系统"；2005年由中国人民大学出版社出版了12套面向普通本科院校理工类与经管类专业使用的"大学数学立体化教材"及其配套的多媒体教学系统；2007年对其修订后出版了第二版，并同时出版了面向高职高专院校和文科类专业的立体化教材及其配套的多媒体教学系统，初步完成了大学数学试题库系统与大学数学精品课程网站等信息化配套建设工作；2009年对上述教材完成了进一步的升级改版工作，并同时出版了农林类与医药类的教材，鉴于教材的立体化与信息化配套建设显著加强，为更加突出教材的特色和内涵，我们将上述系列教材统一冠名为"21世纪数学教育信息化精品教材". 令人感到欣慰的是，上述教材及其信息化建设成果已被国内数百所高等院校广泛采用，并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2009年以来，作者团队彻底突破了制约当前教育信息化建设的技术瓶颈——基于Web的公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别问题. 这一核心技术的突破使我们的各项信息化建设有了质变的跨越，集成了网页公式编辑系统（Web-FormulaEdit）与网页图形编辑系统（Web-GraphEdit）的在线答疑平台、在线测试平台、课程论坛平台、师生互动平台以及集成性的网络学习平台陆续完成并投入使用. 将这些最新研究与建设的成果及时融入上述系列教材的建设是此次升级改版的动因.

2011年，"21世纪数学教育信息化精品教材"升级改版后，共计27套各专业类别的大学数学教材，版本分别有：面向普通本科院校的"理工类·第四版"、"经管类·第四版"、"文科类·第三版"、"农林类·第二版"、"医药类·第二版"；面向三本院校或少学时类的"理工类·简明版·第四版"、"经管类·简明版·第四版"；面向高职高专院校的"理工类·第三版"、"经管类·第三版"、"综合类·第二版".

本次升级改版后的"21世纪数学教育信息化精品教材"具有以下特点：

一、在教学内容建设方面：

1. 为让读者对经典数学概念在现代科学研究中的应用有更深刻的理解和更高的视角，我们做了深入的研究和建设工作. 例如，从微分的几何意义出发，引入了

函数在某点的“线性化”定义，从定积分的微元法出发，进一步引入有限单元化的思想，而有限单元化和线性化是用数学解决复杂应用问题的基本思想方法. 不同课程教材的内容建设前后呼应，比如，在《线性代数（理工类・第四版)》第 3 章的引言中就进一步介绍了如何利用有限单元化和线性化方法来解决复杂应用问题，等等.

2. 对部分章节引言做了改进. 例如，对数列极限的概念，先从其描述性定义引入，然后以定量分析的观点进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念. 更多参考包括数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用.

3. 紧密联系实际，服务专业课程，精选了不少只涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生且学生以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题. 这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系.

4. 习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案.

5. 值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神.

二、每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友在线交流与讨论学习中遇到的问题. 网络学习空间设置了课程论坛、学习问答、软件下载、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等栏目. 该学习空间由于集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别，从而全面支持专业学科内容的网络交流与互动.

三、为每位教材用户提供配套的集成性、交互式多媒体学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块. 在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块

中，我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于读者课后学习；在综合训练模块中，我们总结了每章的教学知识点，并通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于读者综合提高；在系统的交互与集成方面，我们利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航，利于读者高效率地学习.

四、为所有教师用户提供配套的集成性、交互式与信息资源立体化的多媒体教学系统，该系统同时兼容了 Flash 和 PPT 两类课件，兼顾了共享动画演示和个性化修改功能. 内容模块中包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等；系统功能中包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能等. 如能配合遥控鼠标与手写板等外接小型设备，则既可以充分发挥信息化集成与交互教学的优势，也能够很好地融入板书教学等个性化特色.

五、配套建设了技术领先、功能实用且管理维护方便的大学数学网络学习平台，它包含自主建设、课程问答、师生互动与在线测试等模块. 此外，作者团队还建设了在线答疑平台 MathQ、试题库系统平台、课程论坛平台、教学博客平台等一系列软件平台，它们均集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持课程教学内容的网络交流与互动.

六、在教学资源建设、共享与服务方面，以作者为核心的“数苑团队”倾力建设了面向全国广大师生服务的教育门户网站——“数苑网”(www. math168. com)，旨在为广大师生提供数学教育资讯、网络教学资源、网络教学平台以及教学支持服务，打造移动学习、全民学习与终生学习的共享教育平台.

致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中，就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上，像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程，无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将受益终生.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识.

在大学数学的学习过程中，概念和计算同等重要. 只有反复、认真地阅读教材，你才能真正掌握大学数学的基本概念. 每个章节的习题中都安排了简单的计算

题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解. 在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚.

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言. 你必须像对待外语一样，每天都学习它. 为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题. 跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦.

经常登录作者团队倾力为你配套建设的网络学习空间，你将会获得意想不到的收获. 在那里，你可以进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系.

致教师

我们开发的“21 世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的信息化精品系列教材，因为在纸质教材之外，我们从教、学、考三方面为它定制了一系列配套的信息化建设，包括教学课件、备课系统、网络学习空间、网络学习平台、试题库系统、在线考试平台与在线答疑平台等. 如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请通过下面的邮箱与我们联系以取得相应的教学支持.

