

杜志建 主编

®



试题 调研

高分宝典系列

高考意见领袖

2012高考成功计划

高考5年 **真题** 分类详解

揭秘高考考什么、怎么考

探寻高考命题规律与趋势

教授高考应试策略和技巧

读懂高考题，考点才好记

数 学

— 理 科 —



CHISO 新疆青少年出版社



试题 调研

高分宝典系列

高考意见领袖

2012高考成功计划

高考5年真题分类详解

主 编：杜志建

编 委 会：胡新潮 孟娜娜 王云飞 马婷婷 徐万辉 张丹丹

李国霞 张海珍 吴春梅 马景梅 宋 彦 刘迎晓

本册主编：徐万辉

本册副主编：王 一 孔妙利 赵慧婷 张 豪 池晓燕

数 学

— 理 科 —

CHISO 新疆青少年出版社

图书在版编目(CIP)数据

试题调研 特辑. 数学. 理科 / 杜志建主编. 一修
订本 —乌鲁木齐: 新疆青少年出版社, 2010 6
ISBN 978 - 7 - 5371 - 7106 - 9

I ①试… II ①杜… III. ①数学课 - 高中 - 解题 -
升学参考资料 IV ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 121768 号

出 版 人: 徐 江
策 划: 王启全
责任编辑: 多艳萍
责任校对: 刘 娜
封面设计: 天星美工室

试题调研·特辑 数学(理科)
杜志建 主编

出 版: 新疆青少年出版社
社 址: 乌鲁木齐市北京北路 29 号 邮政编码: 830012
电 话: 0991 - 7833936(编辑部), 0371 - 68698015(邮购部)
网 址: <http://www.qingshao.net>

发 行: 新疆青少年出版社营销中心 电 话: 0991 - 7833979 7833965
经 销: 各地新华书店 法律顾问: 钟 麟 13201203567
印 刷: 郑州市毛庄印刷厂

开 本: 787mm × 1092mm 1/16 版 次: 2011 年 7 月修订版
印 张: 13 5 印 次: 2011 年 7 月第 1 次印刷
字 数: 372 千字
书 号: ISBN 978 - 7 - 5371 - 7106 - 9
定 价: 19.80 元



版权所有, 侵权必究。印装问题可随时同印厂退换。

成功在我，成功在握

——《高分宝典》丛书序

在我还是孩童时，就梦想成功/那时的成功/是央求父母购买的一个个小玩具/在我求学时，就期待成功/那时的成功/是老师的期许/是优异成绩带给家人的喜悦/亲爱的读者，你现在的成功又是什么呢

是的，每个人都渴望成功。但是，很多时候，对成功我们总是求之而不得，这让人苦恼无比。譬如，现在的你，可能在为学业发愁，因为升学而倍感压力。

“怎么办？”你一次次焦虑地问自己，问自己何时可以成功。

其实，你不必如此。成功，虽然没有捷径，但是，真的有方法。

《高分宝典》系列丛书就是你实现大学梦想的法宝。该丛书包括《高考5年真题分类详解》《高考必备题型1000例》《高考突破难点100讲》《高考状元纠错笔记》和《高考决战压轴大题》。这5套图书功能各异，但合起来又构成一个有机整体。

《高考5年真题分类详解》对2007-2011年全国各省市高考真题进行命题研究和分类详细解析，告诉你高考命题的规律，让你知道每一个考点在高考中怎么考，以及如何复习备考。

《高考必备题型1000例》由权威名师总结出高考必考题型，每一题型以经典母题讲解通性通法，帮你实现“弄懂一道题，攻克一类题”的愿望。

《高考突破难点100讲》根据历年高三学生在学习过程中普遍存在的问题，总结提炼出100个难点，并聘请名师讲解，帮你化难为易，一一破解学习难题。让你从此“理解”不难，“运用”不难，“得分”也不难。

《高考状元纠错笔记》收集多位高考状元平时密不外传的错题本精华，让你分享他们的成功经验。该书汇集各个学科最具训练价值的易错试题，让你在平时充分暴露学习问题，高考才没问题。

《高考决战压轴大题》聚焦那些“拉开分差”的题目，讲解压轴大题的破题思路、答题技巧，展示满分答题过程。立志考过“一本”线，上“211”“985”大学的考生，此书不可不看。

在策划这5套图书时，我们受毛泽东点评《二十四史》的启发，独创“旁批”设计，在正文两旁，通过【规律】【技巧】【拓展】【闪记】……对正文进行发散性和补充性讲解，让你学会举一反三，真正提高分析问题和解决问题的能力。

从真题开始，锁定备考靶心；紧接着熟悉必考题型，掌握通性通法。

再突破难点，扫除得分障碍；还需纠正错误，减少无谓失分。

最后攻克压轴大题，圆梦象牙塔。

这就是为你打造的高考成功计划。按此计划前行，一步一个脚印，成功定在掌控之中。

来年6月，希望你可以告诉我们：“是的，成功在我，成功在握！”

