中学升学考试实用工具书系列
ZHONGXUE SHENGXUE KAOSHI SHIYONG GONGJUSHU XILIE

高中数学

基础知识手册

GAOZHONG SHUXUE
JICHU ZHISHI SHOUCE

主编 沈子兴

上海大学出版社
SHANGHAI DAXUE CHUBANSHE

中学升学考试实用工具书系列

ZHONGXUE SHENGXUE KAOSHI SHIYONG GONGJUSHU XILIE

高中数学

基础知识手册

GAOZHONG SHUKUE

JICHU ZHISHI SHOU CE

主编 沈子兴

编写 （按姓氏笔画为序）

师 前 沈子兴 张佩萍

上海大学出版社

SHANGHAI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

高中数学基础知识手册/沈子兴主编．—上海：上海大学出版社，2011.5
（中学升学考试实用工具书系列）
ISBN 978-7-81118-768-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①沈… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 050509 号

策　　划　傅玉芳
责任编辑　傅玉芳
封面设计　张天志
技术编辑　金　鑫　章　斐

高中数学基础知识手册
沈子兴　主编
上海大学出版社出版发行
（上海市上大路 99 号　邮政编码 200444）
（http://www.shangdapress.com　发行热线 66135110）
出版人：郭纯生
*
南京展望文化发展有限公司排版
江苏南洋印务集团有限公司　各地新华书店经销
开本 787×1092　1/32　印张 17.25　字数 511 000
2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
印数：1～5 100
ISBN 978-7-81118-768-7/G·589　定价：26.00 元

编写说明

本书以现行《上海市中小学数学课程标准》为准则，内容紧密配合高中数学课本，目的在于帮助学生学习和掌握数学基础知识和基本技能，提高数学综合应用能力，培养逻辑思维能力和研究问题、分析问题的思想方法，提升学生的数学素养，本次修订，补充了新课程要求的新内容，同时调整了一些不在教学范围内的内容，更换了最近的一些新的题型，是学好高中数学不可多得的工具书.

本书分为二十章，各章编写了"基础知识要点"、"基本技能指导"、"综合能力应用"和"经典习题练习"(附答案)四个部分.

"基础知识要点"依据《教育部中小学数学课程标准》、《上海市中小学数学课程标准》，根据新课程改革的基本要求及现行《高中数学课本》编写，内容包容全国教材和上海教材的要求.

"基本技能指导"精心选择典型数学问题，悉心点拨指导，分析后加以"说明"，归纳总结一类数学问题的基本规律，启迪学生思维，强化基本技能学习.

"综合能力应用"选题新颖，配之以相应解析，在问题解决的思路与方法上给予指导，着重培养和提高数学综合应用能力，以拓宽显示思路、改进学习方法.

"经典习题练习"精选典型习题，让学生举一反三、触类旁通，并提供了参考答案.

本书还为学有余力的学生提供了一些深度、宽度略高于课程标准的学习资料，在相关部位打上“*”标明，供广大读者参考.

由于编写时间仓促，难免有不妥之处，请指正.

编　者

2011年3月

目录

第 一 章　集合与命题 …… 001
第 二 章　不等式 …… 021
第 三 章　复数 …… 049
第 四 章　函数 …… 079
第 五 章　指数函数与对数函数 …… 115
第 六 章　三角比 …… 139
第 七 章　三角函数 …… 167
第 八 章　直线与平面 …… 197
第 九 章　多面体、旋转体 …… 231
第 十 章　向量初步 …… 259
第十一章　坐标平面上的直线 …… 291
第十二章　圆锥曲线 …… 317
第十三章　极坐标与参数方程 …… 359
第十四章　数列与数学归纳法 …… 389
第十五章　极限 …… 419
第十六章　排列组合与二项式定理 …… 445
第十七章　概率与统计初步 …… 463
第十八章　矩阵、行列式与算法 …… 489
*第十九章　导数及其应用 …… 505
*第二十章　定积分及其应用 …… 527

第一章
集合与命题

一、基础知识要点

1. 集合及其表示

集合 把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体叫做一个集合，简称集.

元素 集合中的各个对象叫做这个集合的元素.

有限集与无限集 含有有限个元素的集合叫做有限集；含有无限个元素的集合叫做无限集.

集合的表示法 集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

如果把集合中的元素一一列举出来，并且写在大括号内，那么这种表示集合的方法叫做列举法.

