普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

数学分析

（第三册）

伍胜健　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

数 学 分 析

(第 三 册)

伍胜健 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析·第三册/伍胜健编著. —北京：北京大学出版社，2010. 8
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 978-7-301-17675-7
Ⅰ. 数… Ⅱ. 伍… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 161160 号

书　　名：数学分析(第三册)
著名责任者：伍胜健　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-17675-7/O·0824
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者：北京飞达印刷有限责任公司
经 销 者：新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5 开本　10.375 印张　280 千字
2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：22.00 元

内 容 简 介

本书是综合性大学和高等师范院校数学系本科生数学分析课程的教材. 全书共分三册. 第一册共六章, 内容为函数、序列的极限、函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分; 第二册共六章, 内容为定积分、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数; 第三册共五章, 内容为n维欧氏空间与多元函数的极限和连续、多元函数微分学、重积分与广义重积分、曲线积分与曲面积分及场论、含参变量积分. 本书每章配有适量习题, 书末附有习题答案或提示, 供读者参考.

作者多年来在北京大学为本科生讲授数学分析课程, 按照教学大纲, 精心选取教学内容并对课程体系优化整合, 经过几届学生的教学实践, 收到了良好的教学效果. 本书注重基础知识的讲述和基本能力的训练, 按照认知规律, 以几何直观、物理背景作为引入数学概念的切入点, 对内容讲解简明、透彻, 做到重点突出、难点分散, 便于学生理解与掌握.

本书可作为高等院校数学院系、应用数学系本科生的教材, 对青年教师本书也是一部很好的教学参考书. 为了帮助读者学习, 本书配有学习辅导书《数学分析解题指南》(林源渠、方企勤编　书号: ISBN 978-7-301-06550-1; 定价: 24.00 元)供读者参考

作 者 简 介

伍胜健　北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 1992 年在中国科学院数学研究所获博士学位. 主要研究方向是复分析. 在北京大学长期讲授数学分析、复变函数、复分析等课程.

目　录

第十三章　多元函数的极限和连续

在本套教材的第一册与第二册中，我们已经系统地学习了一元微积分与级数理论. 但在理论与实践中，仅仅一元函数远远不能满足需要. 这是因为，在许多事物的变化过程中，一个变量的变化过程往往依赖于多个变量. 就拿我们每天生活的空间来说，它是一个三维的立体空间，因此几乎所有跟空间位置有关的变量一般都要用空间点的坐标来描述，从而它们就不太可能用一元函数来刻画.

另外，即使在数学研究中，由于一元函数的研究仅仅是局限于数轴 $\mathbb{R}$ 的子集上定义的函数，它们基本上已不再是现代数学研究的主要对象. 在当今的数学研究中，大部分的研究对象都是关于高维空间 ($n(n \geqslant 2)$ 维空间) 的一些问题. 因此，我们对多元函数 (映射) 的学习是十分必要的.

多元微积分的主要内容是将一元函数的微积分理论推广到高维空间上的多元函数. 大家会发现，我们将平行于一元微积分的基本理论来研究多元微积分. 值得指出的是，由于多元函数的微积分理论是建立在一元微积分的基础之上的，读者如果具备一元微积分的坚实基础，并且有较好的空间想象能力，就能学好多元微积分.

§13.1　欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

13.1.1　欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

在本节中，我们先来讨论多元函数定义域的问题. 多元函数的定义域是高维空间的子集，这些子集相对于 $\mathbb{R}$ 中的子集将更为复杂. 为了研究高维空间的子集，我们必须先研究一下它们所在的空间

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ 个}}.$$

读者应特别注意当 $n=2$ 时的情形. 多元微积分与一元微积分的许多本质区别将在 $n=1$ 和 $n=2$ 两者之间发生, 对于 $n>2$ 的情形则与 $n=2$ 的情形具有很大的相似性.

在以下讨论中我们将假定 $n\geqslant 2$. 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个**点**或**向量**, $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**或**分量**. 今后, 我们也常常用列向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 来表示同一个 $\boldsymbol{x}$, 这里 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的转置. 另外, 记 $\mathbf{0}=\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{n\text{ 个}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的原点或零向量. 在代数课程中, 我们已经在 $\mathbb{R}^n$ 中引进了加法与数乘运算. 由于在今后要经常用到它们, 在这里我们做一下简单介绍.

$\mathbb{R}^n$ 中的加法运算定义如下: 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

并称 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**和**.

