新世纪高职高专基础课系列教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical statistics

NEUPRESS
东北大学出版社

新世纪高职高专基础

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 岳晓宁，张彩华，王盛海主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.8（2005.8 重印）
ISBN 7-81102-022-X

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①岳… ②张… ③王… Ⅲ. ①概率论 ②数理统计 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 072513 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印 张：10
字 数：256 千字
出版时间：2004 年 8 月第 1 版
印刷时间：2005 年 8 月第 2 次印刷
责任编辑：孟 颖 刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：张 力
责任出版：秦 力

定 价：15.00 元

前　言

进入21世纪以后，我国的高职高专教育有了突飞猛进的发展，但教材建设却略显滞后。特别是近年来学制缩短、人才需求变化等诸多因素的影响，对教材，特别是基础课教材提出了更新、更严格的要求。正是在这种形势下，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出适用于理工类高职高专各专业使用的《概率论与数理统计》一书。

本书是依据教育部制定的“高职高专教育课概率论与数理统计课程教学基本要求”而编写的，遵循的是“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑到相当多的学校概率论与数理统计课学时减少这一实际情况。为此，确立编写本书的指导思想为：重视概念、强调应用、侧重计算。本书的特色也体现在下述几个方面：

1. 重视基本概念

概率论与数理统计内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的实际应用背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲。在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质以及数学的价值。

2. 强调实际应用

本着学习数学是为了使用数学这一宗旨，并考虑到高职高专教育的目标是培养应用性人才，书中较多选择了工程和经济方面的例题和习题，以提高运用概率论与数理统计知识解决实际问题的意识和能力。

3. 侧重运算、解题能力

根据高职学生的特点，力求内容深入浅出、论证简明易懂，侧重于运算、解题能力的训练，让学生在弄清基本概念的基础上熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到增加运算速度、提高解题能力的目的。每章均附有与教学内容密切联系的习题，并在书末给出答案。

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号标出，供相关专业选择。同时也考虑到“专升本”的需要，有些章节的内容略有加深，也给出了少量的带星号的习题。

全书共有9章，内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限理论、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等。各节后配有适量的精选习题。

本书主要适于用做高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院理工类各专业的概率论与数理统计课的教材。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教。

作　者

2004年2月

《概率论与数理统计》编写人员

主　　　编：岳晓宁　张彩华　王盛海

副　主　编：李修清　刘玉晓　王立冬

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王竞波　李国强　赵　岩

赵玉怀　崔西玲　葛有兰

目　录

“*”系选讲内容。

第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件

一、随机试验与随机事件

1. 随机现象

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 有一类现象在一定的条件下必然发生或必然不发生，称为**确定性现象**. 例如，在标准大气压下，纯水加热到100℃，必然会沸腾；沿水平方向抛出的物体，一定不作直线运动. 另一类现象却呈现出非确定性. 例如，向桌面抛掷一枚硬币，其结果可能是“正面朝上”，也可能是“正面朝下”，这里的正面是指有国徽的一面. 又如在有少量次品的一批产品中任意地抽取一件产品，结果可能抽得一件正品，也可能抽得一件次品. 可以将这类现象看作是在一定条件下的试验或观察，每次试验或观察的可能结果不止一个，而且在每次试验或观察前无法事先知道确切的结果. 人们发现，这类现象虽然在每次试验或观察中具有不确定性，但在大量重复试验或者观察中，其结果却呈现某种固定的规律性，即统计规律性，称这类现象为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

2. 随机试验与随机事件

研究随机现象，必须进行各种观察和试验. 现举一些试验的例子.

例1　E_1：抛一枚质地均匀的硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：将一枚质地均匀的硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_3：抛一颗骰子观察其出现的点数；

E_4：在次品率为 p 的一批产品中，抽取 n 件产品观察其次品个数；

E_5：在一批日光灯中，任取一只，测试它的寿命.

上面5个试验的例子有着共同的特点. 例如，试验 E_1 有两种可能结果，出现 H 或出现 T，但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行. 这些试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

把具有上述三个特点的试验称为**随机试验**. 以后所说的试验都是随机试验.

随机试验的结果称为随机试验的**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用字母 A，B，C 等表示. 例如在 E_2 中“三次都为正面 H”是随机事件，在 E_5 中“所取日光灯的寿命超过 800h” 是随机事件等.

