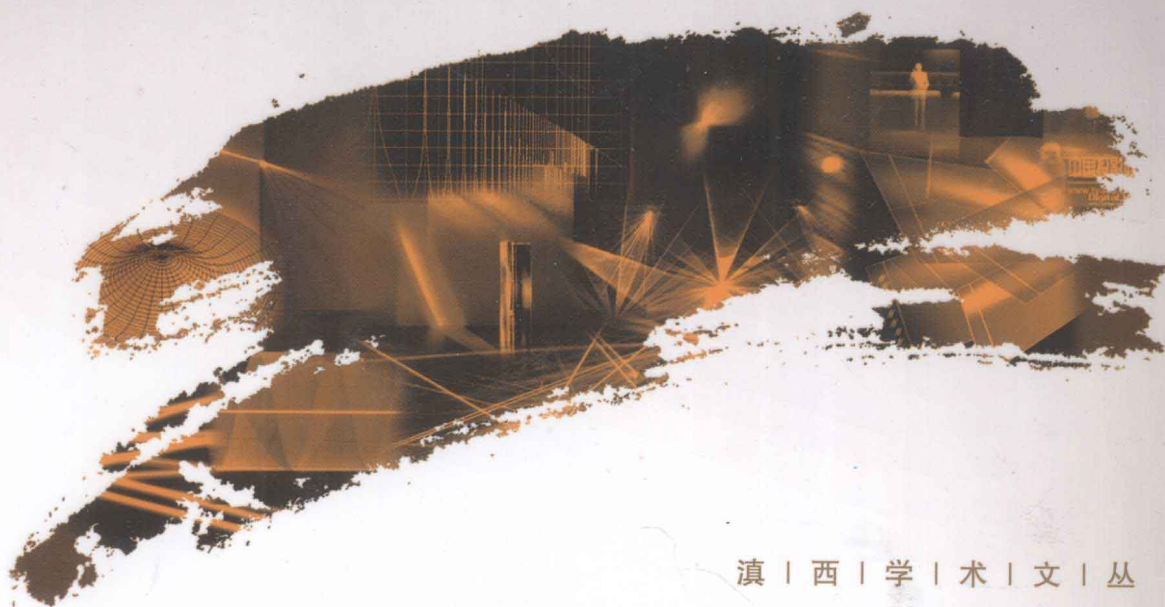




滇 | 西 | 学 | 术 | 文 | 丛

© 刘有菊
著

有限孔径的 衍射

云南大学出版社
Yunnan University Press

滇 | 西 | 学 | 术 | 文 | 丛

◎ 刘有菊
著

有限孔径的 衍射

云南大学出版社
Yunnan University Press

图书在版编目 (CIP) 数据

有限孔径的衍射 / 刘有菊著. —昆明: 云南大学出版社, 2010

(滇西学术文丛)

ISBN 978-7-5482-0330-8

I. ①有… II. ①刘… III. ①光衍射—研究 IV. ①0436.1

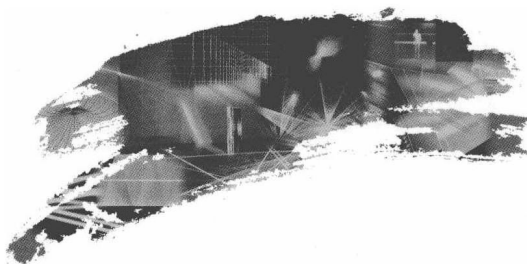
中国版本图书馆CIP数据核字 (2011) 第000667号

策划编辑: 徐 曼

责任编辑: 徐 曼

朱光辉

封面设计: 刘 雨



有限孔径的衍射 刘有菊 著

出版发行: 云南大学出版社

印 装: 云南科技印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 7.5

字 数: 183千

版 次: 2011年1月第1版

印 次: 2011年1月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5482-0330-8

定 价: 25.00元

社 址: 昆明市翠湖北路2号云南大学英华园内

邮 编: 650091

电 话: (0871) 5033244 5031071

网 址: <http://www.ynup.com>

E-mail: market@ynup.com

《滇西学术文丛》总序

蒋永文

保山学院的前身为保山师范高等专科学校，地处气候宜人、风景秀丽、历史悠久的滇西重镇保山，是一所建校已有30年，主要为拥有1100万人口的滇西7个州市培养中小学师资的地方师范院校。长期以来，在艰苦的条件下，为该区域培养了上万名中小学教师和各行业建设者，为祖国西部边疆少数民族地区的教育发展作出了应有的贡献。2009年4月，学校被教育部批准为保山学院。这使我们站在了一个新的历史起点上，有了一个更为广阔的发展空间。

