



21st CENTURY
规划教材

面向21世纪高职高专基础课程规划教材

COURSES FOR VOCATIONAL HIGHER EDUCATION, BASIC COURSES

高等数学 同步训练教程

李德家 沮冠兴 主 编



科学出版社

www.sciencep.com

高等数学同步训练教程

李德家 俎冠兴 主 编
王 峰 王凌云 副主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是根据教育部有关高职高专高等数学的教学要求和成人高考专升本考试大纲而编写的同步训练教程。

全书共分为7章,包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,多元函数微分学,无穷级数,向量代数与空间解析几何等内容。

本书可作为高等职业教育各专业高等数学学习同步训练辅导之用,也可作为高等职业教育学生专升本复习的考试辅导教材,同时还适用于成人高考专升本的学习辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步训练教程/李德家 组冠兴主编. —北京:科学出版社,2004
(面向21世纪高职高专基础课程规划教材)

ISBN 7-03-013908-9

I. 高... II. ①李...②组... III. 高等数学—高等学校:技术学校—习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070068 号

责任编辑:王 彦 丁 波/责任校对:柏连海

责任印制:吕春珉/封面设计:飞天创意

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年8月第一次印刷 印张:12

印数:1—5 000 字数:216 000

定价:16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

出版前言

随着世界经济的发展，人们越来越深刻地认识到经济发展需要的人才多元化、多层次的，既需要大批优秀的理论性、研究性的人才，也需要大批应用性人才。然而，我国传统的教育模式主要是培养理论性、研究性的人才。教育界在社会对应用性人才需求的推动下，专门研究了国外应用性人才教育的成功经验，结合国情大力度地改革我国的“高等职业教育”，制定了一系列的方针政策。联合国教科文组织 1997 年公布的教育分类中将这种教育称之为“高等技术与职业教育”，也就是我们通常所说的“高职高专”教育。

我国经济建设需要大批应用性人才，呼唤高职高专教育的崛起和成熟，寄希望于高职高专教育尽快向国家输送高质量的紧缺人才。近几年，高职高专教育发展迅速。目前，各类高职高专学校已占全国高等院校的近 1/2，约有 600 所之多。教育部针对高职高专教育出台的一系列政策和改革方案主要体现在以下几个方面：

- “就业导向”成为高职高专教育的共识。高职高专院校在办学过程中充分考虑市场需求，用“就业导向”的思想制定招生和培养计划。
- 加快“双师型”教师队伍建设。已建立 12 个国家高职高专学生和教师的实训基地。
- 对学生实行“双认证”教育。学历文凭和职业资格“双认证”教育是高职高专教育特色之一。
- 高职高专教育以 2 年学制为主。从学制入手，加快高职高专教学方向的改革，充分办出高职高专教育特色，尽快完成紧缺人才的培养。
- 开展精品专业和精品教材建设。已建立科学的高职高专教育评估体系和评估专家队伍，指导、敦促不同层次、不同类型的学校办出一流的教育。

在教育部关于“高职高专”教育思想和方针指导下，科学出版社积极参与到高职高专教材的建设中来。在组织教材过程中采取了“请进来，走出去”的工作方法。即：由教育界的专家、领导和一线的教师，以及企事业从事人力资源工作的人员组成顾问班子，充分分析我国各地区的经济发展、产业结构以及人才需求现状，研究培养国家紧缺人才的关键要素，寻求切实可行的教学方法、手段和途径。

通过研讨认识到，我国幅员辽阔，各地区的产业结构有明显的差异，经济发展也不平衡，各地区对人才的实际需求也有所不同。相应地，相同专业和相近专业，不同地区的教学单位在培养目标和培养内容上也各有自己的定位。鉴此，适

应教育现状的教材建设应该具有多层次的设计。

为了使教材的编写能针对受教育者的培养目标，出版社的编辑分不同地区逐所学校拜访校长、系主任和老师，深入到高职高专学校及相关企事业单位，广泛、深入地和教学第一线的老师、用人单位交流，掌握了不同地区、不同类型的高职高专院校的师生和教学设施情况，清楚了各学校所设专业的培养目标和办学特点，明确了用人单位的需求条件。各区域编辑对采集的数据进行统计分析，在相互交流的基础上找出各地区、各学校之间的共性和个性，有的放矢地制定选题项目，并进一步向老师、教育管理者征询意见，在获得明确指导性意见后完成“高职高专规划教材”策划及教材的组织工作：

