

现代物理基础丛书

35

引力理论

(下 册)

王永久 著



科学出版社

现代物理基础丛书 35

引 力 理 论

(下册)

王永久 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地阐述了广义相对论的基本内容和相关领域近年来的新进展,包括作者和合作者们以及国内外同行学者们的近期研究成果. 全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体动力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇,共 37 章 230 节.

本书可供理论物理、天体物理和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读,也可供本科高年级学生和自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

引力理论.下册 / 王永久著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031070-5

I. ①引… II. ①王… III. ①引力理论 IV. ①O314

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 088586 号

责任编辑: 钱 俊 张 静 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张: 49 3/4

印数: 1—2 000 字数: 966 000

定价: 98.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

《引力理论和引力效应》一书自 1990 年出版以来有幸受到诸多读者的欢迎, 出版不到两年时间便已售完, 不少读者希望再版. 本书在对《引力理论和引力效应》进行修改的基础上增加了广义相对论近年来的新成果和新进展. 由于篇幅限制, 关于黑洞量子化的部分内容 (黑洞的面积量子化、质量量子化和电荷量子化) 以及宇宙学的部分内容 (宇宙暴胀的机制、圈量子宇宙和大爆炸的量子特性) 未做详细阐述, 有兴趣的读者可分别参阅《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008) 和《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010).

1687 年, 牛顿创立了第一个引力理论, 这是人类对自然界普遍存在的力 —— 引力的认识的第一次升华. 牛顿引力理论首次揭开了行星运动之谜, 奇迹般地预言了两个行星 (海王星和冥王星) 的存在并被天文观测所证实, 从此牛顿的名字誉满全球. 直至 20 世纪初, 这一理论是人们普遍接受的、唯一正确的引力理论. 随着人类智慧的发展, 牛顿引力理论的困难日益引起学者们的重视: 它无法解释天文学家观测到的事实 —— 水星近日点的移动, 无法解释物体的引力质量为何等于惯性质量

牛顿引力理论无法用来研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙会导致著名的纽曼 (Newman) 疑难.

1916 年, 爱因斯坦以全新的观点创立了新的引力理论 —— 广义相对论, 这是人类对引力认识的第二次升华. 爱因斯坦引力理论将时-空几何和引力场统为一体, 以其简洁的逻辑和优美的结构令学者们叹服甚至陶醉. 它圆满地解决了牛顿引力理论的困难, 并将牛顿引力理论纳入自己的特殊情况 (弱场近似).

爱因斯坦引力理论的建立, 第一次为宇宙学提供了动力学基础, 使宇宙学成为一门定量的科学. 爱因斯坦的引力场方程可以用于宇宙, 作为宇宙演化的动力学方程. 因此, 应用广义相对论, 可以根据宇宙的现在研究宇宙过去和未来.

引力理论的发展在很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解及其物理解释. 本书第一部分以场方程的严格解为中心论述广义相对论的基本内容, 给出了爱因斯坦引力场方程的数十个严格解的推导过程和诸种生成解技术; 系统地叙述了广义相对论流体动力学; 阐述了黑洞的时空理论、经典黑洞热力学、黑洞熵的量子修正和黑洞的量子效应.

大爆炸宇宙学成功地解释了自 $t = 10^{-2}$ 秒 (轻核形成) 至 $t = 10^{10}$ 年 (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氢丰度测量)、星系光谱的宇宙学

红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等。宇宙背景辐射的观测两次获得诺贝尔物理学奖 (1978 年, 2006 年), 就是因为它们支持了大爆炸宇宙模型。由于大爆炸宇宙模型普遍为人们所接受, 故称其为标准宇宙模型。然而标准宇宙模型仍有它的困难, 就是在 $t = 10^{-10}$ 秒这一极早期演化阶段中的四个问题: 奇点问题、视界问题、平直性问题和磁单极问题。本书第七篇阐述了宇宙的暴胀理论。这一理论解决了上述四个问题中的后三个。它已经把我们带到 $t = 10^{-36}$ 秒的宇宙极早期, 已接近宇宙的开端。我们可以把加入了暴胀理论的大爆炸宇宙模型称为新的标准宇宙模型。标准宇宙模型原来的四个困难问题还剩下一个, 即宇宙的初始奇点 (宇宙的创生) 问题, 这是本书第八篇 (量子宇宙学) 的内容。