大学肩负着创造知识和传播知识的重任。学术是支撑大学的精髓，学科是构筑大学的基石，学者是大学精神的化身。教学与科研相统一是大学的基本理念。科研和教学是彼此促进的。在教学中，可以激发灵感，开阔思路，发现研究课题；而研究成果又可以丰富教学内容，促进教学质量的提高，二者相得益彰。为了给滇西地区提供更好的高等教育资源，保山学院必须建立一支热爱教育事业，业务过硬，高水平、高质量的教师队伍。为此，学校以重点学科建设为龙头，以形成科研特色，增强科研实力，提高效益为目标。学校近几年采取了资助科研立项、奖励科研成果、出版学术论文等措施，来不断提高广大教师的教学水平和科研水平，已收到了较好的效果。为更好地为广大教师提供出版学术论著的园地，学校决定继续出版《滇西学术文丛》，出版学术水平较高的著作。相信《滇西学术文丛》的出版，一定会对保山学院科学研究的深入、学科建设和学科带头人、骨干教师的培养产生积极的影响。

辽阔的天空，允许大鹏展翅高飞，也允许小鸟上下蓬蒿。广袤的大地，允许参天大树生长，也允许无名小草成长。我们是小鸟，我们是小草，这套丛书，远非成熟完美，作者水平也还需要不断提高。我们期待着批评和指教。我们会做得越来越好。

2009年5月

前 言

目前,光滤波技术、激光测距和激光准直技术、成像技术、远程通信和光学信息处理技术、光全息技术等涉及有限孔径的衍射、选频、成像的问题。本书用波前相因子分析法,对有限孔径的近场和远场进行分析,为光滤波技术、成像技术和光学信息处理技术等提供理论基础,并用 MATLAB 对衍射场进行模拟,使问题更加直观。

波动光学中衍射场问题是很复杂的,以往对衍射场的研究都是针对某种衍射屏的衍射场进行研究;有些研究为避免复杂的数学计算,通常不引进基尔霍夫衍射公式,而是选用一些近似的方法来处理问题,如用半波带法和矢量法定性或半定量地进行研究,因此有一些定量的结果无法得到;多数研究是对远场衍射进行讨论,而对近场讨论得很少。本书是基于惠更斯—菲涅耳原理,用波前相因子分析法对有限孔径衍射屏的近场和远场衍射进行研究,得出描述衍射场的相关物理量及数值模拟。

本书共分为五章:第一章,光波;第二章,傅里叶变换;第三章,贝塞尔函数;第四章,波前相因子分析法;第五章,有限孔径衍射屏的衍射。

本书内容对光滤波技术、激光测距和激光准直技术、光成像技术、远程通信和光学信息处理技术、光全息技术等有一定的指导意义,可为从事光学及光谱学的人员提供一定的参考,也可作为光学及光技术专业学生的学习参考书。

笔者衷心地感谢在本书编写过程中给予帮助的各位老师及在编写本书时所参阅的大量文献的作者。同时,笔者衷心希望广大读者对本书提出宝贵的意见和建议。

目 录

第一章 光 波	(1)
第一节 光是一种电磁波	(1)
第二节 定态波	(3)
第三节 光的衍射	(6)
第二章 傅里叶变换	(9)
第一节 傅里叶级数	(9)
第二节 周期函数的物理变量	(12)
第三节 频 谱	(14)
第四节 傅里叶级数的扩展	(16)
第五节 傅里叶变换	(19)
第六节 屏函数与傅里叶级数展开	(21)
第三章 贝塞尔函数	(24)
第一节 Γ 函数	(24)
第二节 贝塞尔微分方程	(25)
第三节 第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$	(27)
第四章 波前相因子分析法	(35)
第一节 波 前	(35)
第二节 衍射屏的屏函数	(37)
第三节 相因子分析法	(41)