- 第一批“高职高专规划教材”包括三个学科大系：经济管理、信息技术、建筑。
- 第一批“高职高专规划教材”在注意学科建设完整性的同时，十分关注具有区域人才培养特色的教材出版。
- 第一批“高职高专规划教材”组织过程中，正值高职高专学制从3年制向2年制转轨，教材编写将其作为考虑因素，要求提示不同学制的讲授内容。
- 第一批“高职高专规划教材”编写
 - ◆ 强调以就业岗位对知识和技能需求下的教材体系的系统性、科学性和实用性。
 - ◆ 强调教材以实例为先，应用为目的；围绕应用讲理论，取舍适度，不追求理论的完整性。
 - ◆ 强调提出问题→解决问题→归纳问题的教、学法，培养学生触类旁通的实际工作能力。
 - ◆ 强调课后作业和练习（或实训）真正具有培养学生实践能力的作用。

在“高职高专规划教材”编委的总体指导下，第一批各科教材基本是由系主任，或从教学一线中遴选的骨干教师执笔撰写。在每本书主编的严格审读及监控下，在各位老师的辛勤编撰下，这套凝聚了所有作者及参与研讨的老师们的经验、智慧和资源，涉及三个大的学科近200种的高职高专教材即将面世。我们希望通过近一年的努力，我们奉献给读者的是他们渴望已久的适用教材。同时，我们也清醒地认识到，“高职高专”是正在探索中的教育，加之我们的水平和经验有限，教材的选题和编辑出版会存在许多不尽人意的地方，真诚地希望得到老师和学生的批评建议，以利今后改进，为繁荣我国的高职高专教育不懈努力。

科学出版社

2004年6月1日

编者的话

随着高等职业教育的迅猛发展,越来越多的高职高专学生认识到高等数学的重要性,但由于它具有一定难度,如果学生没有好的学习方法,要学好不是那么容易,所以迫切需要一本适合高职高专学生参考使用的高等数学辅导训练教材.本书正是为了满足高职高专学生学习的需要,组织部分教学实践经验丰富的教师,根据教育部有关高职高专高等数学的教学要求和成人高考专升本考试大纲内容而编写的.

本书的特点是:突出体现了高等数学的基本概念的要素,体现了数学基本原理及计算方法的条理性;采取概念、典型题、训练题相互呼应的编写方法,有助于让读者理解、掌握所学的数学知识,有助于提高读者利用数学知识解决问题的能力.通过学习本书,读者不但能深刻理解所学知识,还能培养数学的思维能力.

全书共分7章,包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,多元函数微分学,无穷级数,向量代数与空间解析几何等内容.

本书由李德家、沮冠兴担任主编,王峥、王凌云担任副主编.参加本书编写的人员有李德家、沮冠兴、王峥、王凌云、齐金菊、杨敬春等人.

本书可作为高等职业教育各专业高等数学学习同步训练辅导之用,也可作为高等职业教育学生专升本复习的考试辅导教材,同时还适用于成人高考专升本的学习辅导教材.

在编写过程中,得到了各位参加编写的老师所在院校的领导的支持,并对编审工作给予了大力指导和协助,同时,科学出版社的编辑也给予了热情关怀,在此一并致谢.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,希望使用本书的广大师生批评指正.

编者

2004年6月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 函数	(1)
1.2 极限	(12)
1.3 函数的连续	(25)
第 2 章 一元函数微分学	(32)
2.1 导数与微分	(32)
2.2 微分中值定理及导数应用	(47)
第 3 章 一元函数积分学	(63)
3.1 不定积分	(63)
3.2 定积分	(75)
第 4 章 常微分方程	(93)
4.1 一阶微分方程	(93)
4.2 二阶常系数线性微分方程	(100)
4.3 可降阶的微分方程	(109)
第 5 章 多元函数微积分	(112)
5.1 多元函数微分学	(112)
5.2 二重积分	(130)
第 6 章 无穷级数	(144)
6.1 数项级数	(144)
6.2 幂级数	(153)
第 7 章 向量代数与空间解析几何	(162)
7.1 向量代数	(162)
7.2 平面与直线	(168)
7.3 简单的二次曲面	(175)
主要参考文献	(179)

第1章 函数、极限与连续

1.1 函 数

1.1.1 概 述

一、函数的概念

1. 函数的定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y , D 是一个给定的数集, 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按一定的对应规律, 总有唯一确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 x 叫自变量, y 叫因变量或函数. 数集 D 叫做这个函数的定义域, 数集 $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

在函数定义中有两个基本因素: 定义域与对应规律. 两个函数相等, 只有它们的定义域与对应规律相同时, 才能成立, 与变量用什么样的字母表示无关.

