理論力學

第二冊

徐芝綸　吳永禎　合編

上海新亞書店出版

理論力學

第二冊

徐芝綸 吳永禛

合編

新亞書店出版

內容提要

本書包括質點動力學及質點系動力學兩部份，以講述基本理論爲主，並適當結合實際問題以說明其應用。

編號：632

理論力學

第二册

徐芝綸　吳永禎　合編

新亞書店　出版

上海市書刊出版業營業許可證出零叁零號

上海河南中路159號

華成印刷所　印刷

上海泰興路523弄14號

新亞書店　發行

1954年9月第一版—第一次印刷

印數：1—2000册　開本：762×1067 1/23

印張：7 13/23　字數：145千字

本册定價人民幣12,000元

目　　次

第三篇　質點動力學

第四篇　質點系動力學

第三篇 質點動力學

第十九章

基本定律

§19-1. 緒言

在靜力學裏,研究了作用於物體的力底簡化及平衡條件,而不論物體底運動;在運動學裏,研究了物體運動底幾何學性質,而不論作用於物體的力;但在動力學裏,則將研究物體底運動與作用於物體的力兩者之間的關係. 由經驗而知,同樣的力作用於不同的物體時,對於各該物體底運動將產生不同的影響,這就說明,物體底運動不僅與它所受的力有關,而且與它本身的某些性質(這種性質稱爲**力學性質**)有關. 因此,比較確切地說,動力學所研究的是物體底運動,作用於物體的力及物體底力學性質三者之間的關係. 更具體的說,動力學所研究的問題是:要使一定的物體發生一定的運動,須要對它施以什麼樣的力? 以及,一定物體在一定的力作用下,它的運動情況如何? 而後者是動力學底主要內容.

在運動學裏,曾將所考察的物體分爲質點及質點系(剛體是不變形的質點系)來研究它們的運動. 在動力學裏,也同樣將所考察的物體分爲質點及質點系來研究,因而動力學可分爲質點動力學及質點系動力學兩部份. 質點系動力學底理論是直接從質點動力學底原理推演出來的,它所反映的物體運動規律,比較更具有一般性. 不過,質點動力學也自有其獨立的實用價值. 因爲,不但當物體可以看作質點時,它的問題屬於質點動力學底範圍,就是有關質點系的某些問題(如剛體底平行

移動及質點系質心底運動)，也可以直接應用質點動力學底原理求得解答.

現在首先研究質點動力學.

質點動力學底基礎(自然也就是全部動力學底基礎)是根據對自然現象的觀察及實驗底結果而建立起來的幾個定律. 這幾個定律是分別由伽利略及牛頓建立的，不過牛頓在它的名著"自然哲學底數學原理"一書中作了綜合的和有系統的陳述. 下面就來敍述並解釋這幾個定律.

§19-2. 慣性定律

任何質點，如不受外力影響，則將保持靜止的或勻速直線運動的狀態.

這一定律是首先由伽利略建立的，但牛頓在他的書中把它列爲第一定律，因此，一般都稱這一定律爲牛頓第一定律.

物體不受外力影響時保持靜止的或勻速直線運動的狀態，這是物體底特性，這種特性稱爲慣性，所以上述定律又稱爲**慣性定律**，而勻速直線運動也稱爲**慣性運動**.

設質點由靜止而開始運動或者所作的運動不是勻速直線運動，也就是說，該質點具有加速度，則由慣性定律可知，該質點必受有外力作用. 因此，可以說，力是破壞質點底靜止或改變質點底運動狀態的原因，或者說，力是使質點產生加速度的因素. 這樣，我們又得到了關於力的概念. 當然，這裏仍然是只考察力底效應而不研究力底本質.

在運動學裏曾說過，靜止與運動是相對的概念，必須對一定的坐標系而言才有意義. 那末，慣性定律裏所說的靜止或勻速直線運動，究竟是以什麼樣的坐標系作爲標準的呢? 是不是對於任何坐標系慣性定律都適用呢? 對於這一問題須要作簡短的說明.

牛頓在陳述各個定律之前，曾引進"絕對空間"的概念. 他所謂的"絕對空間"，是與物質無關的，絕對不動的空間. 質點對於"絕對空間"

的運動(或者說,對於絕對靜止的坐標系的運動)則稱爲絕對運動. 牛頓聲明,他所陳述的定律(當然包括慣性定律在內)只適用於這樣的絕對運動. 不過,由力學底相對性原理(將在第二十三章中講述)可知,設某一坐標系對靜坐標系作勻速直線運動,則對於該動坐標系,慣性定律也適用. 凡是適用慣性定律的坐標系就稱爲**慣性坐標系**.