第五章 有限孔径衍射屏的衍射	(44)
第一节 用波前相因子分析法分析单缝夫琅禾费衍射	(44)
第二节 圆孔的夫琅禾费衍射	(48)
第三节 矩孔的夫琅禾费衍射	(52)
第四节 圆环光阑的夫琅禾费衍射	(58)
第五节 余弦光栅的衍射	(61)
第六节 条形余弦光栅的衍射	(68)
第七节 波带片的衍射	(74)
第八节 复合型余弦光栅衍射场	(80)
第九节 分析组合型余弦光栅的衍射场	(88)
附 录	(95)
附录 A 贝塞尔函数 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表	(95)
附录 B $F \frac{J_1(x)}{x}$ 表	(97)
附录 C $\frac{\sin x}{x}$ 表	(98)
附录 D e^x 和 e^{-x} 表	(100)
参考文献	(111)

第一章 光 波

第一节 光是一种电磁波

一、光是特定波段的电磁波

光是一种特定波段的电磁波，可见光的波长在 $380 \sim 760 \text{ nm}$ ，相应的光频约为 $8 \times 10^{14} \sim 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 。虽然在整个电磁波谱中光波仅占很窄的波段，但它对人类的生命和生存、人类社会的进程和发展有着巨大的作用和影响。

二、光波的主要电磁性质

光的电磁理论全面地揭示了光波的主要性质。首先，光扰动是一种电磁扰动。其次，光波是一种电磁波，可以在真空中传播，且传播速率与电磁波相同。再次，由实验证明，光波具有偏振性质，即光波是横波。

1. 光扰动是一种电磁扰动

光扰动是一种电磁扰动，光扰动随时间变化和空间分布的变化规律遵从麦克斯韦电磁场方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中： ϵ_r 是介质的相对介电常数， ϵ_0 是真空中介电常数， μ_r 是介质的相对磁导率， μ_0 是真空中磁导率， $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 表示电场强度矢量， $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 表示磁场强度矢量。这是麦克斯韦方程组在均匀介质中的表现形式，这里没有自由电荷，也没有传导电流，人们称其为自由空间。

2. 光波是一种电磁波

按矢量场的运算规则，由方程组(1.1)可推导出以下方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

这里的 ∇^2 称拉普拉斯算符,此式是波动方程的标准形式。由上式可以看出在自由空间交变电磁场的运动和变化具有波动的形式,从而说明光是一种电磁波。

3. 光是横波

平面电磁波是自由空间电磁波的基元成分,其波函数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_E) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_H) \end{aligned} \quad (1.3)$$

(1.3)式满足(1.2)式,其中 $\mathbf{k}$ 称作波矢,其方向与等相面正交,即 $\mathbf{k}$ 指向波法线方向,其大小与平面波波长的关系为:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.4)$$

将(1.3)式代入 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$,可以得到 $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$,这说明电磁场振荡方向与波矢方向正交,且沿等相面的切线方向传播,在与波矢正交的横平面中振动,如图1.1和图1.2所示。换言之,自由空间中光波是横波。

4. 电场与磁场之间的正交性和同步性

将平面波函数代入旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$,可以导出:

$$\mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{E} \quad (1.5)$$

进而得到:

$$\mathbf{H} \perp \mathbf{E}, \quad \varphi_H = \varphi_E, \quad \sqrt{\mu_r \mu_0} \mathbf{H}_0 = \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (1.6)$$

(1.6)式说明振荡着的电场与磁场彼此之间在方向上是时时正交的。 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ 三者方向构成右手螺旋的关系(如图1.2所示),即 $\mathbf{H} \times \mathbf{E} // \mathbf{k}$ 。

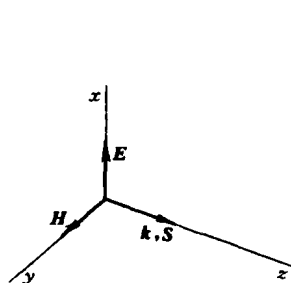


图 1.1 光的横波性

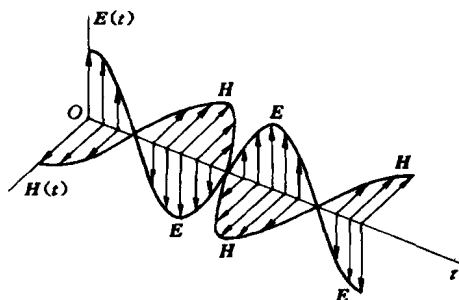


图 1.2 光波场中 E, H 变化的同步性

5. 光波的能流密度

光波的传播伴随着能量的传输,即光波携带能量从光源向外辐射。其能流密度矢量为:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