2. 函数的表示法

常用来表示函数的方法有 3 种: 解析法、表格法和图示法.

解析法就是用解析表达式(或公式)表示函数关系. 例如, $y = \sin x$, $y = \ln x$ 等. 数学中所讨论的函数多用解析法.

表格法是用列表的方法来表示函数关系. 例如, 我们所用的各种数学用表都是用表格的方法表示函数关系.

图示法就是利用平面直角坐标系 xOy 上的曲线来表示函数关系, 该曲线也称为函数的图像.

3. 显函数与隐函数

函数关系用公式 $y = f(x)$ 表示的称为显函数, 例如, $y = x^3$, $y = \cos x$, $y = \log_a x$.

隐函数是 y 与 x 的对应规则用一个方程 $F(x, y) = 0$ 来表示的函数. 例如, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ 就是一个隐函数. 当然, 有的隐函数可化为显函数, 有的隐函数则不可能化为显函数. 例如, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ 可化为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 或 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, 而方程 $\sin x + \cos y - e^{xy} = 0$ 则就不能解成显函数.

4. 分段函数

在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数.

需要注意的是:对于分段函数,无论它分成多少段,它总是表示一个函数,而不是几个函数,求分段函数的函数值时,要注意用自变量所在的定义域上的那段公式表示.

二、函数的性质

1. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义,如果对于 (a, b) 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的或单调减少的;若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是严格单调增加或严格单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调,有时为了方便,单调增加与严格单调增加统称为单调增加;反之统称为单调减少.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

判断函数的奇偶性除了利用定义外,还可用到以下几个性质:

两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数;

两个奇(偶)函数之积必为偶函数;

一个奇函数与一个偶函数之积必为奇函数.

3. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义,若存在一个正数 M , 对于 (a, b) 内的任一点 x 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界,否则,称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的.

对于函数的有界性,要注意与定义区间有关,同一个函数在不同的定义区间上,它的有界性是不一样的.一般来说,闭区间上的连续函数一定是有界函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T > 0$, 对于任意的 x , 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 在作函数图像时,利用周期性先作出一个周期内的图形,然后按周期拓展.

三、初等函数

1. 反函数的定义

设给定函数 $y=f(x)$, 若将 y 当成自变量, x 当成因变量, 则由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数, $y=f(x)$ 称为原函数 (也称为直接函数), 我们习惯上以 x 为自变量, 则反函数又可以表示为 $y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数图像是关于直线 $y=x$ 对称.

求 $y=f(x)$ 的反函数一般先解出 $x=\varphi(y)$, 然后 x, y 互换得 $y=f^{-1}(x)$ 或 $y=\varphi(x)$.

2. 基本初等函数

(1) 幂函数

函数 $y=x^a$ (a 是实数) 称为幂函数, 它的定义域与 a 的值有关.

当 $a>0$ 时, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 上总是有意义. 其图像都通过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加且无界 (见图 1.1).

当 $a<0$ 时, 图像都过 $(1,1)$, 且在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减少, 以 x 轴和 y 轴为渐近线 (见图 1.2).

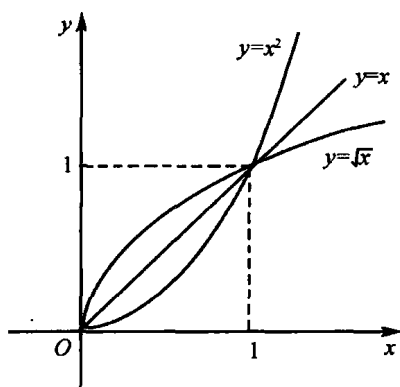


图 1.1

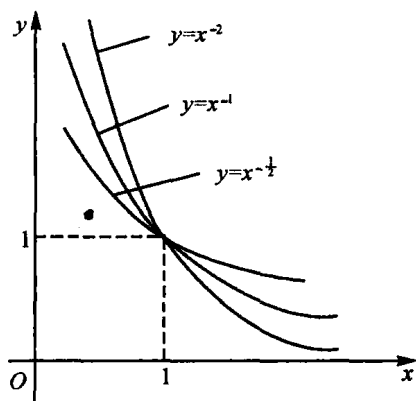


图 1.2

(2) 指数函数

函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$) 称为指数函数. 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其图像在 x 轴上方, 即不论 x 为何值都有 $a^x>0$ 且过 $(0,1)$ 点.

