



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

高等数学 (经济类)

第3版

蒋兴国 吴延东 主 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

高等数学

(经济类)

第3版

主编 蒋兴国 吴延东
参编 周秀珍 钱 林 孟国明 翟高岭 蔡苏淮

机械工业出版社

本书系普通高等教育“十一五”国家级规划教材,供高等院校经济类各专业选用,也可供其他相关专业选用。

本书系统并有重点地介绍了有关微积分的知识,选编了相当数量的典型例题.为了提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力,介绍了一定数量的经济应用例题.

考虑到中学数学教材的变化,本书预备知识中增加了被中学删去的但高等数学所必需的知识点,另有一章介绍了微积分数学模型,供选修用.

本书结构严谨,逻辑清晰,叙述详尽,通俗浅显,例题较多,便于教与学.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经济类/蒋兴国,吴延东主编. —3版. —北京:机械工业出版社,2011.8
普通高等教育“十一五”国家级规划教材 普通高等工科院校基础课规划教材
ISBN 978-7-111-34387-5

I. ①高… II. ①蒋…②吴… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 123000 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰

责任校对:陈延翔 封面设计:赵颖喆

责任印制:杨 曦

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2011 年 8 月第 3 版第 1 次印刷

184mm×240mm·30.25 印张·303 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-34387-5

定价:49.80 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

普通高等工科院校基础课规划教材

编 审 委 员 会

顾 问：黄鹤汀 左健民 高文龙
章 跃

主 任 委 员：殷翔文

副主任委员：陈小兵 刘金林 陈 洪
魏贤君 李顺利

秘 书：陈建华

委 员：(排名不分先后)

陆国平 何一鸣 李秋新
陈建华 张祖凤 郑 丹

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的 21 世纪. 这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德, 明确的历史责任感和社会使命感, 较强的创新精神、创新能力和实践能力, 宽广的知识面和扎实的基础. 基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力, 关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力. 由于基础学科本身的特点, 以及某些短期功利思想的影响, 不少人对大学基础教育的认识相当偏颇, 我们有必要在历史的回眸中借前车之鉴, 在未来的展望中创革新之路. 我们必须认真转变教育思想, 坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导, 以培养新世纪高素质人才为宗旨, 以提高人才培养质量为主线, 以转变教育思想观念为先导, 以深化教学改革为动力, 以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点, 以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心, 努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才.

基于上述考虑, 中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅(原江苏省教委)和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会, 组织编写了大学基础课程系列教材, 作为加强教学基本建设的一种努力.

这套教材力求具有以下特点:

- (1) 科学定位. 本套教材主要用于应用性本科人才的培养.
- (2) 综合考虑、整体优化, 体现“适、宽、精、新、用”. 所谓“适”, 就是要深浅适度; 所谓“宽”, 就是要拓宽知识面; 所谓“精”, 就是要少而精; 所谓“新”, 就是要跟踪应用学科前沿, 推陈出新, 反映时代要求; 所谓“用”, 就是要理论联系实际, 学以致用.
- (3) 强调特色. 就是要体现一般工科院校的特点, 符合一般工科院校基础课教学的实际要求.
- (4) 以学生为本. 本套教材应尽量体现以学生为本, 以学生为中心的教育思想, 不为教而教. 注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力, 为学生今后持续创造性的学习打好基础.

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前, 但由于是一种新的探索, 难免有这样那样的缺点甚至错误, 敬请广大读者不吝指教, 以便再版时修正和完善.

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合, 在此, 一并表示衷心感谢.

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会
主任 殷翔文

第 3 版前言

本书第 3 版在第 2 版的基础上,根据编者的多年教学经验,按照数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”中相关内容,进行修订.

第 3 版保持第 2 版的系统和风格及结构严谨,逻辑清晰,叙述详尽,通俗浅显,例题较多,便于自学等特点,同时注意吸收了当前教材改革中一些成功的经验.

第 3 版对第 4 章进行了重写,还对其余几章的内容作了修订和补充.第 4 章重写工作由蔡苏淮和孟国明两位老师完成,其余几章的修订和补充及全书定稿由蒋兴国老师完成.