如果在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线的右边写上这个集合的元素的公共属性，那么这种表示集合的方法叫做描述法.

说明 对于一个给定的集合，集合中的元素是各不相同的. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，因此集合中的元素不重复出现.

2. 子集

子集 对于两个集合 A 与 B，如果 A 的任何一个元素都属于 B（即如果 $a\in A$，那么 $a\in B$），那么就把 A 叫做 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"）.

规定：空集（不含有任何元素的集合，记作 $\varnothing$）是任何集合的子集.

集合相等 两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $B\supseteq A$，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

说明 如果两个集合所含的元素完全相同,那么这两个集合相等.

真子集 对于两个集合 A、B,如果 $A \subseteq B$,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$),读作"A 真包含于 B"(或"B 真包含 A").

集合的图示法 集合 A 是集合 B 的真子集,这种包含关系可以用图 1-1 直观地表示,其中 A、B 两个圈的内部分别代表集合 A、B. 这种表示集合之间关系的方法叫做集合的图示法.

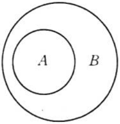
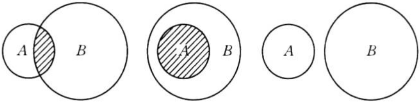


图 1-1

3. 交集

交集 由集合 A 和集合 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A、B 的交集,记作 $A \cap B$(读作"A 交 B"),即 $A \cap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$.

$A \cap B$ 可以用图 1-2 中的阴影部分来表示.



$A \cap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$ $A \cap B = A$ $A \cap B = \varnothing$

图 1-2

说明 由交集的定义知道,对于任何集合 A、B,有 $A \cap B = B \cap A$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

4. 并集

并集 由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A、B 的并集,记作 $A \cup B$(读作"A 并 B"),即 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$.

$A \cup B$ 可以用图 1-3 中的阴影部分来表示.

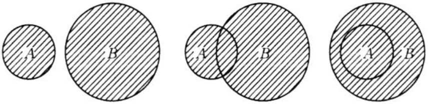


图 1-3

说明 由并集的定义知道，对于任何集合 A、B，有 $A\cup B=B\cup A$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$.

*5. 两个有限集的并集的元素个数

两个有限集的并集的元素个数 用 $n(x)$ 表示有限集 x 所含的元素个数（规定 $n(\varnothing)=0$），则有 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

特别地，对于满足 $A\cap B=\varnothing$ 的两个有限集 A、B，有 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

6. 补集

全集 在研究集合与集合之间的关系时，这些集合往往是某个给定集合的子集. 这个给定的集合叫做全集，用符号 I 表示.

补集 已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素全体所组成的集合叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作 $\overline{A}$（读作“A 补”），即 $\overline{A}=\{x\mid x\in I,\ x\notin A\}$. $\overline{A}$ 可以用图1-4中的阴影部分来表示.

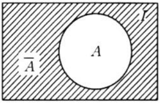


图 1-4

说明 由补集的定义可知：$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$，$\overline{\overline{A}}=A$.

7. 命题与推出关系

由 α 推出 β 如果 α 这件事成立可以推出 β 这件事也成立，那么就说由 α 推出 β，并用记号 $\alpha\Rightarrow\beta$ 表示.

8. 四种命题形式

互否命题与否命题 一个命题的条件与结论分别是另一个命题的条件的否定与结论的否定，我们把这样的两个命题叫做互否命题. 如果把其中一个叫做原命题，那么另一个就叫做它的否命题.

互逆命题与逆命题 一个命题的条件与结论分别是另一个命题的结论与条件，我们把这样的两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个叫做原命题，那么另一个就叫做它的逆命题.

互为逆否命题与逆否命题 一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们称这样的两个命题叫做互为逆否命题. 如果把其中一个叫做原命题，那么另一个就叫做它的逆否命题.

说明 如果用α和β分别表示原命题的条件和结论，用$\bar{\alpha}$和$\bar{\beta}$分别表示α和β的否定，那么四种命题的形式就是：

原命题：如果α，那么β；

逆命题：如果β，那么α；

否命题：如果$\bar{\alpha}$，那么$\bar{\beta}$；

逆否命题：如果$\bar{\beta}$，那么$\bar{\alpha}$.