可简写成:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.7)$$

$\mathbf{S}$ 称为坡印亭矢量,其单位是 W/m^2 。

三、光 强

对于光波,其频率极高,难以观测其瞬时能流密度值,只能观测其平均能流密度值 $\bar{\mathbf{S}}$ 。在光学中平均能流密度称光强,记为 I 。

$$\begin{aligned} I = \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \mathbf{H} dt \quad (\text{利用 } \mathbf{E}, \mathbf{H} \text{ 的正交性}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \mathbf{E}_0^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

考虑到在光频段,介质分子的磁化机构几乎冻结,磁导率 $\mu_r \approx 1$, 折射率 $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$, 故光强与电磁场振幅的关系表示为:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \mathbf{E}_0^2 \propto n \mathbf{E}_0^2 \quad (1.9)$$

如果在同一介质中研究光强的空间分布,人们干脆用 $I = \mathbf{E}_0^2$ 来度量光强,即以相对光强表示光强的分布和变化。如果在不同介质中比较光强,由(1.8)来决定,此式表明光能流密度的平均值不仅正比于光波电场强度矢量振幅的平方,而且正比于介质的折射率。

第二节 定态波

一、定态波

扰动在空间的传播形成波动,扰动同时到达的空间各点形成一个等相面。按等相面的形貌特征可将波动分为平面波、球面波和柱面波;按时间尺度来衡量可分为定态波与脉冲波。定态波振动如图 1.3(a)所示,具有两个特点:①频率单一;②振幅稳定。与定态波相比较而存在的是脉冲波,如图 1.3(b)所示。对于可见光,其周期 $T \approx 10^{-14} \text{s} = 10 \text{fs}$,从微观时间尺度来看,普通光源一次持续发光时间的数量级约为 $\tau \approx 10^{-8} \text{s}$,这相当于激发了一个内含 10^6 个周期的长波列,在这种情况下可把普通光源发出的光视为定态波。

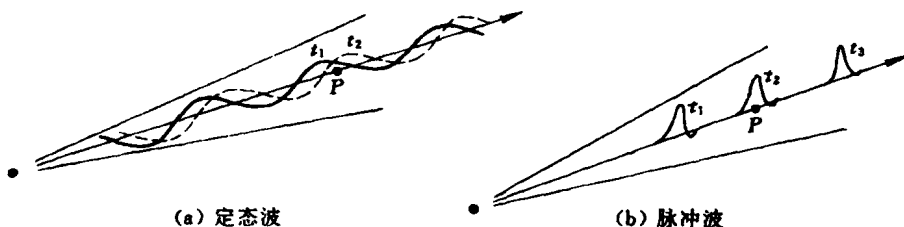


图 1 3 波动图像

二、定态波的标量表示

光波涉及两个交变矢量场 $\mathbf{E}(p, t)$, $\mathbf{H}(p, t)$ 的变化和分布。鉴于 $\mathbf{E}(p, t)$ 与 $\mathbf{H}(p, t)$ 之间在相位、振幅和偏振方向上有确定的关系, 允许选其一为代表作为光矢量。因 $\mathbf{E}(p, t)$ 在光与物质相互作用过程中起主要作用, 如光合作用、视觉效应、光电效应和光热效应等等, 其中发生的物理过程主要是电场与分子、原子或电子的作用, 又因为光频极高, 介质的磁化机构几乎被冻结, 因此, 光波的传播可用电矢 $\mathbf{E}(p, t)$ 来描述。

再考量到 $\mathbf{E}(p, t)$ 有三个分量 (E_x, E_y, E_z) , 各个分量遵从的是同一形式的波动方程, 如 E_x , 其波动方程可写成:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

于是, 可选择其中一分量作为代表, 将矢量波动方程形式转化为标量波动方程式:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

其中标量符号 U , 可以理解为电场矢量中的任一分量。标量波的处理方法适用于很多场合, 比如论述光波叠加的相干条件、偏振光学等问题时, 可用标量波进行分析处理。当选择简谐波为定态光波的基元成分时, 其标量波函数的一般形式为:

$$U(p, t) = A(p) \cos(\omega t - \varphi(p)) \quad (1.12)$$

上式体现了定态波振幅稳定、频率单一的特点。虽然振幅 $A(p)$ 不随时间改变, 却可能是场点 p 的位置函数, 相位函数 $\varphi(p)$ 自然随位置的改变而改变。

