测绘科大学术丛书

现代大地控制网优化设计原理

XIAN DAI DA DI KONG ZHI WANG YOU HUA SHE JI YUAN LI

晁定波 薄志鹏 编著

武汉测绘科技大学出版社

现代大地控制网优化设计原理

晁定波　薄志鹏　编　著

（鄂）新登字 14 号

责任编辑：郑建军
封面设计：张　权

现代大地控制网优化设计原理
晁定波　薄志鹏　编著

武汉测绘科技大学出版社出版发行
本 社 激 光 照 排 部 照 排
（武 汉 市 珞 瑜 路 39 号）
武汉测绘科技大学铅印厂印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　印张：9.75　字数：244.61 千字
1991 年 9 月第一版　1991 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—2 000 册　　定价：4.90 元

ISBN 7-81030-126-81/P・21

前　言

长期以来，大地控制网（简称大地网）的设计一直是大地测量学者感兴趣的研究课题之一，到本世纪五十年代初已形成了一套经典的设计理论和方法。然而，随着生产实践的发展，这些理论和方法已无法满足人们对各种测量控制网所提出的日益精细的设计要求。近三十年来大地控制网优化设计方法得到迅速发展，成为大地控制网建网理论和方法的一个重要组成部分。它主要建立在数学规划理论与电子计算机这一有力计算工具的基础上，通过精密计算得到最合理的设计方案，从而获得良好的效益。

《现代大地控制网优化设计原理》一书是为大学高年级学生和研究生编写的一本教学参考书，它是在原课程讲义的基础上，在多年教学实践中修订并注意吸收最近几年国内外有关优化设计理论的新发展和新的研究成果，增补了有关大地网质量指标、形变与地球动力学监测网的优化设计等章节，以及算例编写而成的。它系统而扼要地介绍了数学优化的一般原理，现代大地控制网优化设计的基本理论与主要方法。着重阐明了各种准则矩阵的构成，观测权优化设计和附加观测值的优化设计方法等有实践意义的大地控制网优化设计的核心内容。随着地壳形变与地球动力学监测网的发展，优化设计理论在这类控制网的设计中得到广泛的应用，对此，本书增写了有关监测网优化设计的基本理论与方法，介绍了同时顾及网的灵敏度和可区分性指标的设计问题，以及全球动力学监测网优化设计模型。因此，本书亦可供从事于大地测量、工程测量和地震测量的科技人员学习参考。

现代大地控制网优化理论涉及的知识面比较广，文献资料十分丰富，限于我们的能力和水平，编写中难免有挂一漏万和不妥之处，敬请读者批评指正。

本书在编写和定稿过程中得到周江文教授和陶本藻教授热心帮助和精心审阅，并提出了宝贵意见。又承冯秦珍同志精心绘制本书全部图表，在此作者谨致谢意。

作 者

一九九0年七月

目　　录

第一章　最优化原理

§1—1　概　论

所谓最优化，顾名思义就是追求最好结果或最优目标的学问。人们在科学实验、工程设计、生产管理或研究社会经济问题中，总希望采取种种措施、妥善安排，以便在有限的人力、物力和财力的条件下，或规定的约束条件下取得最佳效果。最优化就是在相同的条件下，从所有的可能的方案中选取最佳的一个，以达到预定的或最优的目标的科学。

最优化问题的研究已有很久的历史。早在公元前 500 年毕达哥拉斯就已发现“黄金长方形”，即长方形的长与宽的最佳比率为 1.618，俗称“黄金分割比”。古希腊、欧洲的建筑师和美术家认为，在建筑、绘画中应用这个比例将使建筑和画面最优美、最协调。在微积分出现以前，已有许多人开始研究用数学方法解决最优化问题。例如公元前 200 年阿基米德已证明，给定周长圆所包围的面积最大。

在本纪世纪五十年代以前，解决最优化问题的数学方法仅限于古典求导方法和变分法（求无约束极值），或用拉格朗日乘数法解算等式约束下的条件极值问题。这类求可导函数或泛函数极值的必要充分条件称为古典最优化问题。由于科学技术的发展，实践中许多最优化问题已无法用古典方法来解决，又由于电子计算机这一有力计算工具的出现和发展，为最优化技术的发展提供了有效的手段。五十年代以来最优化理论发展很快，如凸规划及其有关理论、对偶性理论、关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件；与计算方法直接有关的诸如收敛性、收敛速度等方面的研究等都取得了很大进展。