当 $a>1$ 时, 函数严格单调增加且无界, x 轴的负半轴为渐近线.

当 $0<a<1$ 时, 函数严格单调减少且无界, x 轴的正半轴为其渐近线 (见图 1.3).

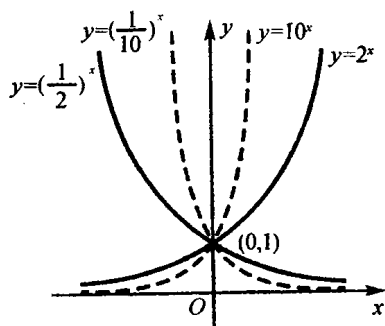


图 1.3

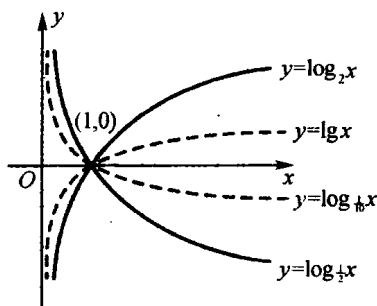


图 1.4

(3) 对数函数

函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 称为对数函数. 定义域为 $(0, +\infty)$, 图像过点 $(1, 0)$.

当 $a > 1$ 时, 函数严格单调增加且无界, 曲线以 y 轴的负半轴为渐近线 (见图 1.4).

当 $0 < a < 1$ 时, 函数严格单调减少且无界, 曲线以 y 轴的正半轴为渐近线 (见图 1.4).

其中以 10 为底的对数 $y = \lg x$ 为常用对数, 以 e 为底的对数称为自然对数, 即 $y = \ln x$.

(4) 三角函数

三角函数共有如下 6 种形式, 它们分别为:

正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$.

正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$.

正割函数 $y = \sec x$, 余割函数 $y = \csc x$.

在高等数学中, 三角函数的自变量一般用弧度制单位.

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[-1, 1]$, 是有界函数, 是奇函数, 其周期为 2π (见图 1.5).

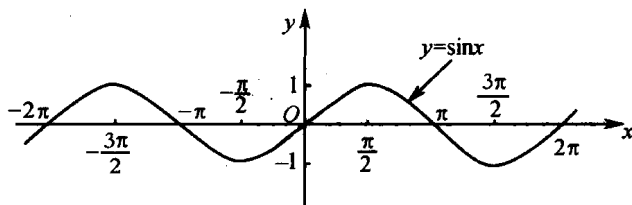


图 1.5

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 是有界函数, 是偶函数, 其周期为 2π (见图 1.6).

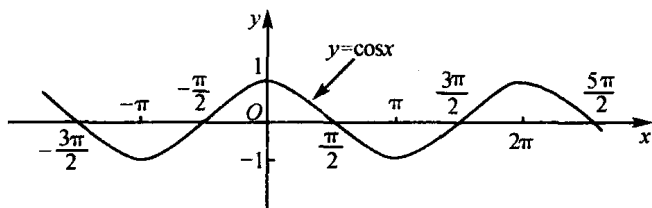


图 1.6

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域是 $\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) (k \in \mathbf{N})$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 其周期为 π (见图 1.7).

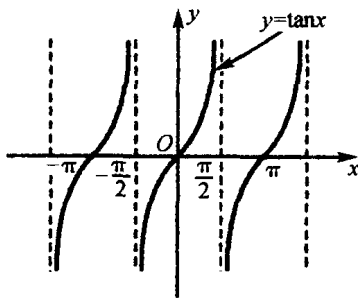


图 1.7

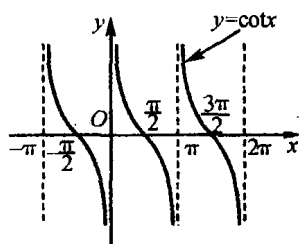


图 1.8

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域是 $((k-1)\pi, k\pi) (k \in \mathbf{N})$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 其周期为 π (见图 1.8).

