常微分方程

高等师　专科学校教育学院协编教材

常微分方程

副主编　唐忠明

编　委　蔡同灵　周小山　刘代伟
宋天鉴　刘念庸　陈静思
王家鑫　张四维

西南师范大学出版社

常 微 分 方 程

温耀华 主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆 北碚）
西南师范大学出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：8.875 插页：4 字数：192千
1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷
印数：1—2000
*
ISBN 7—5621—0278—3/O·24
定价：2.70元

前　言

一、本书由西南师范大学出版社组织四川、云南、贵州三省一些师专、教育学院的常微分方程任课教师编写而成．编委会由贵阳师专温耀华（主编），毕节师专唐忠明（副主编），绵阳师专蔡同灵，成都教育学院周小山，大理师专刘代伟、曲靖师专宋天鉴，贵阳师专刘念庸，涪陵师专陈静思，兴义师专王家鑫和遵义师专张四维组成．我们采取分工编写，温耀华同志根据编委的初稿执笔统写全稿的方式，经过反复讨论、征求一些专家意见、多次修改而完成．周小山同志为第五章搜集了丰富的资料写了初稿，王家鑫同志除了参加编写工作外，还为所有习题提供了答案．编委会特邀贵州大学杨世藩教授写了附录："常微分方程发展简介"．

二、在以往的教学中，我们总是感到缺乏一本师专、教育学院这一层次适用的教材，现行的教材大都是针对本科院校编写的，所以许多同志自编了讲义并多次在本校使用．我们认为，这本教材的编写，除了应尽量达到对教材的基本要求如思想性、科学性、适用性、启发性外，应根据教学大纲，紧密结合培养目标，在体现师专、教院的特色上多下功夫．我们在以下几个方面作了努力．

（一）在叙述上争取做到明晰易懂，读起来顺畅，适宜于自学．

（二）对问题的来龙去脉交代得比较清楚，尽量介绍一些解决问题的思路．在一定章节之后作些归纳小结，使读者

对书中内容的脉络能够理得清，对解决问题的方法有步骤可循．

（三）对概念、命题的叙述或论证要求精确、严密．所有需用而不证的结论亦有根有据．

（四）注意精选例题和习题，对本书读者在基本运算技能方面加强培养与训练．

（五）材料的取舍及安排对于本书来说是至关重要的．如果说本书要有什么特色的话，那么主要应在这方面体现出来．我们力图使本书各章的内容在深度和广度上切合师专、教院这一层次的培养目标．鉴于以往学生认为常微分方程在中学数学中用不上的错觉，我们编写了第五章常微分方程与中学数学．原有的教材都未系统涉及这一内容，我们把散见的资料搜集、整理、加工，结合自己在教学中的心得、体会，作了些探索，是一次尝试，希望能增加读者目前学习与今后钻研的兴趣．至于效果如何，将有待于实践的检验．

要做到、做好以上各点，本身是较困难的，更由于编者的水平的限制，本书与上述目标定有相当的差距，同时书中难免有不少缺点、错误或不当之处，恳请专家、同行、读者对本书提出宝贵意见．

三、编委会完成了第二次修改稿后，请兄弟院校富有教学经验的任课教师进行了初审．参加审查的有：昆明师专、大理师专、成都教育学院、自贡师专、六盘水师专及贵阳师专等院校．编委会充分讨论了兄弟院校的审查意见后又作了修改．然后请北京大学丁同仁教授（主审），贵州教育学院李长明教授，四川教育学院徐世龙教授及昆明工学院李继彬教授进行第二次审查．编委会逐条讨论了四位教授的审查意

见后修改定稿．编委会衷心感谢以上同志对本书的修改建议及指导性意见。

另外，本书得以完成与四川、云南、贵州三省教委的关心和支持是分不开的．贵阳师专，成都教育学院，大理师专，兴义师专对本书的编写也给予了大力支持．西南师范大学出版社赵宏量副总编辑，张先金总编室副主任对本书作了技术性的指导，在此一并深表谢意．

《常微分方程》编委会

1989年1月

目　　录

第一章　一阶微分方程的初等积分法

本章先引入关于微分方程的一些基本概念，然后主要讨论一阶常微分方程的初等积分法．

积分与求导互为逆运算，把微分方程的求解问题化为积分问题就是微分方程的初等积分法．本章介绍能用初等积分法求解的一阶微分方程的若干类型及其求解的方法．尽管这些类型为数不多，但它们却反映了相当一部分实际问题中出现的微分方程，而且从方法上讲，初等积分法不失为一个基本的方法，因此，掌握这些类型方程的解法还是有重要实际意义的．