目录

Contents

专题一 集合与常用逻辑用语	001
本专题考点图解/001	真题分类详解/002
专题二 函数与导数	007
本专题考点图解/007	真题分类详解/009
专题三 数列	030
本专题考点图解/030	真题分类详解/031
专题四 三角函数	049
本专题考点图解/049	真题分类详解/051
专题五 平面向量	068
本专题考点图解/068	真题分类详解/070
专题六 不等式	080
本专题考点图解/080	真题分类详解/081
专题七 空间向量与立体几何	092
本专题考点图解/092	真题分类详解/094
专题八 解析几何	114
本专题考点图解/114	真题分类详解/116
专题九 计数原理	140
本专题考点图解/140	真题分类详解/141
专题十 概率与统计	148
本专题考点图解/148	真题分类详解/151
专题十一 推理与证明、复数	171
本专题考点图解/171	真题分类详解/172
专题十二 算法初步	185
本专题考点图解/185	真题分类详解/186
专题十三 选考部分	193
本专题考点图解/193	真题分类详解/196
附:《试题调研》大面积命中 2011 高考试题	205

考点分类快速索引

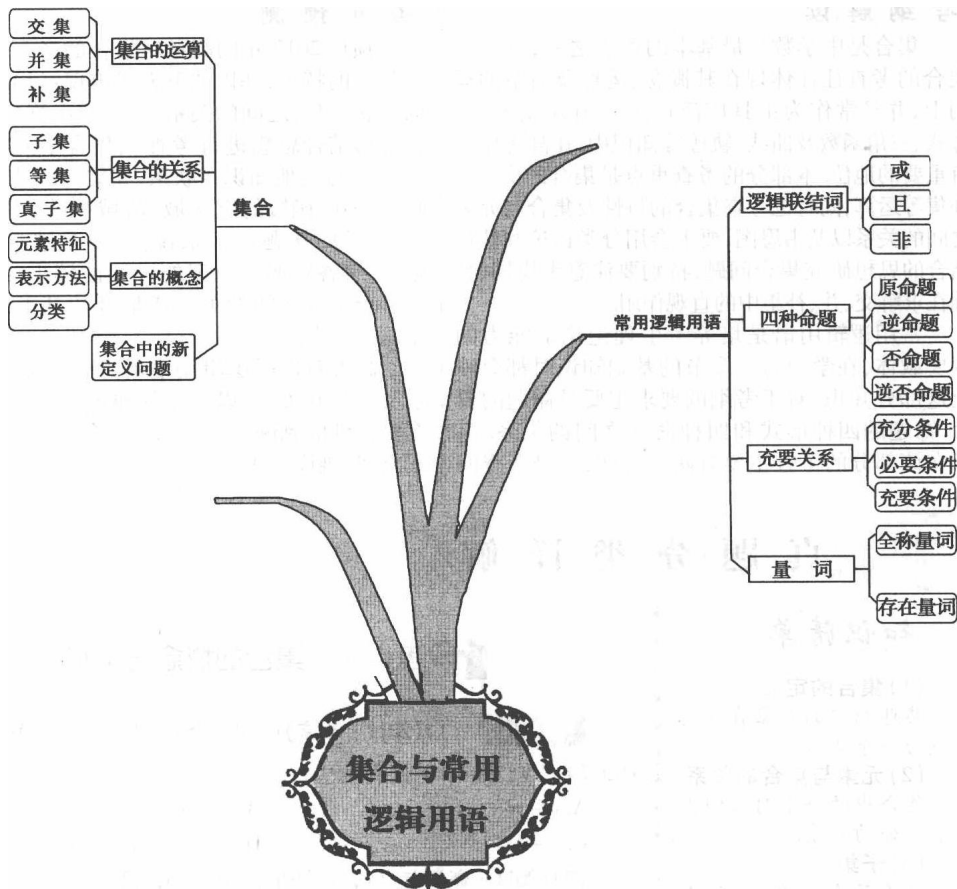
考点 1 集合的概念与运算	002	考点 22 三角函数的性质	054
考点 2 集合中的新定义问题	003	考点 23 三角恒等变换	057
考点 3 命题的真假判断	004	考点 24 解三角形	060
考点 4 充要关系的判断	005	考点 25 三角函数的实际应用问题	061
考点 5 函数的基本概念	009	考点 26 三角函数的综合问题	065
考点 6 函数的图象	010	考点 27 平面向量的线性运算	070
考点 7 函数的性质	012	考点 28 平面向量的坐标运算	071
考点 8 二次函数	014	考点 29 平面向量的数量积	073
考点 9 指数函数与对数函数	016	考点 30 平面向量与三角函数	074
考点 10 导数及其综合应用	017	考点 31 平面向量与平面解析几何	076
考点 11 定积分	022	考点 32 不等式的概念与基本性质	081
考点 12 最值问题	023	考点 33 基本不等式	083
考点 13 函数的实际应用问题	025	考点 34 不等式的解法	084
考点 14 数列的概念	031	考点 35 不等式的综合应用	087
考点 15 等差数列	032	考点 36 简单的线性规划问题	089
考点 16 等比数列	034	考点 37 空间几何体的直观图与三视图	094
考点 17 数列的通项及求和	037	考点 38 空间几何体的表面积与体积	096
考点 18 递推数列	040	考点 39 线、面平行与垂直的判定与性质	098
考点 19 数列的综合问题	043	考点 40 空间角	101
考点 20 三角函数的有关概念	051		
考点 21 三角函数的图象及其变换	052		