三、定态波的复数表示

为了运算和理论分析上的方便, 常将简谐波函数的标量形式变换成为复数形式, 两者的对应关系是:

$$U(p, t) = A(p) \cos(\omega t - \varphi(p))$$

对应:

$$\tilde{U}(p, t) = A(p) e^{\pm i(\omega t - \varphi(p))}$$

即复数的模对应振幅, 复数的辐角对应正相位 $\omega t - \varphi(p)$ 或 $-(\omega t - \varphi(p))$, 可以自由选择, 本书选择后者。下面是两种典型波复数形式:

平面简谐波: $U(r, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_0)$

$$\tilde{U}(r, t) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0) \quad (1.13)$$

球面简谐波: $U(\mathbf{r}, t) = \frac{a_1}{r} \cos(\omega t \pm kr - \varphi_0)$

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, t) = \frac{a_1}{r} e^{\pm ikr} \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0) \quad (1.14)$$

对于球面波, 可以引入局域波矢 $\mathbf{k}$, 代表 P 点及其邻近小面元的法线方向或能流方向。对于发散球面波, 场点 P 的位矢 $\mathbf{r}$ 与波矢 $\mathbf{k}$ 平行, 故 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr$; 对于会聚球面波, 场点 P 的位矢 $\mathbf{r}$ 与波矢 $\mathbf{k}$ 反平行, 故 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = -kr$ 。

在波函数表达式中振幅的空间分布 $A(p)$ 和相位的空间分布 $\varphi(p)$ 是我们关注的, 因为它们体现了定态波的主要特征。为此引入了复振幅的概念, 定义为:

$$\tilde{U}(p) = A(p) e^{i\varphi(p)} \quad (1.15)$$

由(1.13)式得平面波复振幅表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p) &= A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= A e^{ik(\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z)} \end{aligned}$$

可见平面波复振幅具有两个特点: 振幅为常数, 与场点位置无关; 相位分布是场点位置的线性函数, 简称为线性相因子。而线性相因子系数 (k_x, k_y, k_z) 或 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 与面平波的传播方向一一对应。这里 (k_x, k_y, k_z) 是平面波特征矢量 $\mathbf{k}$ 的三个分量, 于是:

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.16)$$

当在复杂波场的理论分析中, 一旦出现常数振幅且带有线性相因子的复振幅成分, 便可断定它代表着一种平面波成分, 其传播方向可由相因子的线性系数来确定。

由(1.14)式得发散球面波和会聚球面波的复振幅表达式为:

$$\tilde{U}(p) = \frac{a_1}{r} e^{\pm ikr} = \frac{a_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{\pm ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.17)$$

其中, 相因子的 $\pm$ 号是反映了球面波的聚散性, $+$ 号对应于发散球面波, $-$ 号对应于会聚球面波。

轴外点源是更为一般的情况。在直角坐标系中, 场点 $p(x, y, z)$, 设点源 $Q(x_0, y_0, z_0)$, 于是球面波复振幅表达式为:

$$\tilde{U}(p) = \frac{a_1}{r} e^{\pm ikr}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (1.18)$$

其中, 相因子的 $+$ 号对应于发散球面波, $-$ 号对应于会聚球面波, 聚散中心位置为 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 。

当理论上知道了复振幅函数 $\tilde{U}(p)$, 就可以获得可观测量光强的空间分布:

$$I(p) = \tilde{U}(p) \cdot \tilde{U}^*(p) = A^2(p) \quad (1.19)$$

这里的 $\tilde{U}^*(p)$ 是 $\tilde{U}(p)$ 复共轭, 有:

$$\tilde{U}^*(p) = A(p) e^{-i\varphi(p)} \quad (1.20)$$

第三节 光的衍射

一、光的衍射

当光波遇到障碍物时,将或多或少地偏离几何直线而绕行,这种现象统称为光的衍射。衍射使光强可以波及几何阴影区内,衍射也可以使几何照明区内出现暗纹或暗斑,总之,衍射效应使屏障以后的空间光强重新分布,既区别于几何光学给出的光强分布,又区别于光波自由传播时的光强分布,衍射光强有了一种新的分布形状。实际上,波动的传播过程,无论是在自由空间,还是在有界空间,均有衍射现象伴随。从严格意义上讲,衍射是波动在传播过程中其波面受到限制的必然结果,而不单纯是一种边缘效应。