此外，欢迎尽早加入我们在“数苑网”建设的面向全国同行提供交流与服务的“教师空间”. 该空间将为广大教师提供教学软件下载、教学资源下载、教学研究交流以及教学研究合作等服务. 教师空间以实名制方式注册，有意愿加入的教师只需将单位、姓名与注册邮箱发送到下面的邮箱，我们便会尽快给您发送登录账户信息. 教师空间的登录账号是教师专用的 6 位数字，它也是您登录我们开发的新一代即时通讯软件 MathQ 的账号.

MathQ 是我们开发的主要面向教育学习群体、学术研究群体与工程技术人员的新一代即时通讯软件. 与同类即时通讯软件相比，该软件最大的特色是它集成了网页公式编辑系统（Web-FormulaEdit）与网页图形编辑系统（Web-GraphEdit），从而使其能全面支持人们基于文字、公式、图形、语音和视频等多种媒体进行各学科专业知识的在线交流.

经常登录作者团队倾力建设的教师空间，您将会获得意想不到的收获. 在那里，您可以进一步拓展自己的教学交流空间，获得更多的教学资源，并与全国的良师益友建立联系.

结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯（G. B. Thomas）教授精辟指

出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习.

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持. 如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：math168@vip. 188. com.

编者

2011 年 6 月 28 日

目　录

第1章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科．20世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域．本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一．

§1.1　随 机 事 件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**．

例如：(1) 一物体从高度为 h(米) 处垂直下落，则经过 t(秒) 后必然落到地面，且当高度 h 一定时，可由公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8\,(\text{米}/\text{秒}^2))$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间 $t=\sqrt{2h/g}$ (秒).

(2) 异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥，等等．

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**．

例如：(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面．

(2) 将来某日某种股票的价格是多少？等等．

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，但直到20世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法进行研究．概率论就是以数量化方法研究随机现象及其规律性的一门数学学科．

二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似乎毫无规律．然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性．人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一

门学科.

历史上，研究随机现象统计规律性最著名的试验是抛掷硬币的试验. 表1–1–1是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1–1–1　历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数(n)	正面次数(r_n)	正面频率(r_n/n)
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

试验表明：虽然事先无法准确预知每次抛掷硬币将出现正面还是反面，但大量重复试验时发现，出现正面和反面的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为0.5, 并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5. 这说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果是有规律可循的，这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

要对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**试验**.

例如，观察某射手对固定目标所进行的射击；抛一枚硬币三次，观察出现正面的次数；记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为试验 . 上述试验具有以下共同特征：

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中，我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**，记为E.

三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的，我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**，它们的全体称为**样本空间**，记为S(或Ω).

例如：(1) 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中，有两个样本点：正面、反面 . 样本空间为$S=\{$正面, 反面$\}$. 若记$\omega_1=$正面, $\omega_2=$反面，则样本空间可记为

$$S=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

(2) 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无穷多个：i

($i=0,1,2,3,\cdots$)次，则样本空间可简记为

$$S=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

(3) 在一批灯泡中任意抽取一个，测试其寿命，其样本点也有无穷多个(且不可数)：$t\,(0\le t<+\infty)$ 小时，则样本空间可简记为

$$S=\{t\,|\,0\le t<+\infty\}=[0,+\infty).$$

(4) 设随机试验为从装有三个白球(记号为1, 2, 3)与两个黑球(记号为4, 5)的袋中任取两球.

① 若观察取出的两个球的颜色，则样本点为 ω_{00} (两个白球), ω_{11} (两个黑球), ω_{01} (一白一黑)，于是，样本空间为

$$S=\{\omega_{00},\omega_{11},\omega_{01}\}.$$

② 若观察取出的两球的号码，则样本点为 ω_{ij} (取出第 i 号与第 j 号球，由于球的号码不相同，我们可以假设 $i<j$), $1\le i<j\le 5$. 于是，样本空间共有 $C_5^2=10$ 个样本点，样本空间为

$$S=\{\omega_{ij}\,|\,1\le i<j\le 5\}.$$

注：此例说明，对于同一个随机试验，试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容来确定的.

四、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 事件可分为以下三类:

(1) **随机事件**：在试验中可能发生也可能不发生的事件. 随机事件通常用字母 A, B, C 等表示.

例如，在抛掷一枚骰子的试验中，用 A 表示“点数为奇数”这一事件，则 A 是一个随机事件.

(2) **必然事件**：在每次试验中都必然发生的事件. 用字母 S (或 Ω) 表示.

例如，在上述试验中，“点数小于 7”是一个必然事件.

(3) **不可能事件**：在任何一次试验中都不可能发生的事件. 用空集符号 $\varnothing$ 表示.

例如，在上述试验中，“点数为 8”是一个不可能事件.

显然，必然事件与不可能事件都是确定性事件，为讨论方便，今后将它们看作是两个特殊的随机事件，并将随机事件简称为**事件**.

五、事件的集合表示

由定义，样本空间 S 是随机试验的所有可能结果(样本点)的集合，每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以一个事件是对应于 S 中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 S 的一个子集. 于是，**任何一个事件都可以用 S 的某个子集来表示**.

我们说某事件 A 发生，即指属于该事件的某一个样本点在随机试验中出现.

例如：在抛掷骰子的试验中，样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. 于是，

事件 A:“点数为 5”可表示为 $A=\{5\}$;

事件 B:“点数小于 5”可表示为 $B=\{1,2,3,4\}$;

事件 C:“点数为小于 5 的偶数”可表示为 $C=\{2,4\}$.

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**；含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**. 显然，样本空间 S 作为事件是必然事件，空集 $\varnothing$ 作为一个事件是不可能事件.

六、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个子集，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理. 下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义.

(1) 若 $A\subset B$, 则称事件 B **包含**事件 A, 或事件 A **包含于**事件 B, 或 A 是 B 的子事件. 其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，$\varnothing\subset A\subset S$.

(2) 若 $A=B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**. 其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即 $A\subset B$, 且 $B\subset A$.

(3) 事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和**(或**并**). 其含义是：当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 有时也记为 $A+B$.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**和事件**，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**和事件**.

(4) 事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积**(或**交**). 其含义是：当且仅当事件 A, B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. 事件 $A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积事件**，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**积事件**.

(5) 事件 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差**. 其含义是：当且仅当事件 A 发生，且事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

例如，在抛掷骰子的试验中，记事件

A:“点数为奇数”，B:“点数小于 5”，

则 $\quad A\cup B=\{1,2,3,4,5\};\quad A\cap B=\{1,3\};\quad A-B=\{5\}$.

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称是**互斥**的. 其含义是：事件 A 与事件 B 不能同时发生.

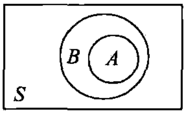
例如，基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 其含义是：对每次试验而言，事件 A、B 中有且仅有一个发

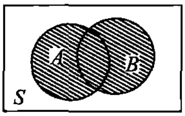
生．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$．于是，$\overline{A}=S-A$．

注：两个互为对立的事件一定是互斥事件；反之，互斥事件不一定是对立事件．而且，互斥的概念适用于多个事件，但是对立概念只适用于两个事件．

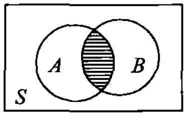
事件的关系与运算可用以下维恩图形象表示．



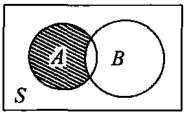
$A\subset B$



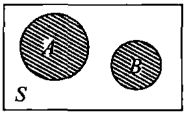
$A\cup B$ 或 $A+B$



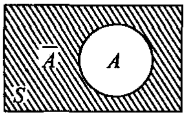
$A\cap B$ 或 AB



$A-B$



$A\cap B=\varnothing$



$\overline{A}=S-A$

注：易见，事件的运算满足如下基本关系：

① $A\overline{A}=\varnothing$； $A\cup\overline{A}=S$； $\overline{A}=S-A$．

② 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$．

③ $A-B=A\overline{B}=A-AB$； $A\cup B=A\cup(B-A)$．

(8) 完备事件组

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是有限或可数个事件，若其满足：

① $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i, j=1, 2, \cdots$；

② $\bigcup\limits_i A_i=S$，

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个**完备事件组**，也称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是样本空间 S 的一个**划分**．

显然，$\overline{A}$ 与 A 构成一个完备事件组．

七、事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律．设 A, B, C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

注：上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 1 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 A –“甲中靶”，B –“乙中靶”，C –“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1)“甲未中靶”：$\overline{A}$；

(2)“甲中靶而乙未中靶”：$A\overline{B}$；

(3)“三人中只有丙未中靶”：$AB\overline{C}$；

(4)“三人中恰好有一人中靶”：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5)“三人中至少有一人中靶”：$A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$；

(6)“三人中至少有一人未中靶”：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(7)“三人中恰有两人中靶”：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(8)“三人中至少两人中靶”：$AB\cup AC\cup BC$；

(9)“三人均未中靶”：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(10)“三人中至多一人中靶”：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(11)“三人中至多两人中靶”：$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$. ■

注：用其它事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，如上例中的 (6) 和 (11) 实际上是同一事件，读者应学会用不同方法表达同一事件，特别在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

习题 1-1

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.

2. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A,B,C 分别表示“第一次出现正面”，“两次出现同一面”，“至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A,B,C 中的样本点.

3. 掷一颗骰子，观察其出现的点数，事件 A =“偶数点”，B =“奇数点”，C =“点数小于 5”，D =“点数为小于 5 的偶数”. 讨论上述事件的关系.

4. 设某人向靶子射击三次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子”($i=1, 2, 3$)，试用语言描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$； (2) $\overline{A_1\cup A_2}$； (3) $(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

5. 判断下列各式哪个成立，哪个不成立，并说明为什么.

(1) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$； (2) $(A\cup B)-B=A$； (3) $A(B-C)=AB-AC$.

6. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别？举例说明.

7. 设 A、B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系.

8. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

9. 证明：$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.