在概率论中，是通过随机试验中的随机事件来研究随机现象的.

二、基本事件与样本空间

随机试验的每一个可能的基本结果称为这个试验的一个**基本事件**(或样本点). 全体基本事件的集合称为这个试验的**样本空间**，记为 S.

下面写出试验 $E_k(k=1, 2, \cdots, 5)$的样本空间 S_k：

S_1：$\{H, T\}$；

S_2：$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$；

S_3：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

S_4：$\{1, 2, \cdots, n\}$；

S_5：$\{t \mid t \geqslant 0\}$.

可见，随机事件由基本事件组成，因此随机事件是样本空间的子集. 例如 E_3 中，事件 $A=\{2, 4, 6\}$是 S_3 的一个子集，它表示“出现偶数点”，由三个基本事件所组成.

随机事件中有两个极端的情况：一是由样本空间 S 中的所有元素组成的集合，称之为**必然事件**，它在每一次试验中都发生. 例如 E_3 中，事件 $B=$“出现点数都不大于 6”就是必然事件；另一种是不含任何样本点的集合，称之为**不可能事件**，用$\varnothing$来表示，例如 E_3 中，事件 $C=$“出现点数大于 6”就是不可能事件，它在每次试验中都不会发生. 严格地说这两种事件不是随机事件，但为了以后讨论方便，把必然事件与不可能事件作为随机事件的特殊情形统一处理.

三、事件的关系与运算

在同一随机试验中，事件不止一个，有些事件简单，有些事件复杂. 通过研究它们之间的关系，可以更好地帮助人们理解事件的本质.

设试验 E 的样本空间为 S，并且 A，B，C，$A_k(k=1, 2, 3, \cdots)$是 S 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A(或事件 A 包含于事件 B)，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

例如在 E_3 中，若记 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，则有 $A \subset B$.

显然，必然事件 S 包含任何事件 A，事件 A 包含不可能事件$\varnothing$，如图 1-1.

2. 相等关系

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，即 $A \supset B$ 且 $A \subset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

3. 事件的并

若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**并事件**(或 A 与 B 的和事件)，记为 $A \cup B$.

例如，10 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，若 A 表示“取到 1 件次品”，B 表示“取到 2 件次品”，则和事件 $A \cup B$ 表示“至少取到 1 件次品”.

事件 $A \cup B$ 通常包含三个部分：A 发生而 B 不发生；A 不发生而 B 发生；A，B 都发生. 如图 1-2.

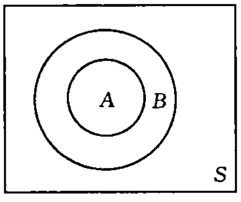

图 1-1

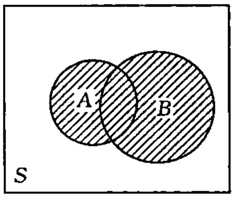

图 1-2

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的并事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示“A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”.

4. 事件的交

由事件 A 与事件 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件**(或 A 与 B 的积事件)，记为 $A \cap B$ 或 AB. 如图 1-3.

例如，在 E_3 中，若记

$$A = \{2, 4, 6\}, \ B = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

则

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}.$$

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的交事件 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 表示“A_1，A_2，…，A_n 同时发生”.

5. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 为**互不相容事件**(或互斥事件). 如图 1-4.

例如，在 E_3 中，若记 $A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{3, 5\}$，则 $A \cap B = \varnothing$，即 A，B 是互不相容事件.

一般地，对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若它们之间两两互不相容，则称这 n 个事件是互不相容的.

6. 事件的差

事件 A 发生事件 B 不发生，这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为

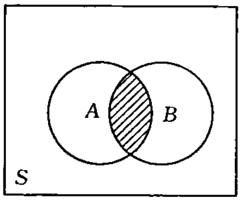

图 1-3

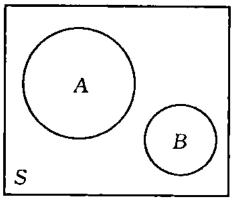

图 1-4

$A-B$. 如图 1-5.