當然,認爲空間與物質無關,這是完全錯誤的,而且,在宇宙間根本就找不到一個絕對靜止的坐標系,因而也就不能找到一個眞正的慣性坐標系. 但是,這些定律和以它們爲基礎而建立起來的全部動力學理論並不就因此而失去了實用的價值. 事實上,我們雖然不能找到一個眞正的慣性坐標系,卻可以找到近似的慣性坐標系;對於這樣的坐標系,應用動力學底定律和理論,能得到足夠精確的結果. 例如,在絕大多數的工程問題中,只須將剛連於地球的坐標系看作近似的慣性坐標系,所得的結果底精確度就已經超過實際所需要的了;只有在少數問題中,當須要考慮地球自轉底影響時,才取通過地心而指向三個恆星的軸爲慣性坐標系. 在天文計算中,則取太陽中心坐標系,即,以太陽中心爲坐標原點,而三個坐標軸分別指向三個恆星.

在以後的論述中,如果沒有特別指明,則所有運動都是對慣性坐標系而言的,而在實際問題中,都是以剛連於地球的坐標系爲慣性坐標系.

§ 19-3. 動力定律

慣性定律只說明力是產生加速度的原因,至於力與加速度之間的關係,則由下述的動力定律來表明:

質點受一個力作用時,所產生的加速度與作用力底大小成正比,加速度底方向與作用力底方向一致.

這一定律可用矢量方程式表爲:

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F},$$

卽
$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{w}. \tag{19-1}$$
其中 $\boldsymbol{F}$ 爲質點所受的力，$\boldsymbol{w}$ 爲質點底加速度，而比例常數 m 則稱爲質點底**質量**.

設以相等的力作用於不同的質點，則由式(19-1)可見，質量 m 愈大的質點，所產生的加速度 $\boldsymbol{w}$ 愈小. 這就表示，質點底質量 m 愈大，它的慣性也愈大. 因此，質量是質點底慣性底量度.

方程式(19-1)表明質點底質量、它所受的力及因此而產生的加速度三者之間的關係，是質點動力學(也就是全部動力學)底**基本方程式**.

設有一力作用於質量已知的質點，則根據質點所得到的加速度就能確定作用力底大小及方向. 這是應用動力學原理來量度力的方法.

將方程式(19-1)改寫爲標量方程式 $F=mw$，則有
$$m=\frac{F}{w}. \tag{a}$$
設已知作用於一質點的力底大小 F 及該質點因此而產生的加速度底大小 w，則該質點底質量 m 就可由式(a)算出. 現在，令一質點在近地面處的眞空中自由降落，則該質點所受的力只有重力，它的大小就是質點底重量 W，而質點降落的加速度底大小就等於重力加速度底大小 g，於是由式(a)求得該質點底質量爲
$$m=\frac{W}{g}, \tag{19-2}$$
而方程式(19-1)亦可改寫成爲
$$\boldsymbol{F}=\frac{W}{g}\boldsymbol{w}. \tag{19-3}$$
在地面上不同之處，重力加速度 g 底數值並不相同，同一物體底重量 W 也不相等，但在古典力學中，因爲把物體底質量看作常量，所以，不論在地面上何處，W 與 g 的比值看作是不變的.

在物理學上，通常採用 CGS 單位制(絕對單位制)，以長度、質量、時間這三個量底單位爲基本單位. 長度底單位用厘米，時間底單位用秒，質量底單位用克，卽在標準大氣壓下及 4°C 時 1 立方厘米的水

底質量．這樣，力底因次是[質量][長度]/[時間]^2，而力底單位是克-厘米/秒^2．

設在公式 $F=mw$ 中，令 $m=1$ 克(質量)，$w=1$ 厘米/秒^2，則 $F=1$ 克-厘米/秒^2．這就是說，在 CGS 制中，以使 1 克質量產生 1 厘米/秒^{2}加速度的力爲單位力．這單位力稱爲達因．當具有 1 克質量的物體在眞空中自由降落時，$w=g$，而 $F=mg$ 就是這物體所受的重力底大小，也就是這物體底重量．在物理學上，把這物體底重量稱爲 1 克，因此，如取 $g=980$ 厘米/秒^2，則 1 克重量 $=980$ 達因．

在工程上，通常採用重力單位制，以長度、時間、力底單位米、秒、仟克爲基本單位，如以前各章中所用．這樣，質量底因次是力除以加速度的因次，卽[力][時間]^2/[長度]，而質量底單位是仟克-秒^2/米．