考点 41 空间距离	105	考点 62 频数与频率	152
考点 42 球	108	考点 63 特征数的计算	154
考点 43 空间向量在空间几何体中的综合 应用	110	考点 64 古典概型	155
考点 44 直线方程	116	考点 65 几何概型	157
考点 45 两直线的位置关系	117	考点 66 互斥、对立事件的概率	159
考点 46 圆的方程	118	考点 67 相互独立事件的概率	160
考点 47 直线与圆的位置关系	120	考点 68 独立重复试验和二项分布	162
考点 48 圆与圆的位置关系	121	考点 69 离散型随机变量的期望与方差	163
考点 49 椭圆的方程与性质	123	考点 70 正态分布	166
考点 50 双曲线的方程与性质	124	考点 71 统计案例	167
考点 51 抛物线的方程与性质	127	考点 72 类比推理	172
考点 52 直线与圆锥曲线的位置关系 ...	129	考点 73 归纳推理	174
考点 53 圆锥曲线中与弦有关的问题 ...	131	考点 74 直接证明	176
考点 54 轨迹与方程	135	考点 75 反证法	179
考点 55 两个基本定理	141	考点 76 数学归纳法	181
考点 56 排列	142	考点 77 复数的运算	184
考点 57 组合	143	考点 78 算法的含义与程序框图	186
考点 58 排列组合的综合问题	144	考点 79 基本算法语句	189
考点 59 二项展开式的通项公式的应用	145	考点 80 程序框图的综合性问题	190
考点 60 二项展开式中的系数和差问题	146	考点 81 几何证明选讲	196
考点 61 随机抽样	151	考点 82 矩阵与变换	198
		考点 83 坐标系与参数方程	200
		考点 84 不等式选讲	203



专题一 集合与常用逻辑用语

本专题考点图解



考试大纲

1. 集合

(1) 集合的含义与表示

①了解集合的含义、元素与集合的属于关系.

②能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

(2) 集合间的基本关系

①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

②在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(3) 集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义,会求

两个简单集合的并集与交集.

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

③能使用韦恩(Venn)图表示集合的关系及运算.

14. 常用逻辑用语

(1) 命题及其关系

①理解命题的概念.

②了解“若 p ,则 q ”形式的命题及其逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系.

③理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.



(2) 简单的逻辑联结词

了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.

(3) 全称量词与存在量词

① 理解全称量词与存在量词的意义.

② 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

考纲解读

集合是中学数学最基本的概念之一,高考对集合的考查往往体现在其概念、运算及简单的运用上,并经常作为工具广泛运用于函数、方程、不等式、三角函数及曲线、轨迹等知识中,在高考中占有重要的地位.本部分的考查重点是集合的交、并、补集等运算,同时也考查集合的特性及集合与元素之间的关系以及韦恩图,要求会用分类讨论和数形结合的思想研究集合问题,特别要注意韦恩图、数轴在求解交、并、补集中的直观作用.

常用逻辑用语是培养考生理论论证能力的重要载体,在学习每一章节的基础知识时都会涉及这部分知识.对于考纲的要求主要是命题的概念、命题的四种形式和四种命题之间的关系.高考在该部分的考查主要有两个方面:一是考查四

种命题,如给出一个命题写出这个命题其他形式的命题、给出四种命题判断其真假或是判断其中的等价关系等;二是结合高中数学的其他知识考查充要条件的判断,如结合平面解析几何考查两直线平行或垂直的充要条件、结合立体几何考查空间线面位置关系中的充要条件等.

考向预测

预计2012年的高考对集合的考查仍会保持近几年的特点,并以如下方式出现:(1)考查集合的概念、集合之间的关系、集合的运算(往往会结合数形结合思想进行考查)、集合中元素的特征等;(2)与其他知识相联系,如集合的基本运算与解不等式、函数的定义域、值域相结合等;(3)定义新运算.从题型上来说,主要是选择题、填空题,以解答题形式出现的可能性较小,结合韦恩图考查集合之间的关系或集合的基本运算仍是命题的重点.

高考对常用逻辑用语的考查主要是四种命题及其相互关系,以及在各种知识交汇点上考查充要条件的判断.一般会以选择题或填空题的形式出现,难度不大.



真题分类详解



知识清单

(1) 集合的定义

某些指定的对象在一起就成为一个集合.

(2) 元素与集合的关系

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

(3) 子集

对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B ,或集合 B 包含集合 A ,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),即集合 A 是集合 B 的子集.

(4) 交集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

(5) 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$.



考点1 集合的概念与运算

【真题1】

(1)(2011·北京)已知集合 $P = \{x | x^2 \leq 1\}$, $M = \{a\}$. 若 $P \cup M = P$, 则 a 的取值范围是

A. $(-\infty, -1]$

B. $[1, +\infty)$

C. $[-1, 1]$

D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(2)(2011·新课标全国)已知集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N = \{1, 3, 5\}$, $P = M \cap N$, 则 P 的子集共有

A. 2个

B. 4个

C. 6个

D. 8个

分析

(1) 本题主要考查集合的运算、简单的二次不等式的解法, 二次不等式的求解要结合图象, 看清是在两根之间还是两根之外, 即二次不等式的解集与二次项系数和不等号方向都有关系. (2) 本题考查集合的运算——交集及一个集合的子集的个数, 可用列举的方式给出, 也可直接利用子集的个数为 2^n 进行计算.

【详解】

(1) 因为 $P \cup M = P$, 所以 $M \subseteq P$, 即 $a \in P$, 得 $a^2 \leq 1$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[-1, 1]$, 故选 C.

(2) $P = M \cap N = \{1, 3\}$, 故 P 的子集有 $2^2 = 4$ 个. 故选 B.

【真题2】

(1)(2010·新课标全国)已知集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$

A. $(0, 2)$

B. $[0, 2]$

C. $\{0, 2\}$

D. $\{0, 1, 2\}$



(2)(2010·北京)集合 $P = \{x \in \mathbf{Z} | 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M =$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{x | 0 \leq x < 3\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

(3)(2011·天津)已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x - 1| < 2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A \cap \mathbf{Z}$ 中所有元素的和等于_____.