正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 分别是正弦函数与余弦函数的倒数, 都是以 2π 为周期的函数, 并且在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

(5) 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数.

反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 单调增加且为奇函数 (见图 1.9).

反余弦函数 $y = \arccos x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[0, \pi]$, 是单调减少函数 (见图 1.10).

反正切函数 $y = \arctan x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 单调增加

且为奇函数(见图 1.11).

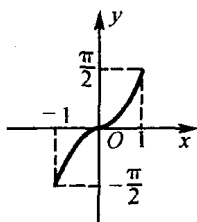


图 1.9

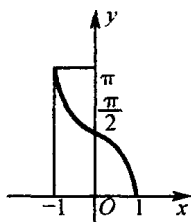


图 1.10

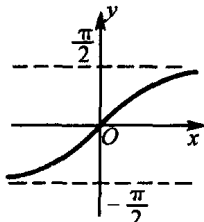


图 1.11

上述 5 类函数统称基本初等函数,希望读者结合图像,记住它们的性质、定义域、值域.

3. 复合函数

设有两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$, 当对任意的 $x \in D$, 通过 u , 变量 y 有确定的值与之对应, 此时 y 是 x 的函数, 称此函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, u 是中间变量.

注意:

(1) 并不是任何两个函数都可以复合成为一个复合函数. 例如, $y=\arcsin u$, $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数, 这是因为 $u=x^2+3 \geq 3$, 它不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

(2) 复合函数可由多个中间变量复合而成.

复合函数的复合过程是非常重要的, 希望读者多加练习.

4. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而形成的函数称为初等函数.

1.1.2 例题解答与思维开发

【例 1.1】 下列函数是同一函数的是

()

- A. $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$
- B. $f(x)=\lg x^2$ 与 $\varphi(x)=2\lg x$
- C. $f(x)=|x|$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$
- D. $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\frac{x^2}{x}$

解: A, B, D 中的函数定义域取值不同, 因而不是同一函数, 只有 C 中两个函数定义域与对应关系都相同, 故应选 C.

【例 1.2】 设 $f(x)$ 为奇函数, 且 $F(x) = f(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$, 其中 a 为大于 0 且不等于 1 的常数, 则 $F(x)$ 是 ()

- A. 偶函数 B. 奇函数
C. 非奇非偶函数 D. 奇偶性与 a 有关

解: 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} \text{所以 } F(-x) &= f(-x) \cdot \left(\frac{1}{a^{-x} + 1} - \frac{1}{2} \right) = -f(x) \cdot \frac{a^x - 1}{2(a^x + 1)} \\ &= f(x) \left[\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right] \\ &= F(x) \end{aligned}$$

因而应选 A.

【例 1.3】 在平面直角坐标系下, 关于 $y = x$ 直线对称的是 ()

- A. $y = e^x$ 的图像与 $y = e^{-x}$ 的图像
B. $y = x^2$ 的图像与 $y = \sqrt{x}$ 的图像 ($x \geq 0$)
C. $y = \log_2 x$ 的图像与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像
D. $y = e^x$ 的图像与 $\ln y = x$ 的图像

解: A、C 两组函数的图像是关于 y 轴对称, D 为图像重合, 所以只有 B 是正确的.

【例 1.4】 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 的定义域是 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[4, +\infty)$
C. $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

解: 要使该函数有定义, 须有 $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

解得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 4$ 所以应选 C.

【例 1.5】 函数 $y = \frac{1}{x} \ln(x+2)$ 的定义域是 ()

- A. $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ B. $x > 0$
C. $x > -2$ D. $x > -2$ 且 $x \neq 0$

解: 由于必须有 $x+2 > 0$, 且 $x \neq 0$, 故其解为 D.

【例 1.6】 设函数 $f(x)$ 的定义域 $[0, 1]$, 则 $f(2x-1)$ 的定义域一定是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
C. $[0, 1]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

解: 因为 $f(x)$ 的取值范围只能是 $[0, 1]$, 故 $f(2x-1)$ 的定义域应满足 $0 \leq 2x-1 \leq 1$, 解得

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

所以应选 B.