設在公式 $m=\dfrac{F}{w}$ 中，令 $F=1$ 仟克，$w=1$ 米/秒^2，則 $m=1$ 仟克-秒^2/米，這就是說，以在 1 仟克力作用下產生 1 米/秒^2 加速度的質量爲單位質量．這一單位並無特殊名稱，通常就稱爲**工程單位質量**．如令重 W 的物體在眞空中自由降落，並取 $g=9.80$ 米/秒^2，則 $m=\dfrac{W}{9.80}$，而當 $W=9.80$ 仟克時，$m=1$ 工程單位質量．這就是說，1 工程單位質量等於重 9.80 仟克的物體底質量．

§19-4. 力底獨立作用定律

動力定律所表示的是質點只受到一個力時的情形，設一質點同時受有幾個力底作用，它的加速度將由下述定律決定．

設一質點同時受有幾個力底作用，則該質點底加速度，等於各力單獨作用於該質點時所產生的加速度底矢量和．

這一定律稱爲**力底獨立作用定律**，也叫做**力底作用互不相干定律**．

設有一質點，其質量爲 m，同時受力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用．以 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 代表各力單獨作用時質點底加速度，$\boldsymbol{w}$ 代表各力同時作用時質點底加速度，則根據本定律可有如下的關係：

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_n. \tag{a}$$

將上式底兩邊同乘以 m, 根據動力定律有 $\boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = m\boldsymbol{w}_2, \cdots$, $\boldsymbol{F}_n = m\boldsymbol{w}_n$, 並命

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}, \tag{b}$$

於是有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n. \tag{c}$$

這樣就從動力學出發得出了靜力學中熟知的共點力底合成法則——合力等於各分力底矢量和. 當然,如果從分力與合力的關係式(c)出發,也可以得到加速度的關係式(a). 這裏須要說明,力底合成及加速度底合成法則,都是實驗底結果,而不是純粹的數學的演繹,因而無論從(a)推出(c), 或從(c)推出(a), 都是一樣的.

由(b)及(c)又可得

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n. \tag{19-4}$$

這就表示:幾個力同時作用於一質點時所產生的加速度,等於各力底合力單獨作用時所產生的加速度.

在方程式(19-4)中,如 $\boldsymbol{w} = 0$, 即,質點是靜止的或作勻速直線運動,則 $\boldsymbol{F} = 0$, 即 $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = 0$. 這就是靜力學中所研究的共點力系成平衡時的情況.

§ 19-5. 反作用定律

兩物體相互作用的力同時存在,大小相等,作用線相同而方向相反,或者說,任何作用必有與它大小相等而方向相反的反作用存在

這一定律曾在靜力學中講述過. 不過,在靜力學中所考察的作用力與反作用力,主要是出現在兩個靜止的物體相接觸之處,而這裏則說明:對於兩個運動的和不相接觸的物體,反作用定律同樣適用.

設有兩個質點 A 及 B. 不論它們的運動情況如何,若質點 A 以力 $\boldsymbol{F}$ 作用於質點 B, 則質點 B 必同時以力 $\boldsymbol{F}'$ 作用於質點 A, 而且 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$, 並都沿連接 A 及 B 的直線作用.

再說一次,作用力與反作用力是分別作用在兩個質點上的. 如研

究質點 A 底運動，就只須考慮它所受的力 $\boldsymbol{F}'$，而不應考慮它對於質點 B 的作用力 $\boldsymbol{F}$；反之，對於質點 B 則只須考慮力 $\boldsymbol{F}$ 而不應考慮力 $\boldsymbol{F}'$.

反作用定律對於研究質點系動力學問題具有特別重要的意義．因爲，前述的幾個定律都是就一個質點而言的，而這一定律則使我們有可能將質點動力學底原理推廣，據以研究質點系動力學問題．

第 二 十 章

質點運動微分方程式

§ 20-1. 質點運動微分方程式底各種形式

設有一質點 P, 其質量爲 m, 在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿某一曲線運動(圖 20-1),則,據動力定律,質點底加速度 $\boldsymbol{w}$ 與力 $\boldsymbol{F}$ 之間的關係爲:

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}. \qquad (20\text{-}1)$$

若質點 P 同時受若干個力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{F}_n$ 作用,則,據力底獨立作用定律,方程式(20-1)中的 $\boldsymbol{F}$ 應等於各力底矢量和,即

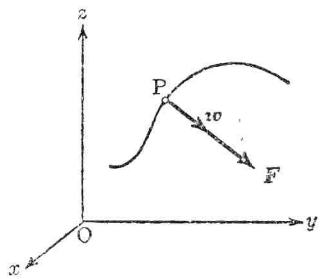

圖 20-1

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n.$$

由運動學[方程式(13-8)]已知,

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \qquad (a)$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 爲質點 P 底速度,而 $\boldsymbol{r}$ 爲質點 P 對於原點 O 的矢徑. 於是方程式(20-1)成爲

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}, \qquad (20\text{-}2)$$

或

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}. \qquad (20\text{-}3)$$

這就是用矢量表示的質點運動微分方程式.