分析 第(1)小题考查了集合的运算, 结合绝对值不等式的解法、根式的意义、描述对象的条件等, 对知识点的考查细致入微; 第(2)小题结合不等式的解法, 考查集合的定义和集合的运算. 第(3)小题主要考查了集合的运算及含绝对值不等式的解法, 试题增设了集合元素的求和, 打破了常规, 注重了命题的灵活性与解题的针对性.

【详解】 (1) $\because A = \{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 16, x \in \mathbf{Z}\}$, $\therefore A \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1, 2\}$, 故选 D.

(2) 集合 $P = \{0, 1, 2\}$, $M = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, 所以 $P \cap M = \{0, 1, 2\}$. 故选 B.

(3) $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $A \cap \mathbf{Z} = \{0, 1, 2\}$, $A \cap \mathbf{Z}$ 中所有元素之和等于 3. 故填 3.

考点 2 集合中的新定义问题

【真题 1】 (2011·广东) 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集, 如果 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个不相交的非空子集, $T \cup V = \mathbf{Z}$, 且 $\forall a, b, c \in T$, 有 $abc \in T$; $\forall x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$, 则下列结论恒成立的是

- A. T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的
B. T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
C. T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的
D. T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

分析 本题是一道新定义题, 主要考查创新意识. 本题较为抽象, 题意难于理解, 但若“以退为进”, 取一些特殊数集代入检验, 即可解决.

【详解】 取 $T = \{x | x \in (-\infty, 0), \text{且 } x \in \mathbf{Z}\}$, $V = \{x | x \in (0, +\infty), \text{且 } x \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$, 可得 T 关于乘法不封闭, V 关于乘法封闭, 又取 $T = \{\text{奇数}\}$, $V = \{\text{偶数}\}$, 可得 T, V 关于乘法均封闭, 故排除 B、C、D, 故选 A.

【真题 2】 (2010·广东) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上定义两种运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 如下:

$\oplus$	a	b	c	d	$\otimes$	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	a	b	c	d
c	c	b	c	b	c	a	c	c	a
d	d	b	b	d	d	a	d	a	d

那么 $d \otimes (a \oplus c) =$

深化拓展

子集与真子集的区别与联系: 集合 A 的真子集一定是其子集, 而集合 A 的子集不一定是其真子集; 若集合 A 有 n 个元素, 则其子集个数为 2^n , 真子集个数为 $2^n - 1$.

保点警示

对于并集的理解应注意: 若 $x \in A \cup B$, 则有三种可能: ① $x \in A$ 但 $x \notin B$; ② $x \in B$ 但 $x \notin A$; ③ $x \in A$ 且 $x \in B$.

知识清单

新定义型试题的难点就是对新定义的理解和运用, 在解决问题时要分析新定义的特点, 把新定义所叙述的问题的本质弄清楚, 并能够应用到具体的解题过程之中, 这是破解新定义型试题难点的关键所在.

深化拓展

集合的性质(概念、元素的性质、运算性质等)是破解集合类新定义型试题的基础, 也是突破口, 在解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素, 在关键之处用好集合的性质.

方法探究

新定义运算中既要注意新运算的规则,也要注意我们已有的运算法则,如有大、中、小三类括号的运算中,就要遵循先小括号,再中括号,再大括号,最后括号外的一般运算法则.

A. a B. b C. c D. d

分析 按照给出的运算法则,遵循通用的运算法则,先算括号内的,逐步进行计算.

【详解】 根据给出的 $\oplus$ 运算规则 $a \oplus c = c$,即 $d \otimes (a \oplus c) = d \otimes c$,再根据给出的 $\otimes$ 运算规则, $d \otimes c = a$. 故选 A.

【真题3】 (2008·江西)定义集合运算: $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$. 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为
A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

【详解】 依题意,得 $A * B = \{0, 2, 4\}$, 其所有元素之和为6, 故选 D.

考点3 命题的真假判断

知识清单

(1) **命题**: 可以判断真假的语句叫做命题. 命题有真命题与假命题之分.

(2) **逻辑联结词**: “或”、“且”、“非”.

(3) **复合命题**: 不含逻辑联结词的命题叫做简单命题. 由简单命题与逻辑联结词构成的命题, 叫做复合命题. 其形式有: p 或 q , p 且 q , 非 p ($\neg p$) 三种, 其中非 p 也叫做命题 p 的否定.

(4) **四种命题之间的关系**

①在两个命题中, 如果第一个命题的条件(或题设)是第二个命题的结论, 且第一个命题的结论是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题.

②一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件否定和结论的否定, 这样的两个命题叫做互否命题.

③一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论否定和条件的否定, 这样的两个命题互为逆否命题.

【真题1】 (2011·新课标全国)已知 a 与 b 均为单位向量, 其夹角为 θ , 有下列四个命题

$$p_1: |a+b| > 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{2\pi}{3}) \quad p_2: |a+b| > 1 \Leftrightarrow \theta \in (\frac{2\pi}{3}, \pi]$$

$$p_3: |a-b| > 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{3}) \quad p_4: |a-b| > 1 \Leftrightarrow \theta \in (\frac{\pi}{3}, \pi]$$

其中的真命题是

A. p_1, p_4 B. p_1, p_3 C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

分析 此题考查向量的运算、向量的模及向量的夹角.