$\mathbb{R}^n$ 中的数乘运算定义如下: 设 $\alpha\in\mathbb{R},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

并称 $\alpha\boldsymbol{x}$ 为 α 与 $\boldsymbol{x}$ 的**数乘**.

这两种运算称为 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算. 在 $n=2,3$ 时, 它们具有鲜明的几何意义. 对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 容易验证它们满足:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$;

(3) **分配律**　$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.

另外, 在加法运算中, 存在零元素 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$, 它满足: 对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x};$$

在数乘运算中, 存在单位元 $1\in\mathbb{R}$, 它满足: 对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$$

对 $\mathbb{R}^n$ 赋予上述线性运算后, 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为一个 n **维向量空间** (简称**空间**). 在这个空间中, 它还有一个重要的运算 —— 内积运算, 它的定义如下:

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ **的内积**定义为

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\in\mathbb{R}.$$

从内积的定义容易看出它具有以下一些基本性质:

(1) **正定性** 对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\geqslant 0$, 并且上述等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

(2) **对称性** 对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$;

(3) 对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}$;

(4) 对于 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 有 $(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\alpha(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$.

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有了内积运算后, 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为**欧几里得** (Euclid) **空间**或**欧氏空间**. 利用内积运算, 我们定义向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的**模**如下:

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

在代数学中, 我们已经知道, $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 中两个非零向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle,$$

其中 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角. 由此我们可以清楚地知道内积的几何意义.

利用向量的模, 我们可以给出 $\mathbb{R}^n$ 中两个点之间的距离的定义.

定义 13.1.1 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个点, 则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**定义为

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

显然, 在 $\mathbb{R},\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中, 两个点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离即是连接 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的线段的长度. 请读者注意, 我们用 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ (而不是用 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$) 来表示 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 之间的距离主要是为了记号简便, 且这个记号与 $\mathbb{R}$ 中两点之间距离的相应记号保持一致. 由于对于 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 我们有 $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}-0| = |\boldsymbol{x}|$, 因此, 今后我们也用 $|\boldsymbol{x}|$ 来记 $\boldsymbol{x}$ 的模.

从距离的定义容易推出它满足以下的性质:

(1) **正定性**　对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geqslant 0$, 并且 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

(2) **对称性**　对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$;

(3) **三角不等式**　对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, 有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$.

距离与向量的模两个概念是可以相互转化的, 因此我们也称定义了距离后的空间 $\mathbb{R}^n$ 为欧氏空间. 当 $n=2$ 时, 我们常用 (x,y) 来表示平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点; 当 $n=3$ 时, 用 (x,y,z) 来表示空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点. 今后在 $\mathbb{R}^2$ 中, 为了记号方便, 我们也用 $\boldsymbol{i}$ 来表示单位向量 $(1,0)$, 用 $\boldsymbol{j}$ 来表示单位向量 $(0,1)$, 并称它们为**单位坐标向量**. 因此, 对于 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

相应地, 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 我们则记 $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$. 于是对于 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

例 13.1.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是一个 $m\times n$ 矩阵, 其中 $a_{ji}\in\mathbb{R}(j=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n)$. 定义

$$\|\boldsymbol{A}\|=\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对于 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 证明 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leqslant\|\boldsymbol{A}\||\boldsymbol{x}|$.

证明 利用柯西-施瓦茨不等式我们有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|^2&=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right)^2\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\\&=\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=(\|\boldsymbol{A}\||\boldsymbol{x}|)^2.\end{aligned}$$

对上面不等式的两边分别开方即得所证.

注 $\|\boldsymbol{A}\|=\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**范数**, 在本书后面章节我们还会遇到它.

13.1.2 点列极限

下面我们给出欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中邻域的概念.

定义 13.1.2 设 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n,\delta>0$, 称集合

$$U(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\}$$

为以 $\boldsymbol{x}_0$ 为心的 δ **邻域**; 称集合 $U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)=U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$ 为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ **去心邻域**.

上述定义的邻域通常称为**球形邻域**. 我们经常要用到的另外一种邻域是方形邻域. 设 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n,\delta>0$, 定义

$$N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n):|x_i-x_i^0|<\delta,i=1,2,\cdots,n\},$$

并称它为 $\boldsymbol{x}_0$ 的**方形邻域**. 容易证明这两种邻域有下面的包含关系:

$$U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset N(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset U(\boldsymbol{x}_0,\sqrt{n}\delta).$$

另外, 我们称 $N_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)=N(\boldsymbol{x}_0,\delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$ 为**方形去心邻域**.