§1.1　微分方程及其解

1.1.1　什么叫做微分方程

我们在中学代数中已经学习过方程的概念，含有未知量的等式称为方程．例如：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）；超越方程 $e^x-\sin x=0$ 等．

在数学分析中，我们又遇到隐式方程，它是含有自变量和未知函数的关系式．例如：

$$x^2+y^2=a^2;\qquad \ln(xy)+\operatorname{tg}x=0\ \text{等}.$$

微分方程也是一种方程，不同之处在于它的未知量是未

知函数，而且施加于未知函数的运算增加了导数或微分运算．现在给出微分方程的定义如下．

定义1　微分方程

联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的关系式称为**微分方程**．

微分方程中，可以不显含自变量或未知函数，但一定要出现未知函数的导数．

下列关系式都是微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

$$x^2+[y'(x)]^2=a^2$$

$$y''+2y'-3y=e^x$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

微分方程包括**常微分方程**与**偏微分方程**，**常微**分方程中的未知函数都是一元函数，未知函数的导数自然就是对仅有的自变量的导数，如上列方程中的前面四个就是常微分方程．偏微分方程的未知函数是多元函数，导数是未知函数对某个自变量的导数，因而是偏导数，如上列方程中的后两个是偏微分方程．

本书只讨论常微分方程，对偏微分方程不作介绍．因此，今后我们把常微分方程简称为“微分方程”，有时更简称为“方程”．

微分方程有着深刻而生动的实际背景，它产生于生产实际、科学技术以及基础理论的需要．在大量的实际问题中，需要研究某种运动过程的变化规律，但是反映运动规律的量与量之间的函数关系往往不能或不易直接求得，而根据问题的物理意义、几何意义或其它实际意义，许多运动过程能比较容易地建立起这些变量和它们的导数（或微分）所满足的关系式，即微分方程．通过对微分方程的研究，我们就可以认识和掌握反映客观现实世界的许多运动过程．下面介绍几个例子．先只介绍如何把一些实际问题，转化为微分方程的问题．

例1　曲线方程

已知曲线上任意一点处的切线斜率等于这点横坐标平方的3倍，求曲线方程．

分析：设所求曲线的方程为 $y=y(x)$．根据导数的几何意义，在点 (x,y) 处曲线的切线斜率等于$\frac{dy}{dx}$，由已知条件知，所求曲线应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=3x^2$$

这就是曲线上的点的纵、横坐标 y、x 应满足的微分方程，问题转化为已知自变量 x、未知函数 y 及其导数$\frac{dy}{dx}$满足该方程，求未知函数 y 的问题．

例2　镭的裂变

已知镭在任何时刻的衰变速度与该时刻所存镭的质量成正比，又已知时刻 $t=t_0$ 时，存镭 R_0 克，求在任何时刻 t 的存镭量 $R(t)$．

分析：要直接写出存镭量 R 与时间 t 的函数关系 $R(t)$ 不大容易．由题设条件知衰变速度与存镭量的关系，所谓衰变速度就是存镭量随着时间变化的变化率，也就是存镭量 R 对时间变量 t 的导数 $\frac{dR}{dt}$，于是应有

$$\frac{dR(t)}{dt}=-kR(t)$$

其中 $k>0$ 是比例常数，右端加负号是因为镭的衰变过程质量减少，

故 $$\frac{dR}{dt}<0.$$

这就是量 R 与 t 所应满足的微分方程．为要确定该函数关系 $R(t)$，还要用另一题设条件，于是就变成要解决下列数学问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dR}{dt}=-kR\\ R|_{t=0}=R_0\end{cases}$$

记号 $R|_{t=t_0}=R_0$ 表示 $R(t_0)=R_0$，这是微分方程中常用的写法．

例3　受到空气阻力的自由落体运动

设质量为 m 的物体自由下落时受到的空气阻力与物体下落速度成正比，求物体下落距离与时间的关系．

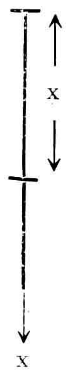

图1.1

分析：如图1.1建立坐标系，设 x 为物体下落距离，于是物体下落速度为 $v=\frac{dx}{dt}$，加速度为 $a=\frac{d^2x}{dt^2}$．

根据牛顿第二定律 $F=ma$ 及题设条件，应有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg$$

其中 $k>0$ 为比例常数，右端第一项的负号，表示空 气阻力与物体速度的方向相反.

这就是量 x 与 t 所应满足的微分方程.

为要确定该运动规律，还要考虑物体的初始状态. 设初始时刻为 $t=0$，因为选取物体的初始位置为坐标原点，故有 $x(t)|_{t=0}=0$，又因为是自由下落，即 初 始速 度为零，故有 $x'(t)|_{t=0}=0$. 问题就变成解决下列数学问题：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}+mg \\ x(t)|_{t=0}=0, \quad x'(t)|_{t=0}=0 \end{cases}$$

例 4　数学摆

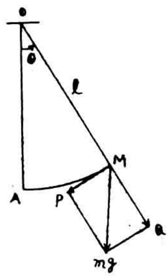

图1.2

把一个小球系在一根不会伸长的细线下端，线的质量跟小球的质量比较起来可以忽略不计，而小球的直径与细线的长度比较起来显得非常微小. 固定细线的上端，小球自由下垂，略为移动小球，使得小球在一个竖直平面内往返摆动，这种装置称为单摆.

如果把单摆的摆球看成是一个具有质量 m 的质点，就称为**数学摆**. 我们的问题是研究数学摆的运动规律.

分析：设细线长度为 l，质点为 M，如图 1.2，取反时针运动的方向作为计算摆与 铅 直线 OA 所 成 的 角 θ 的正方向，质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表为 $v=\dfrac{ds}{dt}$，其 中 s 是圆弧 MA 的长度（A 是平衡位置），$s=l\theta$. 所以

$$v=l\frac{d\theta}{dt}$$

把作用于质点的重力$\overrightarrow{mg}$分解成两个分量$\overrightarrow{MQ}$和$\overrightarrow{MP}$，分量$\overrightarrow{MQ}$沿着半径$\overrightarrow{OM}$的方向，与线的拉力相抵消，它不会引起质点M的速度的数值改变．分量$\overrightarrow{MP}$沿着圆周的切线方向，它引起质点M的速度的数值改变．

因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点M向着平衡位置A的方向运动，即当角θ为正时，向减小θ的方向运动；当角θ为负时，向增大θ的方向运动，所以$\overrightarrow{MP}$数值为$-mg\sin\theta$．于是根据牛顿第二定律及$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$，易得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

这就是量θ与t所应满足的微分方程．

为要确定该运动规律，还要考虑摆的初始状态．设初始时刻$t=0$，摆的初始位置$\theta=\theta_0$，初始角速度$\frac{d\theta}{dt}=0$，于是就变成要解决下列数学问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0\\ \theta|_{t=0}=\theta_0,\ \theta'|_{t=0}=0\end{cases}$$

从以上四个例子我们看到，由实际问题中提出来的微分方程是各式各样的．以后我们还会看到，对各种类型的微分方程的解法或研究各有自己的特点，因此我们要从不同的角度对微分方程进行分类．

常微分方程分类的一个基本的依据是在方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数，我们把它称为**微分方程的阶．**

例如 $\frac{dR}{dt}=-kR$ 和 $x^2+(y')^2=a^2$ 都是一阶方程；$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}+g$ 和 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ 都是二阶方程等．以后我们还会看到更高阶的方程．

一阶微分方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.1}$$

其中 F 是 x,y,y' 的已知函数，而且一定含有 y'．

如果（1.1）式能对 y' 解出，则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.2}$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.3}$$

其中 $f(x,y)$，$M(x,y)$，$N(x,y)$都是 x,y 的已知函数．

（1.1）称为一阶**隐方程**，（1.2）称为一阶**显方程**，（1.3）称为微分形式的**一阶方程**．

n 阶**隐式方程**的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

其中 F 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数，而且一定含有 $y^{(n)}$．

n 阶**显式方程**的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

其中 f 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 的已知函数．

1.1.2 什么叫做微分方程的解

代数方程与超越方程的主要问题之一是求方程的根．所谓方程 $f(x)=0$ 的根 x_0 是指这样的数，在方程中令 $x=x_0$ 时，等式 $f(x_0)=0$ 成立．

与此相类似，微分方程的主要问题之一是求方程的解．一般地说，微分方程的解就是满足方程的函数．求微分方程