【详解】 由 $|a+b| > 1$, 可得 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 > 1$, $\therefore |a| = 1$, $|b| = 1$, $\therefore a \cdot b > -\frac{1}{2}$, 故 $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3})$. 当 $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3})$ 时, $a \cdot b > -\frac{1}{2}$, $|a+b|^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 > 1$, 即 $|a+b| > 1$; 由 $|a-b| > 1$, 可得 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 > 1$, $\therefore |a| = 1$, $|b| = 1$, $\therefore a \cdot b < \frac{1}{2}$, 故 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \pi]$, 反之也成立, 故选 A.

【真题2】 (2010·湖南)下列命题中的假命题是

A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^{x-1} > 0$ B. $\forall x \in \mathbf{N}^*, (x-1)^2 > 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, \lg x < 1$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, \tan x = 2$

分析 各个选项中的命题都是含有量词的命题, 判定一个全称命题为真, 必须对限定集合中的每一个元素都能使所给语句为真; 判定一个特称命题为真, 只要在限定集合中, 能找到一个元素使所给语句为真即可.

【详解】 根据指数函数、对数函数和三角函数的知识可知, 选项 A, C, D 中的命题都是正确的, 选项 B, 当 $x=1$ 时, 命题不正确, 故选项 B 中的全称命题是不正确的. 故选 B.

【真题3】 (2010·新课标全国)已知命题 p_1 : 函数 $y = 2^x - 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数, p_2 : 函数 $y = 2^x + 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为减函数. 则在命题 $q_1: p_1 \vee p_2$, $q_2: p_1 \wedge p_2$, $q_3: (\neg p_1) \vee p_2$ 和 $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$

中,真命题是

A. q_1, q_3

B. q_2, q_3

C. q_1, q_4

D. q_2, q_4

【详解】 p_1 是真命题,则 $\neg p_1$ 为假命题; p_2 是假命题,则 $\neg p_2$ 为真命题;

$\therefore q_1: p_1 \vee p_2$ 是真命题, $q_2: p_1 \wedge p_2$ 是假命题,

$\therefore q_3: (\neg p_1) \vee p_2$ 为假命题, $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$ 为真命题.

$\therefore$ 真命题是 q_1, q_4 , 故选 C.

【真题4】 (2009·宁夏、海南)有四个关于三角函数的命题:

$$p_1: \exists x \in \mathbf{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p_2: \exists x, y \in \mathbf{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y$$

$$p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x$$

$$p_4: \sin x = \cos y \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$$

其中的假命题是

A. p_1, p_4

B. p_2, p_4

C. p_1, p_3

D. p_2, p_3

分析 根据命题的知识和三角函数知识, 逐个作出判断即可, 也可结合选项作重点判断.

【详解】 (1) 命题 $p_1: \exists x \in \mathbf{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ 表示特称命题, 由于 $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 \neq \frac{1}{2}$, 所以命题 p_1 是假命题; (2) 因为命题 $p_2: \exists x, y \in \mathbf{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y$ 表示特称命题, 而 $\sin(0-0) = \sin 0 - \sin 0$, 所以命题 p_2 是真命题; (3) 因为命题 $p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x$ 表示全称命题, 而对于 $x \in [0, \pi]$ 时都有 $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{2}} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ 成立, 所以命题 p_3 是真命题; (4) 由命题 $p_4: \sin x = \cos y, x + y = \frac{\pi}{2}$ 表示全称命题, 当 $\sin x = \cos y$ 时, $x + y = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 所以命题 p_4 是假命题. 故选 A.

考点4 充要关系的判断

【真题1】 (2011·福建)在整数集 $\mathbf{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n + k | n \in \mathbf{Z}\}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. 给出如下四个结论:

① $2011 \in [1]$; ② $-3 \in [3]$; ③ $\mathbf{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$; ④“整数 a, b 属于同一‘类’”的充要条件是“ $a - b \in [0]$ ”.

其中, 正确结论的个数是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

分析 本题是一道比较典型的新定义题, 根据给出的定义综合



深化拓展

(1) 非 p 形式的复合命题: 当 p 为真时, 非 p 为假; 当 p 为假时, 非 p 为真.

(2) p 且 q 形式的复合命题: 当 p, q 都为真时, p 且 q 为真; 当 p, q 中至少有一个为假时, p 且 q 为假.

(3) p 或 q 形式的复合命题: 当 p, q 中至少有一个为真时, p 或 q 为真.

(4) 真假关系

原命题为真, 它的逆命题不一定为真;

原命题为真, 它的否命题不一定为真;

原命题为真, 它的逆否命题一定为真.



关键点警示

命题的否命题与命题的否定是不同的两个概念, 若 p 表示命题, 非 p 叫做命题的否定; 如果原命题是“若 p 则 q ”, 那么命题的否定为“若 p 则非 q ”; 而否命题为“若非 p 则非 q ”, 既否定结论, 又否定条件.



知识清单

(1) 充分条件: 如果已知 $p \Rightarrow q$, 即若 p 则 q , 称 p 是 q 的充分条件.

(2) 必要条件: 如果已知 $q \Rightarrow p$, 即若 q 则 p , 称 p 是 q 的必要条件.

(3) 充要条件: 如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就记作 $p \Leftrightarrow q$, 这时 p 既是 q 的充分条件, 又是 q 的必要条件, 我们就说 p 是 q 的充分必要条件, 简称充要条件.