9. 等价命题

等价命题 如果甲、乙是两个命题，从命题甲可以推出命题乙，从命题乙可以推出命题甲，那么这样的甲、乙两个命题叫做等价命题.

如果两个命题互为逆否命题，那么这两个命题是等价命题.

10. 充分条件与必要条件

充分条件 用α、β分别表示两件事，如果α这件事成立，可以推出β这件事也成立，即$\alpha \Rightarrow \beta$，那么α叫做β的充分条件.

必要条件 如果$\beta \Rightarrow \alpha$，那么α叫做β的必要条件.

充要条件 如果既有$\alpha \Rightarrow \beta$，又有$\beta \Rightarrow \alpha$，即有$\alpha \Leftrightarrow \beta$，那么$\alpha$既是$\beta$的充分条件，又是$\beta$的必要条件，这时我们就说，$\alpha$是$\beta$的充分而且必

要条件，简称充要条件.

二、基本技能指导

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) a^3-4a 的所有一次因式所组成的集合；

(2) $\{y \mid y=-x^2-2x+3,\ x\in \mathbf{R},\ y\in \mathbf{N}\}$；

(3) $\left\{x \,\middle|\, x\in \mathbf{Z}\text{ 且}\dfrac{8}{3-x}\in \mathbf{N}\right\}$；

(4) 用列举法表示集合 $\{(x,\ y) \mid x+y=6,\ x\in \mathbf{N},\ y\in \mathbf{N}\}$.

【分析】 (1) $\because a^3-4a=a(a-2)(a+2)$，

$\therefore$ 所求集合是 $\{a,\ a-2,\ a+2\}$.

(2) 由 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$ 得出 $y\leqslant 4$，再由 $y\in \mathbf{N}$ 可知所求集合是 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

(3) 按要求，$x\in \mathbf{Z}$，且 $\dfrac{8}{3-x}$ 是正整数.

$\because$ 8 的所有约数为 8、4、2、1，

$\therefore$ 由 $3-x=8$、4、2、1 得 $x=-5,\ -1,1,2$.

$\therefore$ 所求的集合是 $\{-5,\ -1,\ 1,\ 2\}$.

(4) $\because x,\ y\in \mathbf{N},\ x+y=6$，

$\therefore$ 所求的集合为 $\{(1,\ 5),(2,\ 4),(3,\ 3),(4,\ 2),(5,\ 1)\}$.

说明

(1) 所谓列举法，是把集合的元素一一列举出来，并写在{ }内.

(2) 应注意集合中的元素类型，如(1)中元素是一次因式；(2)中是正整数；(3)中是整数；(4)中是直角坐标平面内的点.

例 2 已知集合 $A=\{0,\ 1\}$，用列举法分别写出满足下列条件的集合 B，并说明空集 $\varnothing$ 与集合 B 的关系.

(1) $B=\{x \mid x\in A\}$；

(2) $B=\{x \mid x \subset A\}$;

(3) $B=\{x \mid x \subseteq A\}$.

【分析】 (1) $B=\{0, 1\}$,这时 $\varnothing \subset B$.

(2) $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\}\}$,这时 $\varnothing \in B$,且 $\varnothing \subset B$.

(3) $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0, 1\}\}$,这时 $\varnothing \in B$,且 $\varnothing \subset B$.

说明

(1)中集合 B 的元素是属于集合 A 的任一元素.

(2)中集合 B 是由 A 的所有真子集组成的集合.

(3)中集合 B 是由 A 的所有子集组成的集合.

例 3 (1) 已知集合 $A=\{y \mid y=x^2-2x-1, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{y \mid y=-x^2+2x+15, x \in \mathbf{R}\}$,求 $A \cap B$.

(2) 已知集合 $A=\{(x, y) \mid y=x^2-2x-1, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x, y) \mid y=-x^2+2x+15, x \in \mathbf{R}\}$,求 $A \cap B$.

【分析】 (1) $\because y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,

$\therefore y \geqslant -2$.

$\because y=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16$,

$\therefore y \leqslant 16$.

$\therefore A=[-2,+\infty)$, $B=(-\infty, 16]$,

$\therefore A \cap B=\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 16\}$.

(2) $\begin{cases} y=x^2-2x-1 \\ y=-x^2+2x+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=7; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=7. \end{cases}$

$\therefore A \cap B=\{(4, 7),(-2, 7)\}$.