例如，在 E_3 中，若记

$$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\},\ B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\},$$

则

$$A-B=\{1,\ 6\}.$$

7. 逆事件

若事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A\cup B=S$，$A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**(或对立事件)，记为 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$. 如图 1-6.

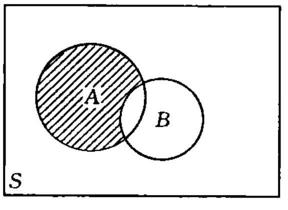

图 1-5

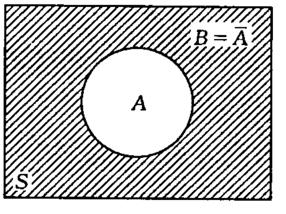

图 1-6

例如，在 E_3 中，若记

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\},$$

则 A，B 为互为逆事件.

容易验证：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$；

(2) $A-B=A\overline{B}$；

(3) $\overline{A}=S-A$.

概率论中事件间的关系和运算与集合论中集合间的关系在形式上类似，利用在中学里学到的集合知识，可以更好地理解概率论中事件间的关系(见表 1-1).

从集合的运算规则可以得到事件的运算规则：

(1) 交换律：

$$A\cup B=B\cup A,$$
$$A\cap B=B\cap A;$$

(2) 结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

表 1-1

符　号	概　率　论	集　合　论
S	样本空间(必然事件)	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点(基本事件)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 并集
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

(3) 分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

(4) 对偶公式：

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n},$$
$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}.$$

例 2　设 A，B，C 表示任意三个随机事件，用 A，B，C 及其运算符号表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生；

(3) A 与 B 发生而 C 不发生；

(4) A，B，C 三个事件中只有一个发生；

(5) A，B，C 中至少有两个发生；

(6) A，B，C 中至多有一个发生.

解　(1) 该事件可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) 因为 $B\cup C$ 表示 B 与 C 至少有一个发生，所以该事件可表示为 $A\cap(B\cup C)$；

(3) 该事件可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(4) 该事件可表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(5) 该事件可表示为 $AB\cup BC\cup CA$；

(6) 该事件可表示为 $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{C}\overline{A}$.

第二节　事件的概率

一、概率的统计定义

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，人们往往需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性有多大．要将随机事件发生的可能性大小用一个数来表示，就要用到频率和概率的概念．

定义　在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 m，则称

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**，m 称为**频数**．

频率具有下列基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

经验表明，事件 A 的频率并不是一个固定不变的常数，不但对于不同的试验次数，事件 A 的频率可能取不同的值，即使保持试验次数相同，重复进行该试验时，它也会取不同的数值．然而当试验次数充分大时，它又会稳定于某一个确定的数值附近，极少出现显著的差异．

历史上曾有人做过大量地投掷硬币的试验，得到如表 1-2 所示的试验结果．

表 1-2

试验者	投币次数(n)	出现正面的次数(m)	频率(m/n)
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

由表 1-2 可以看出，当投掷硬币的次数很多时，“出现正面”事件的频率稳定于 0.5 附近，而且随着试验次数的增多，这样的趋势明显增强．

事件的频率反映它在一定条件下出现的频繁程度，可以设想，一个事件在每次随机试验中出现的可能性越大，那么它在 n 次试验中出现的频率也越大．反之，由频率的大小，也能判断事件出现的可能性大小．总之，频率在一定程度上反映事件发生可能性的大小，尽管它具有随机波动性，然而在大量的重复试验中，它又具有一定的趋于稳定的性质．频率的这种稳定性，正是概率定义的基础．

概率的统计定义　在相同的条件下进行大量的重复试验，当试验次数充分大时，事件 A

的频率总围绕着某一个数值 p 作微小摆动，则称 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

由概率的统计定义和频率的有关性质可知概率具有下列性质.

性质1 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质2 $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$.

应该指出，事件的频率是个试验值，它具有随机性，只能近似地反映事件发生可能性的大小；事件的概率则是个理论值，它由事件的本质属性确定，因而只能取唯一值，它能精确地反映事件发生可能性的大小．不过，当试验次数很大时，事件的频率与其概率一般相差很小，所以，在实际应用中当试验次数很大时，常用事件的频率来近似估计事件的概率，而且试验次数愈大，这种估计愈精确.