(4) 既不充分又不必要条件: 如果 p, q 之间的关系为: $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 这时就称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

深化拓展

充分条件与必要条件的判断方法

定义法: ①分清条件与结论, 即分清哪一个是条件, 哪一个是结论; ②找推式, 即判断 $p \Rightarrow q$ 及 $q \Rightarrow p$ 的真假; ③下结论, 即根据推式及定义下结论.

等价法: 将命题等价转化为另一个等价的又便于判断真假的命题.

集合法: 写出集合 $A = \{x | p(x)\}$ 及 $B = \{x | q(x)\}$, 利用集合之间的包含关系加以判断.

误区警示

一是对充分必要条件理解错误, 解此类问题, 应当先确定命题的条件, 再分析是充分条件还是必要条件, 要学会在解题中特殊化思想的灵活应用; 二是对不等式恒成立不能转化为最值问题解决或转化错误, 平时应当加强此方面的训练.

考查了元素与集合间的关系、集合间的基本运算, 同时考查了对充要条件的理解.

[详解] 因为 $2\ 011 = 402 \times 5 + 1$, 又因为 $[1] = \{5n + k | n \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $2\ 011 \in [1]$, 故命题①正确, 又因为 $-3 = 5 \times (-1) + 2$, 所以 $-3 \in [2]$, 故命题②不正确, 又因为所有的整数 $\mathbf{Z}$ 除以 5 可得余数的结果为: 0, 1, 2, 3, 4, 所以命题③正确; 若 $a - b$ 属于同一类, 则有 $a = 5n_1 + k, b = 5n_2 + k$, 所以 $a - b = 5(n_1 - n_2) \in [0]$, 反过来, 如果 $a - b \in [0]$, 也可以得到 $a - b$ 属于同一类, 故命题④正确, 所以有 3 个命题正确, 故选 C.

[真题2] (2011·天津) 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x - 2 > 0\}, B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}, C = \{x \in \mathbf{R} | x(x - 2) > 0\}$, 则“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

分析 本小题主要考查了集合的基本运算、不等式的求解、充分必要条件的判断等知识, 综合考查了考生分析与解决问题的能力.

[详解] $A \cup B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}, C = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$,

$\therefore A \cup B = C, \therefore x \in A \cup B$ 是 $x \in C$ 的充分必要条件. 故选 C.

[真题3] (2011·福建) 若 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a = 1$ ”是“ $|a| = 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

分析 本题考查对充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件的理解, 同时考查了命题真假的判断.

[详解] “若 $a = 1$, 则有 $|a| = 1$ ”是真命题, 即 $a = 1 \Rightarrow |a| = 1$, 由 $|a| = 1$ 可得, $a = \pm 1$, 所以“若 $|a| = 1$, 则有 $a = 1$ ”是假命题, 即 $|a| = 1 \Rightarrow a = 1$ 不成立, 所以“ $a = 1$ ”是“ $|a| = 1$ ”的充分而不必要条件, 故选 A.

[真题4] (2010·湖北) 记实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 $a, b, c (a \leq b \leq c)$, 定义它的倾斜度为 $l = \max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} \cdot \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\}$, 则“ $l = 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为等边三角形”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

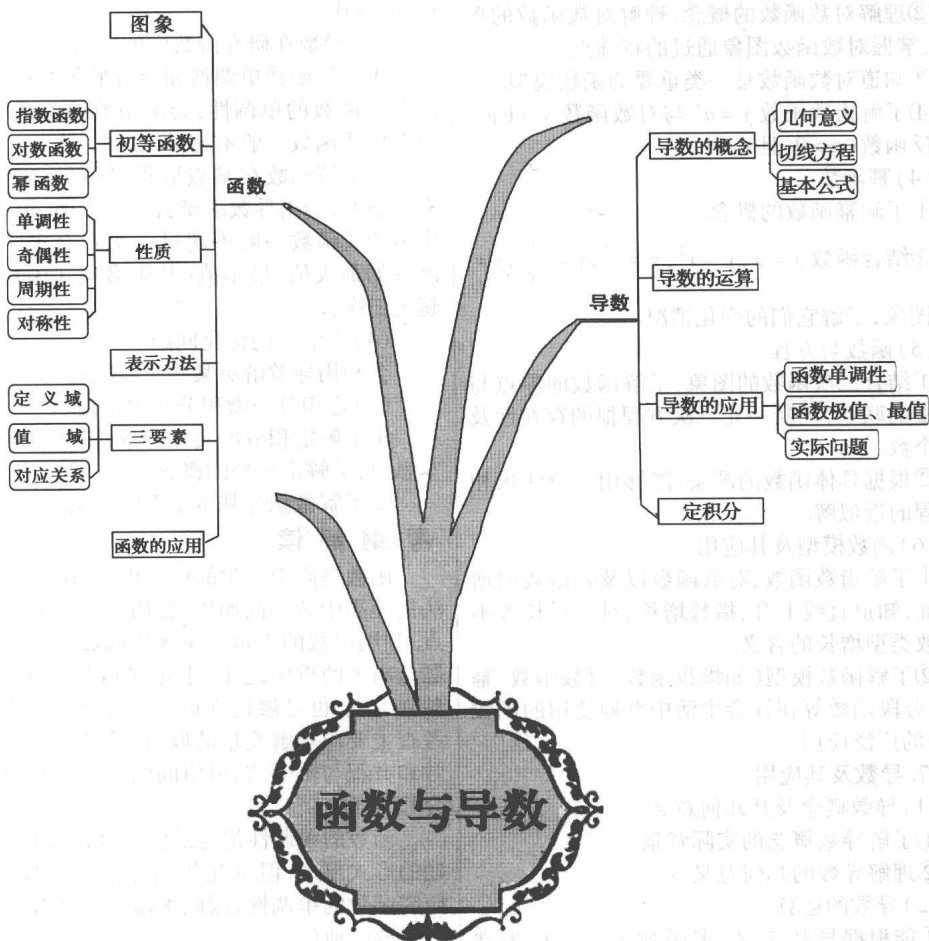
分析 必要性是很显然的, 在假设倾斜度是 1 的情况下推证三角形的可能形状, 对充分性作出判断.