在 $\mathbb{R}$ 中, 我们也曾经给出过邻域的定义. 容易看出, $\mathbb{R}$ 中球形和方形两种邻域的定义是一样的. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域即为以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心, δ 为半径的圆盘; 而方形邻域则是以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心, 各边均平行于坐标轴, 边长为 2δ 的正方形. 对于 $\mathbb{R}^3$ 的情形, $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域是以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心, δ 为半径的球体, 方形邻域则为一立方体.

有了邻域后, 我们可以引进 $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛的概念. 在这里我们需要特别指出的是, 由于多元微积分的理论本质上是将一元微积分的理论从低维空间 $\mathbb{R}$ 向高维空间 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 推广, 在推广的过程中, 有时我们可以将低维的概念重新给予描述, 当这种描述不依赖于低维的特性时, 就可以很容易将低维的概念推广到高维情形. 例如, 在讨论 $\mathbb{R}$ 中序列的极限时, 一个序列 $\{x_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$ 的实际意义是: 当 k 充分大时, x_k 与 a 的距离可以小于预先任意给定的正数. 对于函数极限 $\lim\limits_{n\to a}f(x)=A$ 也是如此, 它的一种描述是: 当 x 与 a 的距离很小时, $f(x)$ 与 A 的距离也可以小于预先任意给定的正数. 因此在研究高维空间的点列极限和函数极限时, 用两个点的距离变化来精确描述这些极限过程就是水到渠成的事情了. 读者应该注意慢慢地熟悉并掌握这种推广的方法.

由上面分析, 高维空间点列极限可以自然地定义为: 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, 若存在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 使得有 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0|=0$, 则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ **收敛于** $\boldsymbol{x}_0$, 并称 $\boldsymbol{x}_0$ 为该点列的**极限**. 用邻域来精确描述这一概念, 我们有以下定义.

定义 13.1.3 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, 若存在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 使得对于 $\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N}$, 当 $k>K$ 时, 有 $|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0|<\varepsilon$, 即 $\boldsymbol{x}_k\in U(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$, 则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是**收敛点列**, 并称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ **收敛于** $\boldsymbol{x}_0$, 记做 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$. 这

时也称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限**. 若不存在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0|=0$, 则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ **发散**.

我们以后总用 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ (而不用 $\{\boldsymbol{x}_n\}$) 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 并记 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 和 $\boldsymbol{x}_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)\in\mathbb{R}^n, k=1,2,\cdots$. 关于点列极限, 下面的结果是今后常常用到的.

定理 13.1.1 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$ 的充分必要条件是: 对于 $\forall i\ (1\leqslant i\leqslant n)$, 有

$$\lim_{k\to\infty}x_i^k=x_i^0.$$

证明 对于 $\forall\, i(1\leqslant i\leqslant n)$ 及 $\forall\, k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$|x_i^k-x_i^0|\leqslant|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0|\leqslant\sum_{j=1}^n|x_j^k-x_j^0|.$$

由此不等式容易推出定理 13.1.1. 证毕.

下面我们来讨论一下点列极限的一些基本性质. 我们称一个集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是**有界的**, 若存在 $M>0$, 使得对于 $\forall\boldsymbol{x}\in E$, 有 $|\boldsymbol{x}|\leqslant M$. 特别地, 我们称一个点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是有界的, 若存在 $M>0$, 使得对于 $\forall\, k\in\mathbb{N}$, 有 $|\boldsymbol{x}_k|\leqslant M$.

读者可以将 $\mathbb{R}$ 中序列极限的一些在高维空间有意义的性质平行地推广至 $\mathbb{R}^n$ 中的点列. 例如, 在 $\mathbb{R}^n$ 中我们有:

性质 13.1.2 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个收敛点列, 则其极限必是唯一的.

性质 13.1.3 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个收敛点列, 则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 必有界.

性质 13.1.4 设 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{y}_0$, 再设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则有

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k+\beta\boldsymbol{y}_k)=\alpha\boldsymbol{x}_0+\beta\boldsymbol{y}_0$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$.

对于以上性质, 我们只证性质 13.1.4 的 (2), 读者应该注意这个性

质说的是两个收敛点列的内积收敛到点列极限的内积.