過原點 O 取直角坐標系 $Oxyz$, 並將方程式(20-3)兩邊分別投影於 x, y, z 軸. 於是有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \tag{20-4}$$

這就是用直角坐標表示的質點運動微分方程式. 方程式(20-4)中的 x, y, z 爲質點 P 底位置坐標,而 X, Y, Z 爲作用於質點的各力在 x, y, z 軸上的投影底代數和.

若質點 P 底運動是平面曲線運動,取運動平面爲 xy 面,則方程式(20-4)成爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad Z=0. \tag{20-5}$$

若質點作直線運動,取該直線爲 x 軸,則方程式(20-4)成爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad Y=0,\quad Z=0. \tag{20-6}$$

在實際應用上,也常常採用路徑表示法. 沿路徑取自然坐標軸 T, N, B, 並將方程式(20-1)底兩邊投影於三軸,而以 w_τ, w_n, w_b 代表 $\boldsymbol{w}$ 在三軸上的投影, F_τ, F_n, F_b 代表作用於質點的各力在三軸上投影底代數和,則

$$mw_\tau=F_\tau,\quad mw_n=F_n,\quad mw_b=F_b. \tag{b}$$

但 $w_b=0$, 而 $w_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $w_n=\dfrac{v^2}{\rho}$, 於是得

$$\underline{m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau,\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n,\quad F_b=0.} \tag{20-7}$$

這就是用路徑表示的質點運動微分方程式.

§ 20-2. 據已知運動求力

現在首先研究質點動力學中的第一類問題:已知質點底運動情況,求作用於質點的力. 一般說來,這類問題是比較簡單的,因爲在解答問題時只須用微分法就夠了.

設已知質點P底質量爲m,而它的用直角坐標表示的運動方程式爲

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t),$$

則,由方程式(20-4)有

$$
\left.\begin{aligned}
X &= m\frac{d^2x}{dt^2} = mf_1''(t),\\
Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} = mf_2''(t),\\
Z &= m\frac{d^2z}{dt^2} = mf_3''(t).
\end{aligned}\right\} \tag{20-8}
$$

於是，只須求出質點底各坐標對於時間的導數在任一瞬時的值，就可求得質點在該瞬時所受的合力底投影，自然也就可以完全確定質點所受的合力底大小及方向．

若質點 P 同時受幾個力作用，而其中某些力已知，某些力未知(如約束力)，這時，上式中的 X, Y, Z 應等於各已知力及未知力投影底代數和，據此即可求得各未知力．

例題 20-1． 質點 P，質量爲 m，在坐標平面 Oxy 內運動(圖 20-2)，其運動方程式爲

$$x = a\cos\omega t,\quad y = b\sin\omega t,$$

其中 a, b, ω 都是常數．求質點 P 所受的力 $\boldsymbol{F}$．

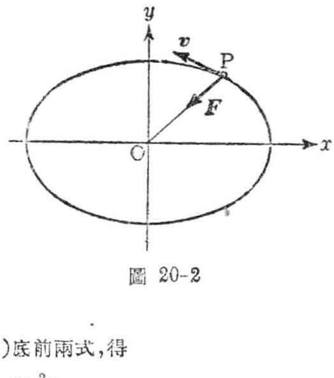

圖 20-2

解： 消去時間 t，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

所以質點底路徑是以 a 及 b 爲半軸的橢圓．

將運動方程式對時間 t 求微分，代入方程式(20-8)底前兩式，得

$$X = -ma\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2x,$$
$$Y = -mb\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2y.$$

於是，力 $\boldsymbol{F}$ 底大小爲

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}=m\omega^2r,$$

其中 r 爲動點 P 底矢徑 $\boldsymbol{r}$ 底模． 力 $\boldsymbol{F}$ 底方向餘弦爲：

$$\cos(\boldsymbol{F}, x)=\frac{X}{F}=-\frac{x}{r},\quad \cos(\boldsymbol{F}, y)=\frac{Y}{F}=-\frac{y}{r},$$

恰與矢徑 $\boldsymbol{r}$ 底方向餘弦底數值相等而符號相反． 所以，力 $\boldsymbol{F}$ 與矢徑 $\boldsymbol{r}$ 成比例而方向相反(即指向坐標原點 O)，這關係可用矢量方程式表爲

$$\boldsymbol{F}=-m\omega^2\boldsymbol{r}.$$

這種力稱爲**有心力**．

例題 20-2. 電梯重 W, 容許的加速度(或減速度)爲 $0.2g$, 求懸掛電梯的索內拉力底最大及最小值.