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的。严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上。然而, 至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论。尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解到的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题——宇宙的创生问题。20 世纪末, 哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、维林金 (Vilenkin) 等提出, 用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 宇宙动力学方程即惠勒-德维特方程。这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了。本书第八篇阐述了哈特-霍金的量子宇宙学理论。

由引力场方程和场源物质及试验粒子的运动方程, 可以引出许多新的推论, 其中有一些具有明显的物理意义。这些推论是牛顿力学中所没有的, 称为广义相对论引力效应。本书第十篇收集了 141 种广义相对论引力效应。除了和几个经典实验相对应的引力效应以外, 还有更多的引力效应不能为目前的实验所检验。随着观测技术、引力辐射探测技术和空间技术的发展, 太阳系不再是检验引力理论的唯一场所, 这一点已经越来越明显。可望在今后的 10 年内, 有更多的引力效应为新的实验所检验。

全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇, 共 37 章 230 节。

作者与同事和合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授获得过两次国际引力研究荣誉奖 (美国)、两次中国图书奖和一次教育部科技进步奖; 在几种相关杂志上发表过一些文章 (*Phys. Rev. D* 47 篇, *Ap. J. Lett.* 3 篇, *Ap. J.* 3 篇, *JCAP* 3 篇, *Nucl. Phys. B* 21 篇, *JHEP* 9 篇, *Phys. Lett. A&B* 32 篇, 《中国科学》4 篇), 加上诸多国内外同行学者的原始论文, 其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中。

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、张元仲研究员、D. Kramer 教授、C. Will 教授、V. Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元

院士、陆埏院士,他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见,对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授进行过多次讨论和交流,受益颇多,在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、潘启元、张佳林、龚添喜诸位博士,他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

本书和作者的前两本书《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008)、《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010) 分别得到了国家“973”计划、国家理论物理重点学科和中国科学院科学出版基金的资助,作者深表感谢.

王永久

于湖南师范大学物理研究所

2010 年 4 月

目 录

前言

第六篇 广义相对论宇宙学

第 1 章 宇宙学原理和 Robertson-Walker 度规	453
1.1 宇宙学原理	453
1.2 Robertson-Walker 度规	453
1.3 空间距离和曲率	455
1.4 粒子和光子的行为	456
第 2 章 宇宙动力学	460
2.1 爱因斯坦场方程	460
2.2 弗里德曼宇宙模型	461
2.3 宇宙物质的密度和压强	463
2.4 宇宙年龄的计算	464
2.5 粒子视界和事件视界	465
2.6 含有宇宙因子的模型	467
2.7 宇宙早期结构和背景辐射	469
第 3 章 经典宇宙学问题专论	472
3.1 Bianchi-I 型宇宙	472
3.2 五维 Bianchi-V 型宇宙	475
3.3 Gödel 宇宙	477
3.4 六维宇宙	478
3.5 Einstein-Cartan 宇宙	488
3.6 Dirac 假设	494
3.7 奇点定理	494
3.8 暗物质和暗能量	495

第七篇 宇宙的暴胀

第 1 章 暴胀宇宙模型概述	507
1.1 标准 (大爆炸) 宇宙模型的成就和困难	507
1.2 暴胀宇宙模型概述	511
第 2 章 宇宙的暴胀	514
2.1 'tHooft-Polyakov 磁单极	514
2.2 $SU(5)$ 大统一理论和有效势	516
2.3 由假真空向真真空的跃迁	519
2.4 林德等的工作	524
2.5 量子涨落和密度扰动的演化	528
2.6 小结	531

第八篇 量子宇宙学

第 1 章 宇宙量子力学	535
1.1 量子引力的路径积分表述	535
1.2 宇宙动力学方程	538
1.3 边界条件	540
第 2 章 宇宙波函数	544
2.1 基态波函数的表述	544
2.2 半经典近似	546
2.3 小超空间模型	547
第 3 章 宇宙结构的起源	555
3.1 引言	555
3.2 广义相对论的正则形式	556
3.3 量子化	557
3.4 未受扰动的弗里德曼模型	559
3.5 扰动的弗里德曼模型	560
3.6 三维球面上的谐函数	564
3.7 作用量和场方程	567
3.8 波函数	570

