全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教材指导委员会审定

高等数学学习指导书

张嘉林　主　编

高等农业院校各专业用

中国农业大学出版社

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教材指导委员会审定

高等数学学习指导书

张嘉林 主编

高等农业院校各专业用

中国农业大学出版社

ISBN 7-81002-792-1

9 787810 027922 >

定　价：7.80元

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导书/张嘉林主编. -北京：中国农业大学出版社,1996.9

全国高等农业院校教材

ISBN 7-81002-792-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 14237 号

出版发行　中国农业大学出版社
经　销　新华书店
印　刷　北京丰华印刷厂印刷
版　次　1996 年 8 月第 1 版
印　次　1996 年 8 月第 1 次印刷
开　本　32　8.375 印张　208 千字
规　格　850×1168
印　数　1—1000
定　价：7.80 元

主　　编　张嘉林（中国农业大学）
副 主 编　曾善玉（中国农业大学）
参编人员　许煜沂（中国农业大学）
　　　　　　李金明（中国农业大学）
主　　审　杨崇瑞（南京农业大学）
副 主 审　张德培（河北农业大学）

责任编辑　孟　梅

前　言

本书是按照1982年8月审订的全国高等农业院校高等数学教学大纲的要求，与高等农业院校全国统编教材《高等数学》第二版(裴鑫德主编1987年7月农业出版社出版)配套的教学参考书，是作者在总结多年来高等数学教学实践的基础上编写的，全书共分九章，即极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、二重积分、微分方程以及无穷级数(其中级数这一章是根据发展需要而编写的，不属于原教学大纲的要求范围)。每章由内容提要、教学要求、例题分析、练习题以及自测题等五部分组成。

本书稿由南京农业大学杨崇瑞教授任主审，河北农业大学张德培教授任副主审，他们对书稿进行了认真的审改并提出了宝贵的修改意见和建议。裴鑫德教授对本书的出版给了大力支持和鼓励，作者在此向他们表示衷心的感谢。

本书由张嘉林任主编，曾善玉任副主编，参加编写的还有许煜沂、李金明。限于编者的水平与经验，书中有不妥及错误之处，恳请读者指正。

编者

1993年1月于北京

目　录

第一章　极限与连续

极限概念是高等数学中最基本、最重要的概念. 微积分学中的几乎所有基本概念，都是用极限来定义的. 因此，很好地理解与掌握极限概念及极限运算方法是十分重要的，是学好微积分学的一个关键，同时也是从初等数学迈入高等数学的一个重要阶梯.

连续概念是与极限概念有着密切联系的另一个重要概念，微积分学研究的对象是函数，且主要研究连续函数.

一、内容提要

(一)极限概念

1. 数列的极限

如果对于任意给定的无论多么小的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 的一切 x_n，都有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称数列 x_n 以常数 a 为极限，或者说数列 x_n 收敛于 a，并记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

如果数列 x_n 没有极限，就说数列 x_n 发散.

2. 函数的极限

(1) 自变量趋于无穷大时($x\to\infty$)函数的极限

如果对于任意给定的无论多么小的正数 ε，总存在正实数 N，使得 $|x|>N$ 的一切 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(2) 自变量趋向有限值($x\to x_0$)时函数的极限

如果对于任意给定的无论多么小的正数 ε,总存在一个 $\delta>0$,使得一切适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x,相应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

就说常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

这里 $x\to x_0$ 表示 x 以任意方式趋向于 x_0;$0<|x-x_0|<\delta$ 表示 x 落在 x_0 的 δ 邻域内,但 $x\neq x_0$. 因为 $x\neq x_0$,所以当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 有没有极限,与函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 是否有定义无关.

(3) 左极限与右极限

当 $x<x_0$ 而 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)$ 的极限存在,则此极限称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x),\text{或 } f(x_0-0).$$

当 $x>x_0$ 而 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)$ 的极限存在,则此极限称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x),\text{或 } f(x_0+0).$$

函数的左、右极限定义,也可以用"ε,δ"定义的形式给出,例如左极限的定义,可以叙述为:**对于任意给定的无论多么小的正数 ε,总存在 $\delta>0$,使得一切适合不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ 的 x,相应的函数值 $f(x)$ 都满足**

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

就说 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限.

3. 无穷小与无穷大

数列$\{x_n\}$可以看作以项数 n 为自变量的函数，记作 $f(n)=x_n$. 由于 n 只能取自然数，所以数列是一类特殊的函数. 因此，我们在讨论无穷小与无穷大、函数极限的性质与运算法则时，仅对 $x\to x_0$ 时的函数情况讨论，至于数列以及 $x\to\infty$时的情形，可以得到相应的结论.

(1) 无穷小的概念

当 $x\to x_0$ 时，极限为零的函数 $f(x)$，叫做当 $x\to x_0$ 时的无穷小，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. 无穷小的严格定义，可叙述为：

对于任意给定的无论多么小的正数 ε，存在 $\delta>0$，使得适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所相应的函数值 $f(x)$都有不等式

$$|f(x)|<\varepsilon$$

成立，就称函数 $f(x)$为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(2) 有关无穷小的几个性质

1°有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

2°有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

3°常数与无穷小的乘积是无穷小.

4°有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

(3) 无穷大的概念

对于任意给定的无论多么大的正数 M，存在 $\delta>0$，使得适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所相应的函数值 $f(x)$，都有不等式

$$|f(x)|>M$$

成立，则称函数 $f(x)$为 $x\to x_0$ 时的无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

关于无穷大，我们采用三个记号：

记号“$x\to-\infty$”，读作“x 趋向于负无穷大”，表示变量 x 的值

无限减小；记号“$x \to +\infty$”，读作“x 趋向于正无穷大”，表示变量 x 的值无限增大；记号“$x \to \infty$”，读作“x 趋向于无穷大”，表示变量 x 的绝对值无限增大.