最优化方法是一种数学方法，它的理论就是最优化理论。最优化方法与应用数学、计算机科学以及各专业领域有着密切的关系。

用最优化方法解决实际问题一般按以下步骤进行：

1. 由实际的生产或科技问题建立最优化的数学模型。

2. 分析模型，选择合适的求解方法。

3. 编制程序，用计算机求最优解。

在上述三步中，数学模型的建立是一件十分重要和困难的工作，需要人们依据自己掌握的专业知识和最优化理论，将具体问题抽象为数学问题。

1.1.1 最优化问题的基本概念

最简单的最优化问题在微积分中就是求函数极值问题。例如：

[例 1—1] 将边长为 a 的正方形铁板在四个角处剪去相等的正方形，以制成方形无盖水槽，问如何剪才能使水槽的容积最大？

解： 设剪去的正方形边长为 x(图 1-1)，与此相应的水槽容积为 V，则：

$$V = f(x) = (a - 2x)^2 x$$

按一般求函数极值的方法解得两处驻点：

$$x = \frac{1}{2}a, \quad x = \frac{1}{6}a$$

不难确定 $x=\frac{a}{6}$是所求解。

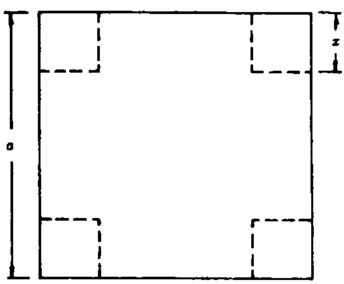

图 1-1

[例 1—2] 设计一个直角平行六面体，使其表面积等于 Q，且具有最大的体积。

解： 设直角平行六面体的长、宽、高分别为 x、y、z，依题

意有：

$$\max\{xyz\}$$

满足于 $$2(xy+yz+zx)=Q$$

运用拉格朗日乘数法解算这个带有条件（即约束）的函数极值问题。拉格朗日函数为：

$$L(x、y,z、\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+zx-\frac{Q}{2})$$

解得结果为：

$$x=y=z=(Q/6)^{1/2},\quad V=\sqrt{Q^3}/(6\sqrt{6})$$

以上两个例题都是微积分中典型的极值问题。它们虽然简单，可是代表了经典最优化的两类问题及其解法，即

1. 无约束极值问题，其数学模型为：

$$\min f(x_1,x_2,\cdots x_n),\quad 或$$
$$[\max f(x_1,x_2\cdots x_n)] \tag{1—1}$$

也可写成：

$$\min f(X),\quad 或\quad [\max f(X)]$$

其中 $X=(x_1、x_2\cdots x_n)^T$，$f(X)$是 n 维欧氏空间（E^n）中的向量函数，且为可微函数。其求解方法是从如下含有 n 个未知数 $x_1,\cdots x_n$ 的非线性方程组中解出驻点：

$$f_{x_k}(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}=0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

然后判定或验证这些驻点是否为极值点。

2. 具有等式约束的极值问题

$$\min f(X),\quad 或\quad [\max f(X)],\quad X\in E^n \tag{1—2}$$

满足于：$h_j(X)=0$，$(j=1,2,\cdots m)$，$m<n$

这类问题通常可转化为求拉格朗日函数：

$$L(X,\lambda)=f(X)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j h_j(X)$$

的无约束极值问题。

一般最优化问题的数学模型可以表示成如下形式：

$$\left.\begin{array}{lll} \min f(X) & & X \in E^n \\ s.t.^{*} & g_i(X) \geqslant 0 & i = 1,2\cdots l \\ & h_j(X) = 0 & j = l+1,\cdots\cdots m \\ & m < n & \end{array}\right\} \qquad (1\text{—}3)$$

其中 f,g_i,h_j 都是 X 的实值连续函数。所谓数学模型实质上就是一个现实生活系统的理想(合理简化的)表达形式。这个系统可以是已经存在的，也可以是一种还在等待实行的计划。模型的目的在前一种情况下，是分析系统的特性以便改进它的工作效能；而在后一种情况，目的是指出未来系统的最佳结构形式。

现实系统的复杂性是因控制(支配)系统特性的元素(变量)太多，然而这些变量中只是一小部分支配着系统的特性(一般称为决策变量)，所以可以用一个模型来简化现实系统。

一个数学模型包含三个基本因素：

1. 决策变量(或设计变量)和参数。决策变量是由模型的解所确定的未知数，这组未知数的一组定值就表示一个具体方案。参数表示系统的控制。一般模型的参数是可以确定的。

2. 约束或限制条件。为了考虑到系统的物质限制，模型必须包括把决策变量限制在可行(或允许)值之内的约束条件，这通常用约束条件式来表示。

3. 目标函数。它是决策变量的函数，用来衡量系统的效率。例如，如果系统的目标函数是要使总利润最大，则目标函数必须按决策变量确定利润。一般模型的最优解是在对应的决策变量满足所有的约束条件，并产生目标函数最佳值的时候得到。所以目标函数是作为达到最优解的一种标志。

最优化问题的一般数学模型(1—3)中只是求极小值，实际上

* $s.t.$——“满足于”，是“subject to ”的缩写。

求极大值和求极小值没有什么原则区别。因为求 $f(X)$ 的极大值相当于求 $-f(X)$ 的极小值，即 $\max f(X)$ 与 $\min\{-f(X)\}$ 具有相同的极值点（参见图 1-2）。