证明　对于 $\forall i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, 有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0 \quad 及 \quad \lim_{k\to\infty} y_i^k = y_i^0.$$

由序列极限的性质有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k y_i^k = x_i^0 y_i^0,$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{y}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i^k y_i^k = \sum_{i=1}^n x_i^0 y_i^0 = \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{y}_0.$$

证毕.

注　上面关于点列内积的极限可以看成是 $\mathbb{R}$ 中序列乘积极限的推广. 但值得注意的是, 当 $n\geqslant 2$ 时, 在 $\mathbb{R}^n$ 中有些结论与 $\mathbb{R}$ 中相对应的结论是有区别的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, 当两个序列存在非零的极限时, 它们对应项乘积组成的序列的极限存在并且非零. 但是这个结论显然在 $\mathbb{R}^n (n\geqslant 2)$ 不成立, 因为此时两个非零向量的内积可以是零 (这时我们称它们**正交**). 读者在今后的学习中要特别注意高维与一维的这些不同之处.

例 13.1.2　对 $k=1,2,\cdots$, 设

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{\sqrt{k}\sin k}{k}, k^4\mathrm{e}^{-k^2}, \cos k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right), k\tan\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{R}^4,$$

求 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k$.

解　由于

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k}\sin k}{k}=0,\quad \lim_{k\to\infty}k^4\mathrm{e}^{-k^2}=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\cos k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=0,\quad \lim_{k\to\infty}k\tan\frac{1}{k}=1,$$

我们有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=(0,0,0,1)$.

13.1.3　聚点

聚点是极限理论中重要的概念. 我们曾在 $\mathbb{R}$ 中讨论过它 (见第一

册). 对于 $\mathbb{R}^n$ 的一般情形, 聚点的定义如下:

定义 13.1.4 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个给定的集合, 若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的任何 δ 邻域 $U(\boldsymbol{x},\delta)(\delta>0)$ 都有 E 中异于 $\boldsymbol{x}$ 的点, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的**聚点或极限点**.

显然, 将上述定义中的球形邻域换成方形邻域可得到聚点的等价定义. 另外, 我们容易看出: 若 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的聚点, 则 $U(\boldsymbol{x},\delta)(\delta>0)$ 中必有 E 中的无限多个点. 值得特别指出的是, $\boldsymbol{x}$ 是 E 的聚点与 $\boldsymbol{x}$ 是否属于 E 无关.

由聚点的定义, 若 $\boldsymbol{x}$ 不是一个集合 E 的聚点, 则存在 $\delta_0>0$, 使得 $U_0(\boldsymbol{x},\delta_0)$ 中没有 E 的点. 特别地, 当 $\boldsymbol{x} \in E$ 且 $\boldsymbol{x}$ 不是 E 的聚点时, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的**孤立点**. 此时必存在 $\delta_0>0$, 使得 $U(\boldsymbol{x},\delta_0)\cap E=\{\boldsymbol{x}\}$.

利用点列的极限, 我们可以描述一个集合的聚点.

定理 13.1.5 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空, 则 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的聚点的充分必要条件是: 存在 E 中一个两两不同的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$.

定理 13.1.5 的证明与 $\mathbb{R}$ 中的情形类似, 请读者自己给出.

例 13.1.3 设 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$: 对于 $\forall i\,(1\leqslant i\leqslant n), x_i$ 是有理数$\}$, 试求 E 的聚点集合.

解 任意取定 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, 对于 $\forall\delta>0$, 我们取 $\boldsymbol{x}_0$ 的方形邻域 $N(\boldsymbol{x}_0,\delta)$. 因对于 $\forall i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, 在 $(x_i^0-\delta,x_i^0+\delta)$ 内必存在有理数 $x_i'\neq x_i^0$, 故 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 是 $N(\boldsymbol{x}_0,\delta)\cap E$ 中的点, 且异于 $\boldsymbol{x}_0$, 从而 $\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点. 由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性知, E 的聚点集合是 $\mathbb{R}^n$.

注 若集合 A 中每一个点的任何邻域中都有集合 B 中的点, 则称 B 在 A 中**稠密**. 上述例子说明 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密. 作为练习, 请读者将 E 中的点排成一个点列.

13.1.4 开集与闭集

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是一个给定的集合, 我们将 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补集 $\mathbb{R}^n\backslash E$ 记为 E^c. 利用邻域的概念, 我们可以将 $\mathbb{R}^n$ 中的点关于 E 做一分类.