[详解] 很显然, 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = 1$, 此时 $l = \max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} \cdot \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} = 1$. 由于 $a \leq b \leq c$, 故 $\max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} = \frac{c}{a}, \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} = \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\}$, 当 $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{c}$, 即 $ac \leq b^2$ 时, 只要 $\frac{c}{a} \times \frac{a}{b} = 1$, 即 $b = c$, 代入 $ac \leq b^2$, 得 $a \leq b$, 也就是只要 $a \leq b = c$ 且 a, b, c 能构成三角形的三边, 都可以使 $l = 1$; 同理只要 $a = b \leq c$, 且 a, b, c 能构成三角形的三边, 都可以使 $l = 1$, 所以条件是不充分的. 综上可知“ $l = 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为等边三角形”的必要不充分条件, 故选 B.



专题二 函数与导数

本专题考点图解



考试大纲

2. 函数概念与基本初等函数 I (指数函数、对数函数、幂函数)

(1) 函数

①了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域;了解映射的概念.

②在实际情境中,会根据不同的需要选择恰

当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.

③了解简单的分段函数,并能简单应用.

④理解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义;结合具体函数,了解函数奇偶性的含义.

⑤会运用函数图象理解和研究函数的性质.

(2) 指数函数

①了解指数函数模型的实际背景.



②理解有理指数幂的含义,了解实数指数幂的意义,掌握幂的运算.

③理解指数函数的概念,理解指数函数的单调性,掌握指数函数图象通过的特殊点.

④知道指数函数是一类重要的函数模型.

(3) 对数函数

①理解对数的概念及其运算性质,知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数;了解对数在简化运算中的作用.

②理解对数函数的概念,理解对数函数的单调性,掌握对数函数图象通过的特殊点.

③知道对数函数是一类重要的函数模型.

④了解指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数 ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(4) 幂函数

①了解幂函数的概念.

②结合函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,了解它们的变化情况.

(5) 函数与方程

①结合二次函数的图象,了解函数的零点与方程根的联系,判断一元二次方程根的存在性及根的个数.

②根据具体函数的图象,能够用二分法求相应方程的近似解.

(6) 函数模型及其应用

①了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征,知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.

②了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

17. 导数及其应用

(1) 导数概念及其几何意义

①了解导数概念的实际背景.

②理解导数的几何意义.

(2) 导数的运算

①能根据导数定义,求函数 $y = C$ (C 为常数), $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ 的导数.

②能利用下面给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数,能求简单的复合函数(仅限于形如 $f(ax+b)$ 的复合函数)的导数.

• 常见基本初等函数的导数公式:

$(C)' = 0$ (C 为常数); $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$; $(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$; $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' =$

$a^x \ln a$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$); $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' =$

$\frac{1}{x} \log_a e$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

• 常用的导数运算法则:

法则 1: $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

法则 2: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

法则 3: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

($v(x) \neq 0$).

(3) 导数在研究函数中的应用

①了解函数单调性和导数的关系;能利用导数研究函数的单调性,会求函数的单调区间(其中多项式函数一般不超过三次).

②了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;会用导数求函数的极大值、极小值(其中多项式函数一般不超过三次);会求闭区间上函数的最大值、最小值(其中多项式函数一般不超过三次).

(4) 生活中的优化问题

会利用导数解决某些实际问题.

(5) 定积分与微积分基本定理

①了解定积分的实际背景,了解定积分的基本思想,了解定积分的概念.

②了解微积分基本定理的含义.

考纲解读

函数是高中数学的核心内容,函数的思想方法贯穿高中数学的始终,是历年高考的重点和热点.利用函数的表示方法解决函数的一些实际问题是高考的重中之重,求定义域是必考内容,可独立考查,也可渗透在解答题中考查;对值域的考查主要与求解变量的取值范围结合在一起,并常和方程与不等式、最值问题及应用性问题等结合起来考查.

函数的单调性常与最值结合以选择题、填空题的形式出现,但近几年高考常以导数为工具,研究函数的单调性,因此本部分在高考中占有十分重要的地位.

函数图象是“形”与“数”的有机结合,由性质研究图象,由图象研究性质是函数永恒的主题.以图象考查函数性质是高考的常考点.

指数函数、对数函数与幂函数是中学数学中基本初等函数之一,作为研究函数图象及其性质的具体模型,它们在高考中有着重要的地位.高考命题主要考查指数函数与对数函数的性质及应用,以基础知识为主,一般以选择题和填空题的形式出现,例如函数值的求法、数值的大小比较等.另外,其与函数基本性质、分段函数、二次

函数、方程、不等式、导数等内容结合起来的综合命题,在近几年高考中有加强的趋势.

函数与方程一般与函数的奇偶性、单调性、周期性等相结合,综合命题.

导数是研究函数的一个重要工具,在高考中可以选择题或填空题的方式考查导数的几何意义,求曲线在某点处的切线方程、曲线的切线的斜率等,也可以在综合解答题中作为试题的一个组成部分和函数的单调性、极值等问题一起进行综合考查.