考虑到应届生参加考研的人数在增加,第 3 版在第 2~7 章后增加了总习题,其中许多习题选自历届全国硕士研究生入学数学考试试题.该部分内容可供学有余力和准备考研的学生选用,也可作为教师习题课的备选内容.

为了便于学生学习,编写了与第 3 版配套的学习参考书《高等数学(经济类)学习辅导》.该书给出配套教材中部分习题的详解.

本书第 3 版的出版,得到了机械工业出版社和扬州大学等单位各级领导的大力支持,编者在此表示感谢,同时对机械工业出版社各位编辑细致艰巨的工作表示谢意.

编者力求编好该书,囿于水平,难免存在问题.讹漏粗疏之处,恳请同仁及读者批评指教.

编者

2011 年 8 月

第 2 版前言

本教材第 1 版自 2002 年出版以来,被不少高校采用.历经几年的教学实践,编者根据教学中积累的经验,同时吸收其他使用本教材的教学同仁及学生所提的宝贵意见,对第 1 版进行了修订.

同第 1 版一样,第 2 版仍面向广大地方性普通高校的学生,主要面向应用性本科人才的培养.该教材(第 2 版)适用于经济类本科各专业,亦可供其他相关专业选用,适用面较广,且已被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材.

该教材(第 2 版)在力求保持全书结构严谨的基础上,将编者多年的教学经验有机地融于教材,叙述详尽,通俗浅显,配置较多例题,做到教者有取舍的余地,学者便于预习和复习.在教材中,引进新的概念时能做到尽量结合几何意义,尽量结合学生已经掌握的知识,甚至中学阶段的数学知识.

同第 1 版一样,第 2 版在每一章后有一篇阅读材料,或介绍微积分发展史,或介绍数学大师——如牛顿、莱布尼茨、欧拉、柯西等,以期调动学生学习数学的积极性,提高学生的数学素养.

本教材第 1 版在扬州大学、淮阴工学院等高校使用,总体上师生评价较好.第 1 版使用一学期后,我们召开了扬州大学使用该教材相关专业学生座谈会,大部分同学表示该书大部分章节讲述清晰,通俗浅显,便于课后复习.使用该教材的教师基本肯定本教材,并提出了中肯意见.

第 2 版对第 1、2 章进行了重写,对其余几章作了部分的修订,以期叙述更准确,表达更清晰.

第 2 版的第 1、2 章的重写工作由蔡苏淮老师完成,其余几章的修订及全书定稿工作由蒋兴国老师完成.

该书自第 1 版出版以来,得到机械工业出版社、扬州大学、淮阴工学院等单位各级领导的支持,编者在此深表谢意.第 2 版仍由东南大学罗庆来教授主审并提出许多宝贵意见.

与第 1 版一样,该书第 2 版得到扬州大学教材基金的赞助.

力求编好本书,力求得到读者的好评,仍是编者一直孜孜以求的目标,但限于水平,难免有讹漏粗疏之处,敬祈同仁及广大读者批评指教.

编者

2006 年 8 月

目 录

序

第 3 版前言

第 2 版前言

第 1 章 预备知识	1
1.1 实数	1
1.2 常用数集	2
1.3 函数	3
1.3.1 常量与变量	3
1.3.2 函数概念	3
1.3.3 函数的常用表示法	4
习题 1.3	6
1.4 函数的几种特性	7
1.4.1 单调性	7
1.4.2 有界性	7
1.4.3 奇偶性	8
1.4.4 周期性	8
习题 1.4	9
1.5 反函数	10
习题 1.5	10
1.6 基本初等函数	10
1.7 初等函数	15
1.7.1 复合函数	15
1.7.2 初等函数	17
习题 1.7	18
1.8 极坐标	18
习题 1.8	20
1.9 简单的经济活动中的函数	21
1.9.1 总成本函数 总收入函数 总利润函数	21
1.9.2 需求函数与供给函数	22
习题 1.9	23
阅读材料 函数概念的产生与发展	24