(4) 无穷小与无穷大的关系

如果函数 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；如果 $f(x) \neq 0$ 为无穷小，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(5) 无穷小的比较

如果 $x \to x_0$ 时，α、β 为无穷小且 $\alpha \neq 0$，则

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 时，β 是 α 的高阶无穷小；

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 时，β 是 α 的低阶无穷小；

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 时，β 是 α 的同阶无穷小；

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ 时，β 是 α 的等价无穷小（或相当无穷小）. 记作 $\alpha \sim \beta$.

（二）函数极限的性质

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x)$ **在** x_0 **的左右极限存在且相等，即** $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，**其中** α **为无穷小，即** $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

5. **若** $f(x)$ **在** $x \to x_0$ **时有极限** $\Longrightarrow$ **在** x_0 **的某一邻域内** $f(x)$ **是一个有界函数.**

6. **若** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ **在** x_0 **的某一邻域内为有界函**

数.

7. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而 $A>0$(或 $A<0$)$\Rightarrow$存在 x_0 的某一邻域，对于该邻域内的一切 $x(x\neq x_0)$有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

8. 若函数 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(三)函数极限的运算定理

定理 1 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A+B$.

推论 有限多个存在极限的函数的和的极限，等于极限的和.

定理 2 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\Longrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$.

推论 1 有限多个存在极限的函数的乘积的极限，等于极限的乘积.

推论 2 $\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

推论 3 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$，$n\in N$. 当 $A\neq 0$ 时，有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$，$n\in Z$.

定理 3 $\left.\begin{array}{l}若\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

(四)两个重要极限

1. 极限存在准则 I

如果在 x_0 的某一邻域内(x_0 可除外)有

$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}G(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于 A(对于数列极限有类似的准则).

2. 极限存在准则 II

如果单调数列 x_n 是有界的，则必趋向一个极限.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

(五)函数的连续性

1. 连续函数的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$（其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$），则说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 否则便说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是间断的.

函数 $f(x)$ 在某区间上的每一点都连续时，就说函数 $f(x)$ 在该区间上是连续的.

上述函数连续的定义还可以叙述为：

如果函数 $f(x)$ 满足(1)在点 x_0 有定义；(2)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如果三个条件中有一条不满足，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

2. 连续函数的性质

(1) **有限个在某点连续的函数的代数和，在该点仍连续.**

(2) **有限个在某点连续的函数的乘积，在该点仍连续.**

(3) **两个在某点连续的函数的商，当分母在该点不为零时，其商也在该点连续.**

(4) **有限个连续函数所组成的复合函数，仍为连续函数.**

(5) **初等函数在其定义域内是连续的.**

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) **如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在此区间上至少取得最大值、最小值各一次.**

(2) **如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，又 μ 为介于 $f(a)$**

与 $f(b)$ 之间的任意一个值，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ 存在，使得 $f(\xi)=\mu$.

(3) **如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ 存在，使得 $f(\xi)=0$.**

二、教学要求

1. 理解掌握数列极限的概念，会用数列极限的“ε,N”定义验证某些极限. 掌握函数极限的概念，正确理解函数极限的“ε,δ”定义中每个符号的含义.

2. 深刻理解无穷小的概念，掌握无穷小的运算性质.

3. 理解掌握函数极限的几个主要性质，熟练掌握极限运算法则.

4. 能熟练地运用两个重要极限，以及初等函数的连续性进行极限运算，初步掌握几种未定型求极限的方法.

5. 理解掌握函数连续与间断的概念，掌握连续函数的运算性质，了解左右极限的概念，了解在闭区间上连续函数的几个性质.

重点 函数极限概念的建立及极限计算.

难点 极限理论的证明.

三、例题分析

例 1 用极限定义证明下列各极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1(a>0)$，　2. 当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$，　4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$，　5. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明 用定义证明数列极限的关键是对于任给的 $\varepsilon>0$，寻找一个使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的正整数 N，对于 $n>N$ 的一切 n，上述不等式成立. 其证明方法，一般采用以分析法进行分析，再以综合法叙述.

证明 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1(a>0)$

分析 对于任给的 $\varepsilon>0$,欲使 $n>N$ 的一切 n,不等式 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立,只需

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=$$

$$\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\leqslant\frac{a^2}{n(n+n)}=\frac{a^2}{2n^2}<\varepsilon \quad \text{成立即可.}$$

欲使 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$ 成立,只需 $\dfrac{a}{\sqrt{2}\,n}<\sqrt{\varepsilon}$ 成立,即 $n>\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$ 成立.

由于 $\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$ 不一定是正整数,故需取整,所以取 $N=[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}]$. 这个 N 就是我们要寻找的那个与 ε 有关的正整数. 因为当 $n>N=[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}]$ 时,就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立.(注意:可由 $n>[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}]$,推出 $n>\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$).

下面用综合法叙述:

任给 $\varepsilon>0$,可以找到一个正整数 $N=[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}]$,对于 $n>N$ 的一切 n,都有不等式

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$$

成立. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

评注 1 用定义证明数列的极限的关键是寻找 N. 如何寻找 N?从绝对值不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发,寻找一个与之等价的不等式 $n>g(\varepsilon)$(上例中的 $g(\varepsilon)=\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$),即

$$|x_n-a|<\varepsilon\Longleftrightarrow n>g(\varepsilon).$$