二、古典概型

根据概率的统计定义确定事件的概率，需要进行大量的重复试验或观测．然而，在某些特殊的情况下，存在着一类简单的随机试验，只要依据人们长期积累的经验，直接应用理论分析的方法就能直接确定事件的概率.

例如，在投掷一次质地均匀的硬币的试验中，由于硬币正面及反面所具有的某种对称性，可以断言，事件“正面朝上”与“反面朝上”的可能性是相同的，都为 1/2．又如，在投掷一颗骰子的试验中，由于其对称性，各面朝上的可能性相等，都为 1/6.

这类随机试验具有下述两个特点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点(基本事件)；

(2) 试验中每个样本点(基本事件)出现的可能性相同.

具有这两个特点的概率数学模型称为等可能概型，它在概率论的发展初期曾经是主要的研究对象，因此又称为**古典概型**.

概率的古典定义 对于古典概型，假定样本空间所包含的基本事件总数为 n，事件 A 所包含的基本事件数为 m，则事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

根据定义，要计算古典概型事件 A 的概率，必须搞清楚样本空间所包含的基本事件总数以及事件 A 所包含的基本事件数.

例1 从 1，2，…，10 中任取一数，求取得的数能被 3 整除的概率.

解 显然，样本空间所包含的基本事件总数为 $n=10$，若设事件 A 表示“所取的数能被 3 整除”，则事件 $A=\{3, 6, 9\}$，即事件 A 所包含的基本事件数 $m=3$.

因此，所求概率 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{10}=0.3$.

例2 10 件产品中有 3 件次品，从中随机地取 3 件，求下列事件的概率：

(1) $A=$“3 件全为正品”；

(2) $B=$"3 件中恰有两件次品".

解 样本空间所包含的基本事件总数 n 为从 10 件产品中取 3 件的组合总数，即 $n=\mathrm{C}_{10}^{3}$.

(1) 事件 A 所包含的基本事件数 m_1 为从 7 件正品中取 3 件的组合总数，即 $m_1=\mathrm{C}_7^3$. 因此，

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{\mathrm{C}_7^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{35}{120}=0.292.$$

(2) 事件 B 所包含的基本事件数 m_2 为从 7 件正品中取 1 件的组合总数与从 3 件次品中取 2 件的组合总数的乘积，即 $m_2=\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^2$. 因此，

$$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{21}{120}=0.175.$$

例 3 计算小强的生日是星期日的概率. 如果他出生年的 2 月份有 28 天，再求小强的生日在 6 月份的概率.

解 人的生日的星期数有 7 种，以这 7 种星期数为生日可以看作 7 个基本事件，"小强的生日是星期日"是其中的一个基本事件，所以，"小强的生日是星期日"这一事件的概率为$\frac{1}{7}$.

一年有 12 个月，但各月份的天数不尽相同，因此，以各个不同月份为生日并非等可能，所以不能认为"生日在 6 月份"的概率为$\frac{1}{12}$. 小强出生年共 365 天，这 365 天构成所有的基本事件，故 $n=365$. 六月份有 30 天，故 $m=30$.

设 $A=$"小强的生日在 6 月份"，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{365}=\frac{6}{73}.$$

可见，按古典定义计算随机事件的概率时，首先要注意基本事件应具备等可能性. 另外，在分析计算构成样本空间的基本事件总数及事件 A 所包含的基本事件数时，既不要遗漏也不要重复.

例 4 已知 20 件产品中有 5 件次品，

(1) 作放回抽样，每次随机地取出 1 件，共取 3 次；

(2) 作不放回抽样，每次随机地取出 1 件，共取 3 次.

求取出的 3 件都是正品的概率.

解 (1) 因为每次抽取后都放回，故每次随机地取 1 件，有 $\mathrm{C}_{20}^1=20$ 种取法，接连取三次，共有 20^3 种取法，因而，样本空间所包含的基本事件总数为 $n=20^3$.

设事件 $A=$"取出的 3 件都是正品". 事件 A 发生，相当于从 15 件正品中有放回地接连取 3 次，每次取 1 件，共有 15^3 种取法，即事件 A 包含的基本事件总数为 15^3，因此

$$P(A)=\frac{15^3}{20^3}=\frac{27}{64}=0.421\ 9.$$