任何一个光学系统,都是一个有界的光波场传输系统,因而都存在衍射现象。衍射现象具有两个鲜明的特点:一是当光束在衍射屏上的某一方位受到限制,则远处屏幕上的衍射光强就沿该方向扩展开来,即波具有顽强的反限制的行为特征;二是光孔线度与波长之比直接决定着衍射效应的强弱程度。这大致可分为三个等级(其中 ρ 为光孔线度, λ 为光波长):

(1) $\rho > 10^3 \lambda$, 衍射效应很弱,衍射现象不是很明显,光近似于直线传播。不过,边缘的衍射效应仍不可忽略。即使在光孔线度远大于光波波长的情形下,几何界失去明锐的边缘。

(2) $10^3 \lambda > \rho > \lambda$, 衍射现象显著,出现与光孔形状对应的衍射图样。

(3) $\rho < \lambda$, 衍射效应过于强烈,衍射现象十分明显,向散射过渡。

其中最令人感兴趣的是(2),这不仅因为它展现了一幅幅多姿多彩的衍射图样,可供人们观赏,而且更为重要的是这些图样与衍射屏结构一一对应,结构越细微,相应的衍射图样越扩大。

其实,以上对衍射程度三个等级的划分,可以用一个公式来理解。参见图 1.4 所示的光衍射实验——光波长为 λ 的激光束被宽度为 ρ 的狭缝所限制,在远处接收屏上出现了衍射图样,其中心衍射斑的角宽度为 $\Delta\theta$ (从狭缝处起算),也称其为衍射发散角,它体现了衍射效应强弱的程度。实验发现三者的关系为:

$$\rho \cdot \Delta\theta \approx \lambda \quad (1.21)$$

(1.21)式说明光孔线度与衍射程度之间是反比例关系。

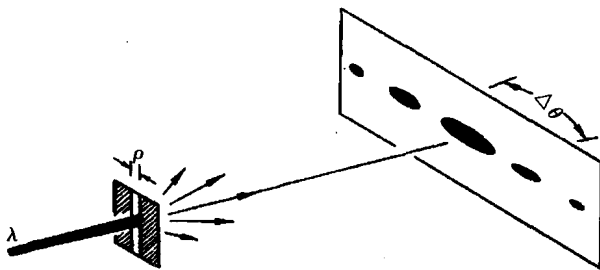


图 1.4 单缝衍射现象

二、惠更斯原理

惠更斯曾首先从波动的角度对光的传播规律进行了解释。他认为,在光波的传播过程中,任一时刻所到达的波面上的每一点,都可以看成是一个次级波源(扰动中心),这些次级波源所发射的球面子波的包络面,形成下一时刻的新波面,两个波面的空间间隔等于波的传播速度与传播时间间隔的乘积,这就是惠更斯原理。

如图 1.5 所示,对于平面光波而言,只要其横向截面较大,则任一波面上各点发出的次级子波的包络面仍为平面。同样,球面光波的波面上各点发出的球面子波的包络面也仍然是球面。

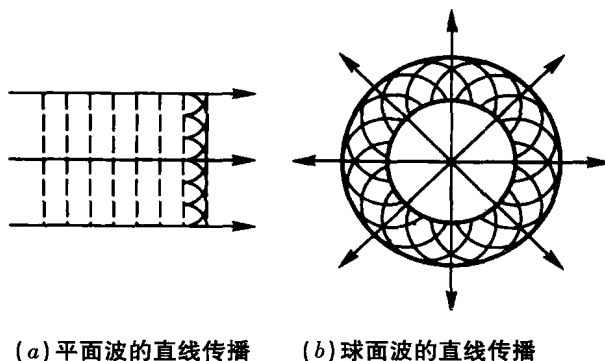


图 1.5 惠更斯原理

如图 1.6,在平行光照射下,透过衍射屏开孔中间部分的光波的波面是平整的,但在孔的边缘,球面子波却可以越过几何投影线而直接进入阴影区,形成衍射。孔径尺寸越小,阴影区的光强度分布展开得越宽,因而衍射效应越明显。