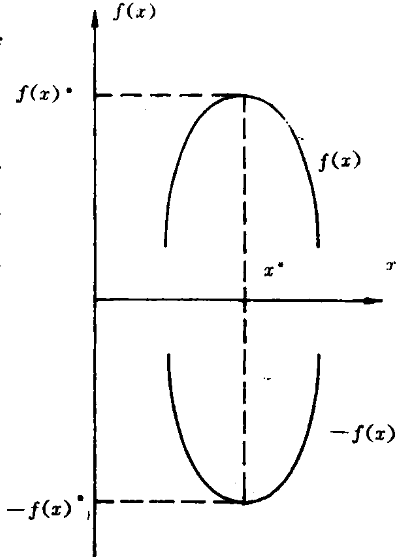

图 1-2

满足所有约束的向量 X 称为容许解或容许点，容许点的全体称为容许集。问题(1—3)所求的解是指在容许集中找到一点 X^*，使 $f(X)$ 在该点取得极小值，即

$$\left.\begin{aligned} f(X^*) &= \min f(X) \\ \text{s.t.}\quad G(X^*) &\geqslant 0 \\ H(X^*) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

这样的点 X^* 称为问题(1—3)的最优点，而相应的目标函数值 $f(X^*)$ 称为最优值，合起来(X^* 和 $f(X^*)$)称为最优解，但习惯上把 X^* 本身称为最优解。

1.1.2 最优化问题的分类及其求解方法

最优化问题可以按目标函数的性质，是否有约束条件，以及约束条件的性质分类。请见下图：

- 最优化问题
  - 静态问题
    - 无约束问题
      - 一维问题
      - n 维问题
    - 约束问题
      - 线性规划
      - 非线性规划
  - 动态问题

最优化问题的解若不随时间而改变，则称为静态最优化问题（参数最优化）；反之，若变量是时间 t 的函数，则称之为动态最优化问题，或最优控制问题。本书主要介绍静态最优化问题，有关动态最优化问题读者可自行阅读有关参考书。

当目标函数是二次型，约束条件是变量的一次函数，则该优化问题称为二次规划问题。二次规划是从线性规划到非线性规划的过渡，是最简单的一种非线性规划。在大地控制网优化中二次规划具有重要意义，这将在以后加以详细讨论。

关于最优化问题的求解方法，大致可分为间接法、直接法和以解析法为基础的数值计算法等。间接法（或称解析法）只适用于目标函数及约束有明显的解析表达式的情况，当目标函数较复杂，或不能用变量显函数表示时，则无法用解析法求出必要条件，此时可采用直接搜索法，经多次迭代搜索找到最优点。以解析法为基础的数值计算法也是一种直接法，但它是以梯度法为基础，所以是一种解析与数值计算相结合的方法。

§1—2　线性规划

线性规划是最简单，应用最广泛的一种数学规划方法。1947年丹切格（G. B. Dantzig）提出了求解一般线性规划问题的单纯形法后，线性规划方法得到了迅速发展，在理论上日趋成熟。目前线性规划方法已广泛用于各个领域，从解决技术中的最优化问题，到各行各业的计划、管理和决策都可以发挥它的作用。

线性规划不仅本身具有普遍的实用意义，而且是非线性规划一些解法的基础。因此，它是最优化的一个重要的组成部分。

1.2.1　基本概念

线性规划是求定决策变量 X，使线性目标函数 $f(X)=C^TX$ 在满足约束 $AX\leqslant(=,\geqslant)b$ 的条件下为最优值。线性规划的数学模

型如下：

$$\left.\begin{array}{l} \min(\max) f(X) = C^T X \quad , \quad X \in E^n \\ \text{s. t.} \qquad AX \leqslant (=, \geqslant) b \\ \qquad\qquad X \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (1—4)$$

其中

$$X = (x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)^T$$

$$C = (c_1, c_2, \cdots\cdots C_n)^T$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots\cdots b_m)^T, \qquad b \geqslant 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

c_j 是目标函数中变量 x_j 的系数($j=1,2,\cdots n$)；b_i 是第 i 个约束式的常数($i=1,\cdots,m$)；a_{ij}是第 i 个约束式中变量 x_j 的系数。n 称为线性规划的维数，m 为线性规划的阶数。

式(1—4)具有多样性，为了便于讨论，我们规定线性规划问题的标准形式为：

$$\begin{array}{l} \min f(X) = C^T X, \quad X \in E^n \\ \text{s. t.} \qquad AX = b, \quad b \geqslant 0 \\ \qquad\qquad X \geqslant 0 \end{array} \qquad (1—5)$$

任何一个线性规划都可以化成上述标准形式。如：

1、若求目标函数 Z 的最大值，即要求 $\max Z = C^T X$，这时只需将求目标函数的最大值变换为求目标函数的最小值，即

$$\max Z = -\min(-Z) \qquad (1—6)$$

命 $Z' = -Z$，于是有：

$$\min Z' = C^T X$$

约束条件不动，就得到一个标准形式的新的线性规划问题。求出新问题的最小值后，乘以 -1，就得到原问题的最大值。

2、当第 i 个约束条件为 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geqslant b_i$(或$\leqslant bi$)时，可以引入松弛变量 $x_{ni} \geqslant 0$，将其改写成