3.9 边界条件	571
3.10 扰动的增长	574
3.11 实验检验	576

第九篇 Brans-Dicke 理论和膜宇宙

第 1 章 Brans-Dicke 理论	581
1.1 物理基础	581
1.2 度规场方程	582
1.3 平直时空极限	585
1.4 球对称时空	587
1.5 关于物理思想的讨论	588
1.6 宇宙模型	589
第 2 章 高维时空和膜宇宙	592
2.1 宇宙常数和膜宇宙概述	592
2.2 Randall-Sundrum 膜宇宙模型	595
2.3 含有五维时空标量场的模型	603
2.4 小结	609

第十篇 广义相对论引力效应

第 1 章 引力场中的频移效应	613
1.1 均匀引力场的情况	613
1.2 静态引力场中的静止情况	613
1.3 光源和接收器运动的情况	614
1.4 Schwarzschild 场中的红移效应	616
1.5 R-N 场中的频移效应	618
1.6 宇宙项对频移的贡献	619
1.7 质量四极矩场中的频移效应	619
1.8 Kerr 场中的频移效应	620
1.9 平面引力波场中的频率效应	621
1.10 关于地球引力场中的频移效应	622
第 2 章 引力场中物体的轨道效应	624

2.1	试验粒子的短程线运动	624
2.2	试验粒子的非短程线运动	625
2.3	重质量物体的运动	628
2.4	Schwarzschild 场中的近日点移动 (爱因斯坦经典效应)	635
2.5	Nordtvedt 效应	642
2.6	Schwarzschild 场中近日点的移动 (非经典效应)	644
2.7	Schwarzschild 场对试验物体轨道参量的限制	647
2.8	Schwarzschild 场中的进动效应	649
2.9	引力电荷对近日点移动的贡献	654
2.10	引力电荷场中的圆轨道	656
2.11	宇宙因子对轨道近日点移动的影响	656
2.12	宇宙因子对圆轨道半径的限制	657
2.13	Kerr 场中轨道近日点的移动	658
2.14	Kerr 场对轨道的限制	659
2.15	Kerr 场中的运动效应	661
2.16	质量四极矩场中的轨道效应	663
2.17	引力波场中的轨道效应	664
第 3 章	引力场中极端相对论粒子和光子的轨道效应	666
3.1	极端相对论粒子的轨道	666
3.2	Schwarzschild 场中的光子轨道效应	668
3.3	Schwarzschild 场中对光子轨道的限制	673
3.4	R-N 场中光子的轨道效应	674
3.5	Kerr 场中极端相对论粒子和光子的轨道效应	676
3.6	其他引力场中的光子轨道效应	678
第 4 章	试验粒子和电磁信号的延迟效应	681
4.1	延迟时间表达式	681
4.2	Schwarzschild 场中电磁信号的延迟效应	684
4.3	其他场中的延迟效应	686
第 5 章	引力加速效应	689
5.1	试验粒子的加速度	689

5.2	Schwarzschild 场中的加速效应	690
5.3	引力电荷产生的加速效应	691
5.4	Kerr 场中的加速效应	691
5.5	其他引力场中的加速效应	692
5.6	时钟佯谬的严格讨论	697
第 6 章	引力场中的亏损效应	701
6.1	Schwarzschild 场中的亏损效应	701
6.2	Kerr 场中的亏损效应	705
6.3	引力波场中的亏损效应	707
6.4	质量亏损效应	708
第 7 章	其他引力效应	713
7.1	类光学引力效应	713
7.2	宇宙空间的光学各向同性效应	720
附录	黎曼几何和张量分析	723
F.1	坐标变换	723
F.2	张量	724
F.3	张量密度	732
F.4	联络和克里斯托费尔符号	734
F.5	协变微分	735
F.6	短程线坐标系	740
F.7	曲率张量	741
F.8	短程线	743
F.9	共形曲率张量	745
参考文献		749
	《现代物理基础丛书》已出版书目	766

第六篇 广义相对论宇宙学

在迄今为止人们所知道的各种力中,引力是唯一不可屏蔽的长程力.对于分布于大范围空-时中的大量物质和空-时本身,引力应是起决定作用的力.因此,引力决定宇宙动力学,从而决定宇宙的演化;任何定量的宇宙学理论必须以引力理论为基础.

每种引力理论都有相应的宇宙模型,如标量引力理论、FSG 理论等.本篇只研究建立在爱因斯坦引力理论基础上的宇宙模型.