第 2 章 极限与连续	28
2.1 数列的极限	28
2.1.1 数列的概念	28
2.1.2 数列的极限	29
2.1.3 收敛数列的性质	32
习题 2.1	33
2.2 函数的极限	34
2.2.1 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	34
2.2.2 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	35
2.2.3 左极限与右极限	37
2.2.4 极限的性质	38
习题 2.2	38
2.3 极限的运算法则及存在准则	39
2.3.1 极限的四则运算法则	39
2.3.2 极限存在准则	41
2.3.3 两个重要极限	43
习题 2.3	46
2.4 无穷小量与无穷大量	47
2.4.1 无穷小量及其性质	47
2.4.2 无穷小的比较	49
2.4.3 无穷大	50
习题 2.4	52
2.5 函数的连续性	53
2.5.1 变量的增量	53
2.5.2 连续函数的概念	53
2.5.3 函数的间断点及其分类	55
2.5.4 连续函数的运算与初等函数的连续性	57
2.5.5 闭区间上连续函数的性质	60
习题 2.5	61
总习题 2	62
阅读材料 极限思想及其相关的重要	

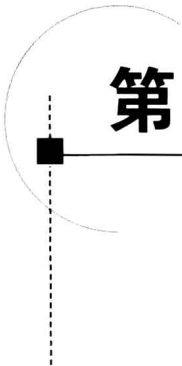


人物	65	3.8 洛必达法则	118
第3章 一元函数微分学	70	3.8.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	118
3.1 导数概念	70	3.8.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	120
3.1.1 实践中的变化率问题	70	3.8.3 其他类型的未定式	121
3.1.2 导数的定义	72	习题 3.8	123
3.1.3 导数的几何意义	74	3.9 泰勒公式	124
3.1.4 可导性与连续性的关系	74	3.9.1 关于 $x=0$ 的泰勒公式	125
3.1.5 求导举例	76	3.9.2 关于 $x=x_0$ 的泰勒公式	128
习题 3.1	78	3.9.3 几个函数的麦克劳林展开式	129
3.2 求导法则	79	3.9.4 其他例题	131
3.2.1 函数和、差、积、商的求导法则	79	习题 3.9	133
3.2.2 反函数的求导法则	82	3.10 函数单调性的判别	134
3.2.3 复合函数求导法则	84	3.10.1 函数单调性判别法	134
3.2.4 基本求导法则与公式	88	3.10.2 利用单调性证明不等式	135
习题 3.2	89	习题 3.10	136
3.3 高阶导数	91	3.11 函数的极值与最大(小)值	136
习题 3.3	94	3.11.1 函数的极值及其求法	136
3.4 隐函数与参数方程确定的函数的 导数	94	3.11.2 函数的最大(小)值	139
3.4.1 隐函数的导数与对数求导法	94	习题 3.11	142
3.4.2 参数方程确定的函数的导数	96	3.12 曲线的凸性、拐点与渐近线	143
习题 3.4	98	3.12.1 曲线的凸性与拐点	143
3.5 微分	99	3.12.2 曲线的渐近线	145
3.5.1 微分的概念	99	习题 3.12	147
3.5.2 微分的基本公式与运算法则	102	3.13 函数作图	147
3.5.3 微分在近似计算中的应用	103	习题 3.13	150
习题 3.5	104	总习题 3	150
3.6 导数概念在经济学中的应用	105	阅读材料 微积分的酝酿与诞生	153
3.6.1 边际和边际分析	105	第4章 一元函数积分学	157
3.6.2 弹性与弹性分析	106	4.1 原函数与不定积分的概念	157
习题 3.6	110	4.1.1 不定积分的概念	157
3.7 微分中值定理	110	4.1.2 不定积分的性质	160
3.7.1 定理的引入	110	4.1.3 不定积分基本积分公式	161
3.7.2 定理的证明	111	习题 4.1	164
3.7.3 定理的补充说明	112	4.2 换元积分法	164
3.7.4 例题	114	4.2.1 第一类换元法	164
习题 3.7	117	4.2.2 第二类换元法	171