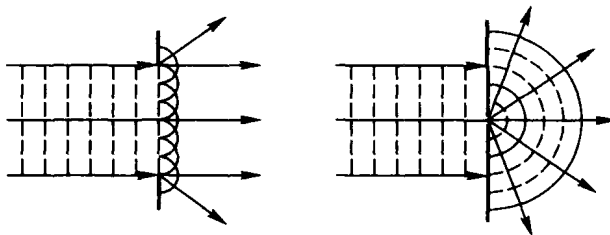


图 1.6 光波的衍射

三、基尔霍夫衍射积分公式

惠更斯原理对光的衍射现象作出定性解释,可以用于确定光的传播方向,但无助于确定沿不同方向传播的光波的振幅和相位大小。后来菲涅耳在干涉现象的启示下,将不同子波的干涉叠加引入惠更斯原理,并赋予相应的相位和振幅表达式,从而将惠更斯原理发展成为一个全新的、更加严格和完善的、可以定量描述各类衍射问题的基本原理——惠更斯—菲涅耳原理。菲涅耳认为,波面上的每一点都可以看做是一个次级波源,它们均发射球面子波,而光场中的任意一点的扰动,等于波面上所有次级波源发出的球面子波的相干叠加。

后来基尔霍夫在惠更斯—菲涅耳原理的基础上,从电磁理论出发,严格地推导出在傍轴近似条件下的衍射积分公式为:

$$\hat{U}(P) = \frac{-i}{\lambda r_0} \iint_{(\Sigma_0)} \hat{U}_0(Q) e^{ikr} ds \quad (1.22)$$

此式称为菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。此式表明,不同的光孔形状,或不同的波前函数 $\hat{U}_0(Q)$, 将造成不同的衍射场,而积分核 e^{ikr} 总是不变。

第二章 傅里叶变换

在这一章里,本书将以简明扼要的格式,说明傅里叶变换的主要性质,着重从光学的眼光去看待那些相关的数学公式和定理,这有助于理解和掌握傅里叶变换,也有助于理解相因子分析法。至于那些相关的公式的推导和定理的证明,本书从略。

第一节 傅里叶级数

一、周期函数

一个函数 $f(x)$ 若对一个常数 X 能满足下列的关系式,这个函数 $f(x)$ 就叫做周期函数。

$$f(x) = f(x + X) \quad (2.1)$$

式中的常数 X 就叫做周期。

例如:我们所熟悉的正弦函数和余弦函数都是周期函数,因为它们满足:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi)$$

式中 $X = 2\pi$, 2π 就是正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的周期。

二、三角级数

凡是由无穷多个正弦函数和余弦函数相加起来,具有下面形式的级数,就叫做三角级数。

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \\ + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \\ + \cdots \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2)式中,如果三角级数的各个 b_n 都等于0,只剩下常数项和余弦项,这个级数就叫做余弦级数。

(2.2)式中,如果三角级数的各个 a_n 都等于0,只剩下常数项和正弦项,这个级数就叫做正弦级数。

三、傅里叶级数

如果有一个周期函数 $f(x)$, 它的变量 x 是个无量纲的数, 它的周期等于 2π , 即满足:

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad (2.3)$$

这个函数就可以展开为以下的三角级数, 这个三角级数就叫做傅里叶级数。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.4)$$

其中:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (2.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (2.7)$$

(2.5)、(2.6)、(2.7) 各值都可由 (2.4) 式求出, 证明如下。

当 n 为整数时, $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 在 0 到 2π 的区间内有:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0 \quad (2.8)$$

将 (2.4) 式两边都乘以 dx , 同时进行积分, 积分从 0 到 2π , 则有:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

由 (2.8) 式的关系, 上式右边除第一项得 $\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx = a_0 \pi$ 外都为 0 , 故有:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

这里用的积分上下限从 0 到 2π , 如果积分上下限从 $-\pi$ 到 π , 同理可以证明:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

又因为三角恒等式有如下的规律:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \sin(m-n)x$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = -\frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x$$

将上面三个式子从 0 到 2π 取定积分, 得到以下结果:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx = 0 \quad (2.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{若 } n \neq m \text{ 时} \\ \pi & \text{若 } n = m \neq 0 \text{ 时} \\ 2\pi & \text{若 } n = m = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2.10)$$