第 1 章 宇宙学原理和 Robertson-Walker 度规

宇宙学是论述整个宇宙的, 而人类对宇宙的观测只涉及宇宙的一小部分. 对这一小部分的观测又只有很短的历史. 对行星系的观测有几千年, 对其他星系的观测只有 100 年. 尽管如此, 人们以观测资料为基础, 根据爱因斯坦的引力理论, 已构成一幅宇宙演化的图像. 可以证明, 这一图像是自洽的, 与迄今为止的观测资料相符合. 按照下面要介绍的宇宙学原理, 人们没有必要知道尚未观测到的空间区域的任何情况.

1.1 宇宙学原理

按照现代的观测技术, 可观测区域已扩展到 3×10^9 光年. 为了以这一观测区域的信息为基础来研究宇宙的总体结构, 需要有一些假设. 在可观测到的区域内发现, 在宇观尺度上, 星系分布、射电源数目和微波背景辐射等基本上都是均匀的、各向同性的. 人们假设: 在宇观尺度上, 任何时刻三维宇宙空间是均匀的和各向同性的, 这就是宇宙学原理. 根据这一原理, 宇宙中一切位置都是等同的. 这样一来, 在宇宙中没有优越的位置和优越的方向, 当然也就没有必要知道尚未观测到的区域的情况. 宇宙中每一个星系或者星系团都是构成宇宙的平等元素. 根据宇宙学原理, 宇宙中任一点和任一方向都不可能用任一物理量的不同来区分. 但是同一点的物理量在不同时刻却可以有不同的值. 所以宇宙学原理允许宇宙随时间变化. 为了研究宇宙随时间的变化, 不同位置的观察者之间要能够比较他们的观测结果, 于是就必须有一共同的时间标准, 这一时间称为宇宙时. 宇宙时的存在也是宇宙学原理成立的前提.

1.2 Robertson-Walker 度规

宇宙学原理用几何术语表述为: 三维空间应是具有最大对称性的空间, 即一个具有常曲率但曲率可以随时间变化的空间. 根据第二篇、第三章的讨论, 满足上述要求的四维空-时一定具有 Robertson-Walker 度规

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.2.1)$$

因此, 这个均匀宇宙模型的度规实际上已经由对称性要求所确定. 式中 $R(t)$ 是时间的未知函数, k 是一个常数, 适当选择 r 的单位, 可以使 k 取值为 $+1, 0$ 或 -1 . 爱因斯坦引力场方程则作为宇宙动力学方程, 确定宇宙的时间行为 (宇宙的演化), 即确定函数 $R = R(t)$, 并确定局部空间性质即 k 的值. 这些问题将在第 2 章中讨论.

引入变换

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{1}{4} k \bar{r}^2 \right)^{-1}, \quad (1.2.2)$$

可将 (1.2.1) 改写为

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + k\bar{r}^2/4)^2} [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (1.2.3)$$

再作一次变换, 令

$$\begin{aligned} \bar{R}^2(t) &= R^2(t) \left(1 + \frac{1}{4} k \bar{r}^2 \right)^{-2}, \\ d\bar{t} &= \frac{dt}{\bar{R}(t)}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

则 (1.2.3) 化为

$$ds^2 = \bar{R}^2(t) [d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] = \bar{R}^2 ds^2 \quad (1.2.5)$$

式中 $ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ 为平直空-时度规. 由此可知, R-W 空-时和闵可夫斯基空-时是共形的, 即 R-W 空-时是共形平直的.

如果引入记号

$$f(\chi) = r = \begin{cases} \sin \chi, & \text{当 } k = +1; \\ \chi, & \text{当 } k = 0; \\ \text{sh} \chi, & \text{当 } k = -1, \end{cases} \quad (1.2.6)$$

则 R-W 度规 (1.2.1) 可改写为

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (1.2.7)$$

式 (1.2.7)、(1.2.3) 和 (1.2.1) 是 R-W 度规的三种不同形式.

在 (1.2.1) 中, $R(t)$ 称为宇宙半径 (或宇宙标度因子), k 标志空-时曲率. $k = +1, 0, -1$ 分别对应于子空间 M 的曲率 $K > 0, K = 0, K < 0$. 在 (1.2.1) 中作代换, 令 $\sqrt{k}r = \bar{r} (k > 0)$, 得

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{k} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.2.8)$$

空间部分可表示为

$$ds_{(3)}^2 = \frac{R^2(t)}{k} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.2.9)$$

由此可得

$$K_{(3)} = \frac{k}{R^2(t)}. \quad (1.2.10)$$

三维平直空间 $d\sigma^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$ 中的二维曲面 $\delta_{ij}x^i x^j = \frac{1}{K} = R$ 就是一个曲率为 K 的常曲率空间. 图 6-1 是三种情况的示意图.