习题 4.2	176	5.2 一阶微分方程	232
4.3 分部积分法	177	5.2.1 可分离变量的微分方程	232
习题 4.3	181	5.2.2 齐次微分方程	236
4.4 简单有理函数的积分法	182	5.2.3 一阶线性微分方程	239
4.4.1 有理函数及简单性质	182	习题 5.2	244
4.4.2 有理真分式的分解	183	5.3 高阶微分方程	246
4.4.3 部分分式的积分	184	5.3.1 二阶线性微分方程解的结构	246
* 4.4.4 三角函数有理式的积分	186	5.3.2 二阶常系数齐次线性微分 方程	249
习题 4.4	188	5.3.3 二阶常系数非齐次线性微分 方程	254
4.5 定积分的概念与性质	189	5.3.4 可降阶的高阶微分方程	260
4.5.1 曲边梯形的面积	189	习题 5.3	264
4.5.2 变速直线运动的路程	190	5.4 微分方程在经济学中的应用	266
4.5.3 定积分的定义	190	习题 5.4	272
4.5.4 定积分的性质	193	5.5 差分方程的基本概念	272
习题 4.5	196	习题 5.5	276
4.6 微积分基本定理	197	5.6 常系数线性差分方程	276
习题 4.6	201	5.6.1 一阶常系数线性差分方程	277
4.7 定积分的计算	202	5.6.2 二阶常系数线性差分方程	283
4.7.1 定积分的换元积分法	202	习题 5.6	289
4.7.2 定积分的分部积分法	206	5.7 差分方程在经济学中的简单 应用	290
习题 4.7	208	习题 5.7	293
4.8 定积分的应用	209	总习题 5	293
4.8.1 定积分的微元法	209	阅读材料 微分方程发展的四个 阶段	296
4.8.2 定积分在几何上的应用	210	第 6 章 多元函数微积分学	301
4.8.3 定积分在经济方面的应用	214	6.1 空间解析几何初步	301
习题 4.8	216	6.1.1 空间直角坐标系与空间的点	301
4.9 广义积分	216	6.1.2 空间曲面与方程	303
4.9.1 无穷区间上的积分	216	习题 6.1	307
4.9.2 无界函数的积分	218	6.2 多元函数的概念	308
4.9.3 Γ 函数	220	6.2.1 区域	308
习题 4.9	221	6.2.2 二元函数的定义	309
总习题 4	221	6.2.3 二元函数的极限	311
阅读材料 莱布尼茨——博学多才的 数学符号大师	225	6.2.4 二元函数的连续性	312
第 5 章 微分方程及差分方程初步	227		
5.1 微分方程的基本概念	227		
习题 5.1	231		



习题 6.2	314	7.2.1 正项级数的审敛法	365
6.3 偏导数	314	7.2.2 任意项级数的审敛法	372
习题 6.3	321	习题 7.2	375
6.4 全微分	321	7.3 幂级数	377
6.4.1 全微分的定义	321	7.3.1 函数项级数的概念	377
6.4.2 全微分在近似计算中的应用	326	7.3.2 幂级数	378
习题 6.4	327	习题 7.3	383
6.5 多元复合函数微分法与隐函数 微分法	327	7.4 函数展开成幂级数	384
6.5.1 多元复合函数微分法	327	7.4.1 泰勒级数	384
6.5.2 隐函数微分法	332	7.4.2 函数的幂级数展开	385
习题 6.5	334	习题 7.4	388
6.6 多元函数的极值和最大(小) 值	335	7.5 幂级数在近似计算中的应用	389
6.6.1 多元函数的极值与最大值、 最小值	335	习题 7.5	392
6.6.2 条件极值	338	7.6 广义积分的审敛法	392
6.6.3 最小二乘法	339	7.6.1 无穷限积分敛散性的判别	392
习题 6.6	341	7.6.2 瑕积分敛散性的判别	394
6.7 二重积分	342	习题 7.6	395
6.7.1 二重积分的概念与性质	342	总习题 7	396
6.7.2 二重积分的计算	345	阅读材料 级数的妙用	399
习题 6.7	353	*第8章 数学模型简介	403
总习题 6	353	8.1 数学模型概述	403
阅读材料 数学大师欧拉(Euler)	357	8.2 数学建模举例	407
第7章 无穷级数	359	8.2.1 存储模型	407
7.1 常数项级数的概念和性质	359	8.2.2 人口预测模型	410
7.1.1 常数项级数的概念	359	8.2.3 状态随时间演化模型	413
7.1.2 级数的基本性质	362	8.2.4 近似公式	417
习题 7.1	364	8.2.5 动态规划	424
7.2 常数项级数的审敛法	365	习题 8.2	433
		部分习题参考答案	437
		参考文献	471



第 1 章

预 备 知 识

微积分是关于运动和变化的数学. 哪里有运动和变化, 哪里就有变量. 变量之间的依赖关系反映了事物运动的规律. 函数正是变量之间关系的一种体现. 函数是微积分学中重要的基本概念, 是微积分学的研究对象.

本章在复习中学有关函数内容的基础上, 进一步研究函数的性质.

1. 1 实数

由于微积分学主要是在实数范围内研究函数, 当未加特别说明时, 本书所讨论的数都是实数. 先简单回顾与实数有关的基本知识.

1. 实数分为有理数和无理数两类

有理数是能被表示成两个整数之比的数(分母不为 0), 即整数、有限小数、无限循环小数, 统称为有理数. 称无限不循环小数为无理数.

2. 实数的基本性质

(1)(有序性)任意两个实数 a, b , 必满足下述关系式之一:

$$a < b, a = b, a > b.$$

(2)(稠密性)任意两个不相等的实数之间存在实数.

建立数轴后, 实数集与数轴上的点一一对应. 常用一个字母代表某个实数, 同时又可以用此实数为坐标的数轴上的点.

(3)实数集合对于加、减、乘、除(除数不为 0)运算封闭, 即运算结果仍是实数.

3. 实数的绝对值

实数 a 的绝对值记为 $|a|$, 定义 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$ 其几何意义是数轴上的点 a 到原点的距离. $|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离. 实数绝对值有下列性质:

- (1) $|a| \geq 0$, $|a| = 0$ 当且仅当 $a = 0$.
- (2) $|a| = |-a|$, $|a| = \sqrt{a^2}$.
- (3) $-|a| \leq a \leq |a|$, $|a| \leq B (B > 0)$ 等价于 $-B \leq a \leq B$.
- (4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式).
- (5) $|a-b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.
- (6) $|ab| = |a| |b|$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.

1.2 常用数集

- (1) 全体实数的集合, 记为 $\mathbf{R}$.
- (2) 全体自然数的集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 记为 $\mathbf{N}$.
- (3) 全体正整数的集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$, 记为 $\mathbf{N}^+$.
- (4) 全体有理数的集合, 记为 $\mathbf{Q}$.
- (5) 区间(设 $a < b$)也是常用的实数集合, 包括有限区间和无限区间.
 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.
 开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
 半开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.
 以上几种区间称为有限区间.

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, \quad (-\infty, a] = \{x | x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, \quad (-\infty, a) = \{x | x < a\},$$

$$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

以上几种区间称为无限区间. 其中 $+\infty$, $-\infty$ 分别读作正无穷, 负无穷, 它们不表示任何数, 仅仅是记号.

当不需要明辨所讨论区间类型时, 常简称其为区间, 并记为 I .

邻域 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) (\delta > 0)$ 为以 x_0 为中心的邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 称正数 δ 为该邻域的半径. 此邻域也可表示为 $\{x | |x - x_0| < \delta\}$, 而集合 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$. 显然, $\dot{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

1.3 函数

1.3.1 常量与变量

定义 1-1 在观察某事物的过程中,若某个量的取值始终不变,则称该量为**常量**;而可取不同的值的量称为**变量**.

由定义可知,一个量是否为变量与观察事物的过程有关.例如重力加速度在同一地点是常量,在不同地点观测,则它是变量.又如,市场上某种商品的价格在短期内是常量,而在较长的时间内它会变化,是变量.因此常量与变量的区别不是绝对的,它们在一定的条件下可以相互转化.从取值范围来看,常量可以看成是仅在单元素集合取值的量,因此常量可看成是变量的特例.

1.3.2 函数概念

在研究问题时往往涉及到不止一个变量,变量之间常常会有某种确定的对应关系.

【例 1-1】 设某种商品的价格为 2 元/件,销售量为 q 件,销售收入为 R 元,则 $R=2q$. 销售量变化时,销售收入也随之发生变化,且销售量确定后,销售收入也随之确定.

【例 1-2】 某河道的一个断面如图 1-1 所示,在断面 xOy 上,离岸边距离为 x 处的深度为 y . x, y 之间的关系如图 1-1 所示.

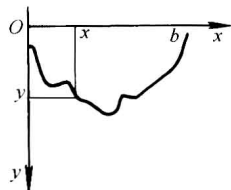


图 1-1

【例 1-3】 某中学派出五名选手参加数学竞赛,结果如表 1-1 所示:

表 1-1

准考证号(x)	1	2	3	4	5
得分(y)	86	80	78	81	79

我们根据此表可以知道准考证号与得分的对应情况.

以上几个例子的实际意义虽不同,但都通过特定对应法则(公式、图、表格)反映了两个变量之间的对应关系.这种对应关系就是我们要研究的函数关系.

定义 1-2 设 x, y 是两个变量, D 是一个非空数集,对于每个 $x \in D$, 变量 y 按照某个对应法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x



的函数,记作 $y=f(x)$,有时简记为 $f(x)$ 或 f ,称 x 是自变量, y 是因变量,称 D 是函数的定义域.

当变量 x 取值 $x_0 \in D$ 时,称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义,与之对应的变量 y 的值 y_0 被称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,并记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的各个值时,对应的函数值的全体组成的集合

$$Z_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域. 平面直角坐标系中的点集 $\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的图像.

通常函数 $y=f(x)$ 的图像是一条曲线,因此常常又称函数 $y=f(x)$ 的图像为曲线 $y=f(x)$. 有的函数的图像只是散布在坐标平面上的一些点,如上面的例 1-3 的图像. 有的函数的图像无法描绘出来,如下面的函数.

$$\text{【例 1-4】 } y = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}. \end{cases}$$

按照定义,它的图像是存在的,但无法画出来.

由函数的定义可知,只要定义域和对应法则确定了,函数也就确定了,而变量用什么字母表示并不重要.(当然,在同一个问题中,我们一般不能将不同意义的变量用相同字母表示.)因此,两个函数只要定义域和对应法则分别相同,这两个函数就相同,否则两个函数就不相同. 由于函数的值域取决于定义域与对应法则,所以,若两个函数的值域不同,则可推断它们的定义域与对应法则至少有一个不同. 但定义域和值域分别相同时,对应法则却未必相同. 与函数 $f(x)$ 不同的函数可用不同的字母符号表示,如 $g(x), h(x), F(x)$ 等.

【例 1-5】 判断下列各组中的两函数是否为同一个函数.

(1) 函数 $y = \frac{x}{x(1+x)}$ 与函数 $y = \frac{1}{1+x}$.

(2) 函数 $y = |x|, x \in \{-1, 0, 1\}$ 与函数 $y = x^2, x \in \{-1, 0, 1\}$.

(3) 函数 $y = |x|, x \in \{-1, 0, 1\}$ 与函数 $y = x^3, x \in \{-1, 0, 1\}$.

解 (1) 这两个函数的定义域不同. 前者的定义域为 $\{x | x \neq 0, x \neq -1\}$, 后者的定义域为 $\{x | x \neq -1\}$, 故它们不是同一个函数.

(2) 这两个函数的定义域和对应法则分别相同,所以是同一个函数.

(3) 这两个函数的定义域相同,但对应法则不同,所以不是同一个函数.

1.3.3 函数的常用表示法

1. 公式法(解析法)

像例 1-5 中用公式表示函数的方法称为公式法或解析法.

由函数定义知,当函数用公式法表示时,函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的可能取值的集合.若函数表达式有实际问题的背景,则应结合实际问题考虑其定义域.

【例 1-6】 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} + \lg(5-x)$ 的定义域.

解 使函数有意义,须 $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-3 \neq 0, \\ 5-x > 0, \end{cases}$ 即 $D = \{x \mid -2 \leq x < 5, x \neq 3\}$.

在例 1-1 中,若已知商品的最大需求量为 100 件,那么该函数的定义域为

$$D = \{q \mid 0 \leq q \leq 100, q \in \mathbf{N}\}.$$

注意 (1)有的函数无法用公式表示,如例 1-2,例 1-3 中的函数.

(2)有的函数在自变量的不同的变化范围内,其对应法则需要用不同的式子表达,如:

【例 1-7】 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

【例 1-8】 “最大整数部分”函数 $y = [x], x \in \mathbf{R}$. 记号 $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数. 例如 $[-2.3] = -3, [4.5] = 4, [-2] = -2$ 等. 函数 $y = [x], x \in \mathbf{R}$ 亦被称为取整函数.

【例 1-9】 $y = \begin{cases} 2x+3, & -1 < x < 2, \\ x^2+4x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

像这样在自变量的不同取值范围内用不同的表达式给出对应法则的函数称为分段函数. 分段函数在其定义域上是一个函数,而不是几个函数. 例 1-9 中的分段函数的定义域是两个区间的并集:

$$(-1, 2) \cup [2, 4] = (-1, 4].$$

2. 图像法

用函数的图像来表示函数的方法称为图像法,如例 1-2.

图像法的优点是能直观地显示函数的一些性质,缺点是不便于进行较细致的数值计算与分析.

注意 并非每个函数都能用图像表示,如例 1-4.

3. 表格法

用表格来给出函数定义域与对应法则的方法称为表格法,如例 1-3.

表格法的优点是由表中的自变量数值可直接得到对应的函数值. 缺点是很多函数不能通过列表来全面反映变量间的相互关系.



总的说来,上面的三种表示法各有优缺点,应根据具体情况采用适当的函数表示法.

习题 1.3

1-1 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$(2) y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{1-x}}{\lg(x+2)};$$

$$(4) y = \begin{cases} \lg(1-x), & x < 1, \\ \sqrt{x-2}, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$(5) y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{2x-1};$$

$$(6) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$(7) y = \sqrt{1 - \lg(x+1)};$$

$$(8) y = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

1-2 试判断下列各题中的函数对是否相同,并说明理由.

$$(1) y = 2\ln x, y = \ln x^2;$$

$$(2) y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, y = x + 1;$$

$$(3) y = \lg \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3}, y = \frac{\lg(x^2 + 1)}{\lg(2x^2 + 3)};$$

$$(4) y = \lg \frac{x+1}{2x+3}, y = \lg(x+1) - \lg(2x+3);$$

$$(5) y = \lg(x+1)(x-1), y = \lg(x+1) + \lg(x-1);$$

$$(6) y = f(x), u = f(v).$$

1-3 求下列函数的函数值.

$$(1) f(x) = \sqrt{2x - x^2}, \text{ 求 } f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(2);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 3x+5, & |x| < 1, \\ \sqrt{x^2-1}, & |x| \geq 1, \end{cases} \text{ 求 } f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(-3);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ 2x-1, & x > 1, \end{cases} \text{ 求 } f(0), f(2), f(1+a).$$

$$1-4 \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1, \\ 3x-1, & x > 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < 2, \\ x-4, & x \geq 2, \end{cases}$$

(1) 求 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的表达式;

(2) 求 $F(0), F(1), F(2), F(1.5), F(3)$ 的值.