说明 用描述法表示集合时,要弄清集合中的元素的形式.本例的第(1)题中,A、B 是两个数集,它们分别表示二次函数 $y=x^2-2x-1$ 和 $y=-x^2+2x+15$ 的值域.第(2)题中的 A、B 为两个点集,它们分别表示抛物线 $y=x^2-2x-1$ 和 $y=-x^2+2x+15$ 上的点所组成的集合,所以求 $A \cap B$,即求此两抛物线的交点.

例 4 若集合 $A=\{y \mid y=x^{\frac{1}{3}}, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$,$B=\{y \mid y=2-\frac{1}{x}, 0<x \leqslant 1\}$,则 $A \cap B=(\quad)$.

(A) $(-\infty,1]$　　(B) $[-1, 1]$　　(C) $\varnothing$　　(D) $\{1\}$

(本题是2006年全国普通高等学校招生统一考试(上海春季)试题)

【分析】 ∵ 集合 A 是函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 的值域.

∴ $A=[-1, 1]$

∵ 集合 B 是函数 $y=2-\dfrac{1}{x}$，$0<x\leqslant 1$ 的值域

∴ $B=(-\infty, 1]$

∴ $A\cap B=[-1, 1]$　选项B正确

说明　此题还可变为(1)代表元素 y 改为数对 (x, y)，适当改变函数解析式的形式，则求 $A\cap B$ 可化为求两函数图象的公共点；(2) B 中函数改为 $y=a-\dfrac{1}{x}$，$0<x\leqslant 1$，则可通过分类讨论求 $A\cap B$.

此题主要考查集合的运算、求函数值域等，解题时一般运用方程思想、数形结合思想、分类讨论思想等.

例5　集合 $A=\{x, xy, \lg xy\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，求 x、y 的值.

【分析】 由 $\lg xy=0$，得 $xy=1$.

若 B 中元素 $y=1$，则 $x=1$. 这样 $A=\{1, 1, 0\}$，这与集合的元素的互异性相矛盾.

∴ $|x|=1$，∴ $x=-1$，$y=-1$.

此时，$A=B=\{0, 1, -1\}$.

说明　集合中的元素具有三个特性：确定性、互异性、无序性. 所以，在求集合中各元素时要注意.

例6　若集合 $M=\{x\mid (a-1)x^2+2x+1=0\}$ 中只含有一个元素，求实数 a.

【分析】 (1) 当 $a=1$ 时，$x=-\dfrac{1}{2}$ 符合题意；

(2) 当 $a\neq 1$ 时，一元二次方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 有唯一解，必须 $\Delta=0$，即 $2^2-4(a-1)=0$，解得 $a=2$.

由(1)、(2)可得：所求实数 a 为1或2.

说明　集合 M 只含有一个元素，即方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 只

有一个解.切勿遗漏 $a=1$ 时原方程为一元一次方程的情况.

例 7 已知命题:"两个有理数的和是有理数."

(1) 写出上述命题的逆命题、否命题、逆否命题;

(2) 判断上述四种命题的真假,并说明理由.

【分析】 (1) 先将已知命题改写成"如果……,那么……"的形式.

原命题:如果两个数都是有理数,那么这两个数的和是有理数.

逆命题:如果两个数的和是有理数,那么这两个数都是有理数.

否命题:如果两个数不都是有理数,那么这两个数的和不是有理数.

逆否命题:如果两个数的和不是有理数,那么这两个数不都是有理数.

(2) 原命题是真命题.

设 a、b 都是有理数,由有理数定义知,$a=\frac{n}{m}$, $b=\frac{q}{p}$ (m、n、p、$q\in\mathbf{Z}$,且 $m\neq0$, $p\neq0$),$a+b=\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{np+mq}{mp}$.

$\because np+mq\in\mathbf{Z}$, $mp\in\mathbf{Z}$ 且 $mp\neq0$,

$\therefore a+b=\frac{np+mq}{mp}\in\mathbf{Q}$.

由于逆否命题与原命题是等价命题,所以逆否命题也是真命题.

逆命题是假命题.反例如下:设 $a=\sqrt{5}+\frac{1}{2}$, $b=-\sqrt{5}+1$,则 $a+b=\frac{3}{2}\in\mathbf{Q}$,但 $a=\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ 不是有理数.

因为否命题与逆命题是等价命题,所以否命题也是假命题.

例 8 已知 $0^\circ<A<180^\circ$,判断"$A\neq30^\circ$"是"$\sin A\neq\frac{1}{2}$"的什么条件?

【分析】 写成命题形式为:"如果 $A\neq30^\circ$,那么 $\sin A\neq\frac{1}{2}$."它的逆否命题是:"如果 $\sin A=\frac{1}{2}$,那么 $A=30^\circ$."显然不成立,条件不是充分的.它的否命题是:"如果 $A=30^\circ$,那么 $\sin A=\frac{1}{2}$."显然成立,条

件是必要的.

∴ “$A\neq 30$”是“$\sin A\neq \frac{1}{2}$”的必要非充分条件.

说明 对于以否定形式出现的命题，往往从命题的逆否形式去考虑.

例 9 (1) 选择：$x^2-1=0$ 是 $x+1=0$ 的(　　).

(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(2) 设有两个命题：① 关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；② 函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数，若命题有且只有一个是真命题，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $(-\infty,\ -2]$　　(B) $(-\infty,\ 2]$

(C) $(-2,\ 2)$　　(D) $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$

【分析】 (1) 由 $x+1=0$ 可推出 $x^2-1=(x+1)(x-1)=0$，但由 $x^2-1=0$ 不能推得 $x+1=0$，

∴ $x^2-1=0$ 是 $x+1=0$ 的必要而非充分条件，∴ 选(B).

(2) 若 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $-2<a<2$，

若函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数，则 $a<2$

若①是真命题②是假命题，则 $a\in\varnothing$，

若①是假命题②是真命题，则 $a\leqslant -2$，故选 A.

例 10 写出：

(1) $x>0$ 的一个必要非充分条件；

(2) $x>0$ 的一个充分非必要条件.

【分析】 (1) $x>0$ 的一个必要非充分条件是 $x>-1$. 理由是：$x>0\Rightarrow x>-1$，且 $x>-1\nRightarrow x>0$.

(2) $x>0$ 的一个充分非必要条件是 $x>1$. 理由是 $x>1\Rightarrow x>0$，且 $x>0\nRightarrow x>1$.

说明 此题答案不唯一. 其中 $x>a$ ($a<0$, $a\in\mathbf{R}$) 都是 $x>0$ 的必要非充分条件. $x>b$ ($b>0$, $b\in\mathbf{R}$) 都是 $x>0$ 的充分非必要条件.

例 11 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-15<0\}$，$B=\{x \mid x^2<a^2,\ a>0\}$.

(1) 若 $A\supset B$，求正数 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，求正数 a 的取值范围.

【分析】 由 $x^2-2x-15<0$ 得 $-3<x<5$，

$\therefore A=\{x \mid -3<x<5\}$.

同理可得，$B=\{x \mid -a<x<a,\ a>0\}$，则 $\overline{B}=\{x \mid x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a,\ a>0\}$.

(1) 要满足 $A\supset B$，区间 $(-a,\ a)$ 真包含在区间 $(-3,\ 5)$ 之内，

$\therefore 0<a\leqslant 3$.

(2) 要满足 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，即 $\overline{B}$ 所在区间应在集合 A 的区间 $(-3,\ 5)$ 之外，

$\therefore a\geqslant 5$.

例 12 集合 $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax+9=0,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

【分析】 $\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$.

而 $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}=\{1,\ 3\}$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，

$\Delta=a^2-36<0\Rightarrow -6<a<6$.

(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时，

将 $x=1$ 代入方程 $x^2-ax+9=0$，得 $a=10$.

此时 $B=\{1,\ 9\}$，不符合 $B\subseteq A$，故 $a=10$ 舍去.

将 $x=3$ 代入方程 $x^2-ax+9=0$，得 $a=6$，此时 $B=\{3\}\subset A$.

故 a 的取值范围为 $(-6,\ 6]$.

说明

(1) $B\subseteq A$，由于 $\varnothing$ 是任何集合的子集，因此要对 $B=\varnothing$ 与 $B\neq\varnothing$ 作出分类讨论.

(2) 本例对 $B\neq\varnothing$ 时，将 $x=1$ 与 $x=3$ 分别代入方程求得 a 的值，这仅仅为 $B\subseteq A$ 的必要条件，而不一定是充分条件. 因此，要对求出的 a 的值作进一步的验证.

例 13 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-24<0,\ x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=$