考向预测

函数的概念和性质是高考的热点,在客观题中主要是考查函数性质的简单应用;解答题中主要考查利用导数研究函数的性质,其考查方式主要有:(1)结合不等式考查函数的定义域、值域;(2)结合函数的单调性、奇偶性、周期性等求解函数解析式或函数值;(3)结合函数的周期性考查抽象函数、分段函数的求值或不等式的求解;(4)对数函数、指数函数与二次函数相结合考查复合函数的单调性或最值;(5)以函数为背景与

导数、不等式、数列等知识相结合设计试题等;(6)函数的零点问题.

预计在2012年的高考中,涉及指数函数、对数函数、幂函数的命题热点有:(1)图象问题;(2)定义域、值域、单调性等性质及其应用;(3)比较大小、解不等式以及函数在某个区间上的最值问题;(4)与二次函数结合,考查函数的单调性、最值等问题.

函数与方程的命题热点有:(1)函数的零点个数以及零点所在区间的判断;(2)根据函数的零点的个数或方程根的情况求解相关参数的取值范围;(3)函数模型的应用;(4)结合函数应用考查数学建模能力和数学应用意识以及基本运算能力.

导数与函数相结合的命题是近几年高考中的重点内容,可以以选择题或填空题的方式有针对性地考查用导数求函数的单调区间、极值或最值,也可以以综合解答题的方式考查导数在研究函数问题中的运用、用导数研究函数与方程、用导数研究不等式等问题.

真题分类详解

考点5 函数的基本概念

【真题1】 (2011·广东)函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \lg(1+x)$ 的定义域是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

分析 本题考查函数的定义域. 利用分式的分母不为0及对数的真数为正数是解决本题的关键.

【详解】 由 $\begin{cases} 1-x \neq 0, \\ 1+x > 0, \end{cases}$ 得 $x > -1$ 且 $x \neq 1$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$. 故选C.

【真题2】 (2011·江西)若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$,则 $f(x)$ 的定义域为

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, 0]$
C. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

分析 本小题主要考查对数函数的概念及求函数的定义域问题.

知识清单

(1) 函数的定义

①设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y ,如果对于 x 的每一个值, y 都有唯一的值与它对应,那么就称 x 是自变量, y 是 x 的函数.

②如果集合 A 、 B 都是非空的数集,那么 A 到 B 的映射 $f:A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作 $y = f(x)$, $x \in A$.

(2) 函数的构成

在 A 到 B 的函数 $y = f(x)$ 中,其中 $x \in A$, $y \in B$. 原象的集合 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域,象的集合 C ($C \subseteq B$)叫做函数 $y = f(x)$ 的值域. 函数符号 $y = f(x)$ 表示“ y 是 x 的函数”,有时简记作函数 $f(x)$,其中 f 表示对应法则.



深化拓展

(1) 函数是一种特殊的映射 $f: A \rightarrow B$ 必须满足 A, B 都是非空数集, 其象的集合是 B 的子集.

(2) 构成函数的三要素是: 定义域、值域和对应法则, 而值域由定义域和对应法则可以确定. 分析判断两函数是否为同一函数时, 就从这三个方面进行分析, 只有三者完全相同时才为同一函数.

(3) 不同的函数, 会有不同的对应法则, 如 $y = f(x) = \sin x$, 其对应法则为“取正弦”.



综合探究

【真题4】与江苏版数学必修1第23页例2求函数的定义域类似, 是这个例题的改编题, 只不过增加了对数函数与指数函数的定义域, 使得原来的解答题变成了选择题.

【详解】根据题意, 得 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0$, 即 $0 < 2x+1 < 1$, 解得

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right). \text{ 故选 A.}$$

【真题3】(2010·江西)给出下列三个命题:

①函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 是同一函数;

②若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则函数 $y = f(2x)$ 与 $y = \frac{1}{2}g(x)$ 的图象也关于直线 $y = x$ 对称;

③若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x) = f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

其中真命题是

A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②

【详解】对于①, 易求得函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 的定义域为 $\{x |$

$x \neq \pi + 2k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, 函数 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 的定义域为 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$

$(k \in \mathbb{Z})$, 两函数的定义域不同, 故它们不可能是同一函数, ①错误;

对于②, 若 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f^{-1}(x) = g(x)$, 由 $y = f(2x)$, 得 $2x = f^{-1}(y)$, 所以 $y = f(2x)$ 的反函数为 $y = \frac{1}{2}f^{-1}(x)$, 故②正确; 对于③, $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$, 又

$f(x) = f(2-x)$, 所以 $f(2-x) = -f(-x)$, 即 $f(2+x) = -f(x)$, 于是有 $f(4+x) = -f(2+x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为周期函数, 4 是其中的一个周期, ③正确. 故选 C.

【真题4】(2009·福建)下列函数中, 与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 有相同定义域的是

A. $f(x) = \ln x$

B. $f(x) = \frac{1}{x}$

C. $f(x) = |x|$

D. $f(x) = e^x$

【分析】先求出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域 $x > 0$, 再分别求题中各选项

的函数的定义域, 其中只有 $f(x) = \ln x$ 的定义域为 $x > 0$, 从而得解.

【详解】因为 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $x > 0$, 且 $f(x) = \ln x$ 的定义域

也为 $x > 0$, 所以 A 正确. 故选 A.



考点6 函数的图象

【真题1】(2011·四川)函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 的图象关于直线