解: 電梯所受的力有:重力 $\boldsymbol{W}$, 鉛直向下;懸索拉力 $\boldsymbol{T}$, 鉛直向上. 取 x 軸向下,則

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=W-T, \quad 即 \quad \frac{W}{g}w_x=W-T,$$

於是得

$$T=W\left(1-\frac{w_x}{g}\right).$$

當電梯以加速度下降或以減速度上升時, w_x 取爲正値,反之爲負値. 將 $w_x=\pm 0.2g$ 代入,即得拉力 T 底最小值及最大值

$$T_{\min}=0.8W, \quad T_{\max}=1.2W.$$

習題 20-1. 一質點底質量爲 0.1 工程單位,依 $x=t^4-12t^3+60t^2$ 作直線運動, x 以米計, t 以秒計. 求作用於質點的力,並求該力爲最大或最小值的瞬時及力底大小.

答: $F=1.2(t^2-6t+10)$ 仟克; $t=3$ 秒時, $F_{\min}=1.2$ 仟克.

習題 20-2. 蒸汽機活塞按 $x=a\left(\cos\omega t+\frac{a}{4l}\cos 2\omega t\right)$ 的規律作水平運動,其中 a 爲曲柄底長度, l 爲連桿底長度, ω 爲曲柄底角速度,係一常數. 設活塞重 W, 求使活塞運動的力底最大值.

答: $\frac{W}{g}a\omega^2\left(1+\frac{a}{l}\right)$.

習題 20-3. 一重 280 仟克的桶在礦井中以勻加速度下降,在最初 10 秒鐘內下降的距離爲 35 米. 求懸掛桶的繩內的拉力.

答: 260 仟克.

習題 20-4. 將重 2 仟克的物體掛在 1 米長的線底下端,物體因受衝擊而獲得 5 米/秒的速度,求此時線內的拉力.

答: 7.1 仟克.

§ 20-3. 據已知力求運動

設已知作用於質點的力,而須求它的運動情況,即,求它的運動方程式. 這時,問題就成爲求解微分方程式.

在最一般的情況下,力 $\boldsymbol{F}$ 可能是時間 t、動點底位置坐標 x, y, z 及其速度投影 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ 底函數,而方程式(20-4)成爲

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (20\text{-}9)$$

這是一組二階微分方程式,它們的解答可表爲

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6),\\ y &= f_2(t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6),\\ z &= f_3(t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6). \end{aligned}\right\} \qquad (20\text{-}10)$$

式中的 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_6$ 是任意常數．這六個任意常數可由質點運動底初條件決定．設已知 $t=t_0$ 時，動點底初位置坐標爲 $x_0,\ y_0,\ z_0$，而其初速度底投影爲 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$，$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$，$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$，則有

$$\begin{aligned} f_1(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= x_0,\\ f_2(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= y_0,\\ f_3(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= z_0,\\ f_1'(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,\\ f_2'(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= \left(\frac{dy}{dt}\right)_0,\\ f_3'(t_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) &= \left(\frac{dz}{dt}\right)_0. \end{aligned}$$

由這六個方程式就可確定六個任意常數．於是可知，除了作用於質點的力以外，還必須知道運動底初條件，才能完全決定質點底運動．

若質點作平面曲線運動，則微分方程式(20-9)中只有兩個存在，而任意常數也就只有四個；若質點作直線運動，則方程式(20-9)中只有一個存在，而任意常數也只有兩個．

§ 20-4．質點底直線運動

設質點 P 在合力 $\boldsymbol{F}$ 底作用下作直線運動．取質點 P 底路徑爲 x 軸，則運動微分方程式成爲(20-6)，卽

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad Y = 0, \quad Z = 0. \qquad (a)$$

可見合力 $\boldsymbol{F}$ 底作用線必與 x 軸相合，因而 $X = \pm F$，正負號隨 $\boldsymbol{F}$ 與 x 軸方向相同或相反而定．

在一般情況下，合力 F，因而它的投影 X，可能同時與時間 t，座