【例 1.7】 函数 $f(x) = 2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于 ()

A. $\log_2(x+1)$ B. $1 + \log_2 x$

C. $\frac{1}{2} \log_2 x$ D. $2 \log_2 x$

解: 由 $y = 2^{x-1}$ 得 $x - 1 = \log_2 y$

x 与 y 互换得 $y = 1 + \log_2 x$

所以应选 B.

【例 1.8】 函数 $y = e^x + 1$ 的反函数是 ()

A. $y = \ln(x-1)$ B. $y = \ln(x+1)$

C. $y = \ln x + 1$ D. $y = \ln x - 1$

解: 由 $y = e^x + 1$, 得 $e^x = y - 1$

故 $x = \ln(y - 1)$

x, y 互换得 $y = \ln(x - 1)$

所以应选 A.

【例 1.9】 函数 $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$ 的定义域是_____.

解: 由解析式有意义可得

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ \lg(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

解得 $-2 < x < -1$ 或 $-1 < x \leq 3$

所以答案为 $(-2, -1) \cup (-1, 3]$.

【例 1.10】 设 $f(1+x) = x^2 + 3x + 4$, 则 $f(x) =$ _____.

解: 设 $1+x = t$, 将 $x = t-1$ 代入函数中得

$$f(t) = (t-1)^2 + 3(t-1) + 4 = t^2 + t + 2$$

所以答案为: $f(x) = x^2 + x + 2$.

【例 1.11】 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 求 $f(1), f[f(x)]$.

解: $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 - 2f(x) + 1$$

$$= (x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) + 1.$$

【例 1.12】 设 $f(1+x) = \frac{2+x}{2x-1}$, 求 $f(x)$.

解: 设 $1+x=t$, 则 $x=t-1$.

$$f(t) = \frac{2+(t-1)}{2(t-1)-1} = \frac{t+1}{2t-3}$$

所以
$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

【例 1.13】 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

解:
$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

所以
$$f(x) = x^2 - 2$$

【例 1.14】 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ (2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解: (1) 因为 $f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$

所以函数是奇数.

(2) 因为
$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x) \end{aligned}$$

所以是奇函数.

【例 1.15】 判断下列函数的有界性.

(1) $y = 1 + \arctan x$ (2) $y = 3\sin x + 4\sin 5x$

解: (1) 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|y| = |1 + \arctan x| \leq 1 + |\arctan x| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$$

所以函数是有界的.

(2)
$$\begin{aligned} |y| &= |3\sin x + 4\sin 5x| \\ &\leq 3|\sin x| + 4|\sin 5x| \leq 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

所以函数是有界的.

【例 1.16】 求下列函数的周期.

(1) $y = \sin^2 x$ (2) $y = \sin x + \cos x$

解: (1) 因为 $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, 所以其周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 因为 $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以其周期 $T = 2\pi$.

【例 1.17】 将函数 $y = \ln \cos x^{\frac{1}{2}}$ 由哪几个函数复合而成的.

解: $y = \ln u, u = \cos v, v = x^{\frac{1}{2}}$

【例 1.18】 已知 $f(x) = \ln(1+x), f[\varphi(x)] = x$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式.

解: 由于 $f[\varphi(x)] = \ln[1 + \varphi(x)] = x$

从而有 $1 + \varphi(x) = e^x$

所以 $\varphi(x) = e^x - 1$

【例 1.19】 已知 $f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = x + 1$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式.

解: 因为 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = x + 1$

解得 $\varphi(x) = \ln(x + 1)$

【例 1.20】 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$, 求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解: $f[\varphi(x)] = \frac{1}{[\varphi(x)]^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 2}$

$\varphi[f(x)] = \sqrt{1 + [f(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}{x^2 + 1}$

由本例可知复合函数的次序是不可任意调换的.

1.1.3 同步训练与解答参考

一、选择题

1. 下列各对函数中表示同一函数的是 ()

A. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2}{x}$

B. $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

C. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x}{x}$

D. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 与 $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

2. 下列函数定义域为 $[-1, 1]$ 的是 ()

A. $y = \ln(1 - x^2)$ B. $y = e^{\sin x}$

C. $y = \sqrt{2 - x^2} + \arcsin x$ D. $y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

3. $y = \sqrt{x^2 - 1} + \lg(x + 2)$ 的定义域为 ()