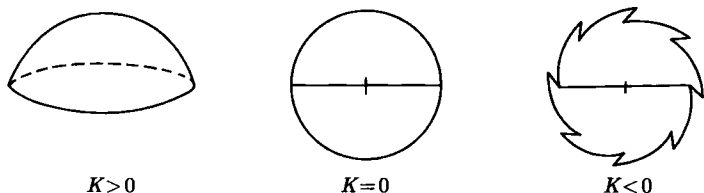


图 6-1

曲率为 K 的三维常曲率空间可以看作包容于四维平直空间的子空间 M .

1.3 空间距离和曲率

1. 固有空间距离

对于 R-W 度规 (1.2.1), 由坐标时与标准时的关系 $d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$, 可得

$$d\tau = dt. \quad (1.3.1)$$

所以在 R-W 空-时中, 坐标时即标准时, 也就是本章开头提到的宇宙时. 按照所选用的单位, $c = G = 1$, 我们有 $ds = d\tau = dt$.

考虑任意两恒星 A 和 B , 选择坐标轴的方向, 使 r 轴通过 AB , 则 A 和 B 的空间距离为

$$\begin{aligned} l &= \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{r_{ij}dx^i dx^j} = \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{-g_{11}}dr \\ &= R(t) \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

如果 r_A 和 r_B 固连, 则上式表明: 当 $R(t)$ 是时间 t 的增函数时, 任意两恒星间的空间距离都随时间增大, 即宇宙是膨胀的; 当 $R(t)$ 是时间 t 的减函数时, 任意两恒星的空间距离都随时间减小, 宇宙是收缩的; 当 $R(t)$ 为常数时, 宇宙是静态的.

2. 空间的曲率

我们讨论 $k > 0$, $k = 0$ 和 $k < 0$ 的三种宇宙空间.

(1) $k > 0$ 的宇宙空间. 在 $k > 0$ 的情况下, 积分 (1.3.2) 给出

$$l = \frac{R(t)}{\sqrt{k}} [\arcsin(\sqrt{k}r_B) - \arcsin(\sqrt{k}r_A)]. \quad (1.3.3)$$

上式表明, $\sqrt{k}r_B \leq 1$, $\sqrt{k}r_A \leq 1$, $l \leq \frac{\pi R(t)}{\sqrt{k}}$, 即任意时刻、任意两颗恒星 (空间任意两点) 间的距离都是有限的, 也就是说, 在任何给定的时刻, 宇宙空间中不存在相距无限远的两个点.

设 $r_A = 0$, 由 $(r_B)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 可以算出宇宙空间的体积

$$\begin{aligned} V &= \int \sqrt{-g} d^3x = \int_0^{1/\sqrt{k}} \sqrt{-g} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi R^3(t) \int_0^{1/\sqrt{k}} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &= \pi^2 R^3(t) k^{-3/2}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

任何时刻宇宙空间的体积都是有限的. 所以, $k > 0$ 的宇宙空间是有限的.

(2) $k < 0$ 的宇宙空间. 此时积分 (1.3.2) 给出

$$l = \frac{R(t)}{\sqrt{k}} \ln \frac{\sqrt{-kr_B} + \sqrt{1 - kr_B^2}}{\sqrt{-kr_A} + \sqrt{1 - kr_A^2}}. \quad (1.3.5)$$

上式表明, 任一时刻 AB 间的距离没有上限. 所以 $k < 0$ 的宇宙空间是无限的.

(3) $k = 0$ 的宇宙空间. 此时, 积分 (1.3.2) 给出

$$l = R(t)r. \quad (1.3.6)$$

显然, $k = 0$ 的宇宙空间也是无限的.

1.4 粒子和光子的行为

现在我们讨论粒子 (质点) 和光子在 R-W 空-时中的运动, 采用 (1.2.7). 在 (1.2.7) 的坐标系中, 一个静止的恒星相对于原点的固有 (纯空间) 位移 D 由式

$$D = \sqrt{-g_{11}}\chi = R(t)\chi \quad (1.4.1)$$

确定. 如果宇宙半径 R 随时间变化, 则恒星之间以及星系之间的距离也将随时间变化, 好像球面上两个固定点之间的距离 (沿球面上的短程线) 随着球半径的变化而变化一样. 由此产生的速度 $\dot{D}$ 和位移 D 成正比: