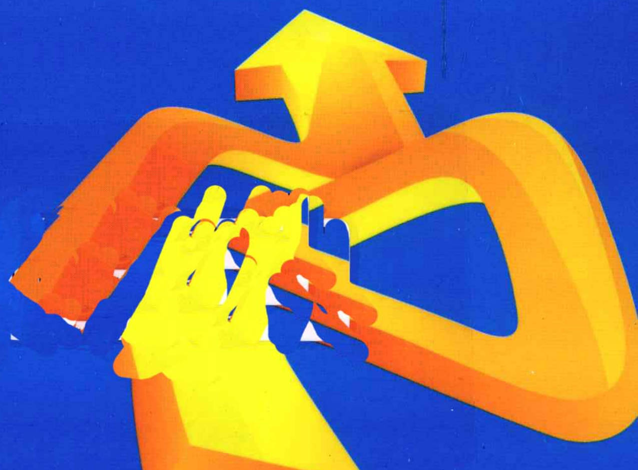
数学奥赛辅导丛书

第二辑

重要不等式

Zhongyao Budengshi

蔡玉书 编著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书·第二辑

重要不等式

蔡玉书 编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

重要不等式/蔡玉书编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2011.4(2011.4 重印)
(数学奥赛辅导丛书·第二辑)
ISBN 978-7-312-02774-1

Ⅰ.重… Ⅱ.蔡… Ⅲ.代数课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 032501 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
合肥现代印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本:880mm×1230mm 1/32 印张:5.625 字数:120 千
2011 年 4 月第 1 版 2011 年 4 月第 2 次印刷
定价:13.00 元

前　言

这是一本介绍重要不等式的小册子.

笔者曾应《中等数学》杂志社的邀请,写过两篇竞赛讲座:《重要不等式和不等式的证明》和《一些不等式赛题的证明方法》,也在《数学通讯》和《中学数学月刊》上发表过《均值不等式》、《柯西不等式》、《舒尔不等式》和《切比雪夫不等式》的系列讲座,2010 年暑假在江苏省数学奥林匹克夏令营中,偶遇中国科学技术大学出版社两位年轻的编辑在宣传数学奥赛辅导丛书,其中有苏淳教授的《从特殊性看问题》、《漫话数学归纳法》;单墫教授的《算两次》、《解析几何技巧》;余红兵教授的《构造法解题》;史济怀教授的《组合恒等式》. 本人就冒昧地和两位编辑讲,我想将自己对重要不等式的研究写本册子,结果得到了中国科学技术大学出版社的支持.

说实话,写这本册子,给了我很多压力,因为前面的几位作者都是大家非常熟悉的数学家,他们的书质量非常高,有的书再版了许多次,仍然供不应求. 因此我努力地向以上作者学习,从中汲取了许多宝贵经验.

数学竞赛中产生了许多不等式,不等式的证明很多无法搬用固定的方法,但是重要不等式是证明不等式的重要手段,是初

学者的入门钥匙,希望中学生能从中获得收益,也希望读者能举一反三,找到更多更好的证明.

蔡玉书

2010年11月

目　次

第1章　平均值不等式

一般地，假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是非负数，则它的算术平均值记为 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，几何平均值记为 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，调和平均值记为 $H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$，三者有如下关系：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

即 $A_n\geqslant G_n\geqslant H_n$.

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

上述不等式称为平均值不等式，其中 $A_n\geqslant G_n$ 简称为均值不等式.

它的另一种形式是：

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是非负数，则

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n$$

更一般地，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，则称

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

为 α 幂平均值，它是关于 α 单调递增的，几何平均值是 $\alpha\to 0$ 的极限.

平均值不等式的证明方法很多，由于篇幅关系这里不再

证明.

下列结论在证明不等式时经常使用,望读者熟悉:

(1) 设 a,b 是正实数,则

$$\frac{a^2}{b}-2a\geqslant -b,\quad \frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$$

(2) 设 a,b,c 是实数,则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

(3) 设 a,b 是正实数,则

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$$

(4) 设 a,b,c 是正实数,则

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

(5) 设 a,b,c 是实数,则

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

(6) 设 a,b,c 是实数,则

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c)$$

另外,由恒等式

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$

及均值不等式可得许多不等式.

下面举例说明平均值不等式在各类数学竞赛中的应用.

1.1 常数的巧换

这是均值不等式的常用技巧.

例 1 设 a,b,c 为正数,且 $a+b+c=1$,证明:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leqslant 1$$

（2000 年波兰数学奥林匹克竞赛试题）

证明 两端齐次化，证明

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leqslant(a+b+c)^2$$

即证明

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c)$$

注意到

$$a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c$$

$$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2$$

$$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$$

所以

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$$

故

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)=3abc(a+b+c)$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&\geqslant a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

结合 $a+b+c=1$，可知命题成立.

注 在不等式证明过程中两端齐次化的技巧，是常用的技巧.

例 2 设 a,b,c 为三个正实数，且 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leqslant 1$$

（2000 年中国澳门地区数学奥林匹克竞赛试题）

证明 不妨设 x,y,z 为三个正实数，使得 $x^3=a$，$y^3=b$，

$z^3=c$，则

$$xyz=\sqrt[3]{abc}=1$$

$$\begin{aligned}a+b+1&=x^3+y^3+xyz\\&=(x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz\\&\geqslant(x+y)(2xy-xy)+xyz\\&=xy(x+y+z)\\&=\frac{x+y+z}{z}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{a+b+1}\leqslant\frac{z}{x+y+z}$$

同理可得

$$\frac{1}{b+c+1}\leqslant\frac{x}{x+y+z},\quad\frac{1}{c+a+1}\leqslant\frac{y}{x+y+z}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\\&\leqslant\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}\\&=1\end{aligned}$$

注 本题的证明关键是将分母中的常数 1 用 $\sqrt[3]{abc}$ 代替.

1.2 元素的巧选

均值不等式应用的最大技巧就是元素的选取，元素的选取一方面取决于不等式等号成立的条件，一方面要恰到好处.

例 3 已知 a,b,c 是正数，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

(1967 年国际数学奥林匹克(IMO)预选题)

证明 由均值不等式得

$$3a^8+3b^8+2c^8\geqslant 8a^3b^3c^2$$

同理可得

$$2a^8+3b^8+3c^8\geqslant 8a^2b^3c^3$$

$$3a^8+2b^8+3c^8\geqslant 8a^3b^2c^3$$

相加整理得

$$\begin{aligned}a^8+b^8+c^8&\geqslant a^3b^3c^2+a^2b^3c^3+a^3b^2c^3\\&=a^3b^3c^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

例 4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,证明:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

证明 由均值不等式得 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,所以 $\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant\frac{1}{n^n}$,考虑到等号成立的充要条件是

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$$

所以,将 $\frac{1}{a_k}$ 拆成 n 个 $\frac{1}{na_k}$ 的和,并利用均值不等式得

$$1+\frac{1}{a_k}=1+\frac{1}{na_k}+\frac{1}{na_k}+\cdots+\frac{1}{na_k}$$

$$\geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{na_k}\right)^n} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

将 n 个不等式相乘得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\geqslant (n+1)^n\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n}$$

$$\geqslant (n+1)^n\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n^n}\right)^n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

等号成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$.

取 $n=2$,不妨设 x 和 y 是正实数,且 $x+y=1$,则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$$

(第 3 届加拿大数学奥林匹克竞赛试题)

例 5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,n 是正整数,证明不等式:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_1+x_2+\cdots+x_i)\geqslant\sqrt{(n+1)^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}$$

(2007 年俄罗斯数学奥林匹克竞赛试题)

证法 1 由均值不等式得

$$\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}=\frac{(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_n}{2}$$

$$\geqslant\sqrt{(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})x_n}$$

所以

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\geqslant 2^2(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})x_n \qquad ①$$

且

$$\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{3}$$

$$=\frac{\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}}{2}+\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}}{2}+x_{n-1}}{3}$$

$$\geqslant\sqrt[3]{\left(\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}}{2}\right)^2 x_{n-1}}$$

所以

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^3 \geqslant \frac{3^3}{2^2}(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2})^2 x_{n-1} \qquad ②$$

同理

$$\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}}{4}\geqslant\sqrt[4]{\left(\frac{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-3}}{3}\right)^3 x_{n-2}}$$

所以

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2})^4 \geqslant \frac{4^4}{3^3}(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-3})^3 x_{n-2}$$

$$\cdots\cdots \qquad ③$$

$$(1+x_1+x_2)^n \geqslant \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}(1+x_1)^{n-1}x_2 \qquad (n-1)$$

$$(1+x_1)^{n+1} \geqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}x_1 \qquad (n)$$

将上述 n 个不等式相乘得

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_1+x_2+\cdots+x_i)\right)^2 \geqslant (n+1)^{n+1}x_1x_2\cdots x_n$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_1+x_2+\cdots+x_i) \geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}$$

证法 2 设

$$y_1=\frac{x_1}{1+x_1}$$

$$y_2=\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)}$$

$$y_3=\frac{x_3}{(1+x_1+x_2)(1+x_1+x_2+x_3)}$$

……

$$y_n=\frac{x_n}{(1+x_1+\cdots+x_{n-1})(1+x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n)}$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}$$

则

$$\begin{aligned}
&y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n+y_{n+1}\\
&=\frac{x_1}{1+x_1}+\left(\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_1+x_2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{1+x_1+x_2}-\frac{1}{1+x_1+x_2+x_3}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{1+x_1+x_{n-1}}-\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}\right)\\
&\quad+\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}\\
&=1
\end{aligned}$$

由均值不等式得

$$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n+y_{n+1}\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{y_1y_2y_3\cdots y_ny_{n+1}}$$

即

$$1\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{y_1y_2y_3\cdots y_ny_{n+1}}$$

$$=(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{x_1x_2x_3\cdots x_n}{\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_1+x_2+\cdots+x_i)\right)^2}}$$

也就是

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_1+x_2+\cdots+x_i)\geqslant\sqrt{(n+1)^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}$$

例 6 设 a，b，c 为正数，且 $a+b+c=3$，证明：

$$abc(a^2+b^2+c^2)\leqslant 3$$

（2010 年保加利亚数学奥林匹克竞赛试题）

证法 1 $9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)3abc(a+b+c)}$$

$$=3\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)9abc}$$

于是

$$abc(a^2+b^2+c^2)\leqslant 3$$

证法 2 设 $x=a+b+c$，$y=ab+bc+ca$，$z=abc$，则

$$y^2\geqslant 3zx$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned}x^5+162yz&=x^5+81yz+81yz\\&\geqslant 3(x^5\cdot 81yz\cdot 81yz)^{\frac{1}{3}}\\&=3(x^5\cdot 3^8y^2\cdot z^2)^{\frac{1}{3}}\\&\geqslant 3(x^5\cdot 3^8\cdot 3zx\cdot z^2)^{\frac{1}{3}}\\&=3(3^9\cdot x^6z^3)^{\frac{1}{3}}\\&=81x^2z\end{aligned}$$

所以

$$x^5 \geqslant 81z(x^2-2y)$$

即

$$(a+b+c)^5 \geqslant 81abc(a^2+b^2+c^2)$$

由于

$$a+b+c=3$$

所以

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leqslant 3$$

1.3 项的巧拆

为了利用各种推论解题，有时需将不等式中的项进行分拆，目的是为了用好各种平均值不等式. 如平方平均与算术平均、算术平均与几何平均等关系.

例 7 设 x,y,z 为正数，求证：

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(yz+zx+xy)} \leqslant \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

(1997 年中国香港地区数学奥林匹克集训队试题)

证明 先把不等式的左边化成平均的形式.

$$\begin{aligned}
左边 &= \frac{x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \\
&= \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}
\end{aligned}$$

令