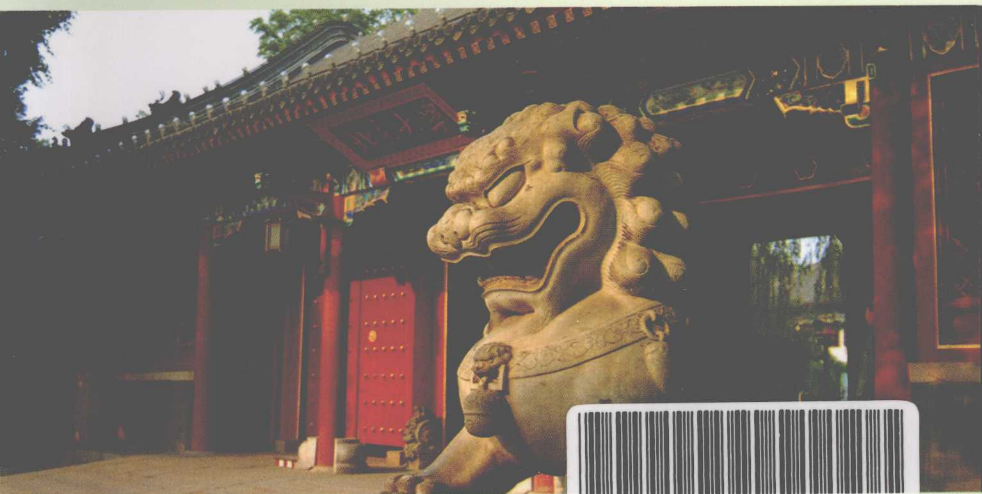
Oxbridge
津桥文教

中国高校自主招生联考应试指南

总主编◎徐丰



全国10所高中名校自主招生辅导班教师联袂编写
“北约”“华约”“工科联盟”旗下7所院校参与审定
全国28所重点高中强化班推荐使用

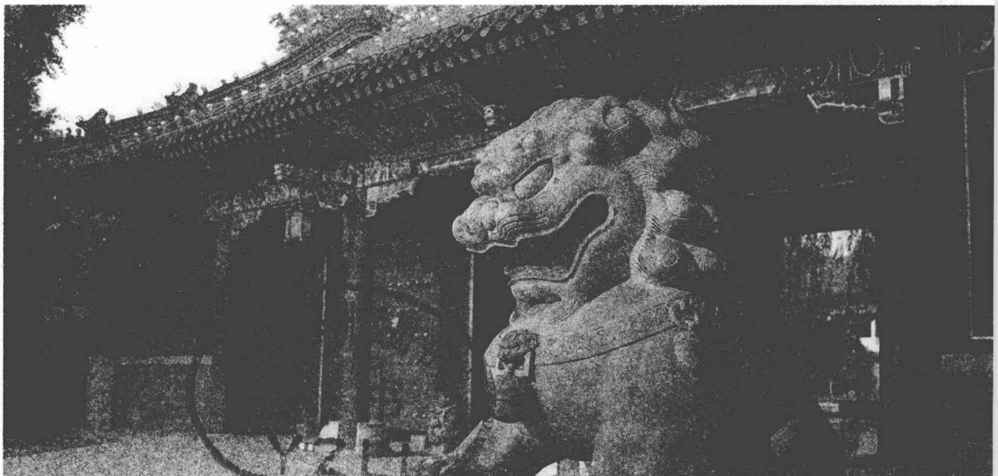
数学

东南大学出版社

Oxbridge
津桥文教

总主编◎徐丰

中国高校自主招生联考应试指南



本册主编　徐永忠

数学

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中国高校自主招生联考应试指南．数学/津桥书局主编．
—南京：东南大学出版社，2011．9
ISBN 978－7－5641－2665－0

Ⅰ．①中…　Ⅱ．①津…　Ⅲ．①数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 030381 号

书　　名	中国高校自主招生联考应试指南．数学
出版发行	东南大学出版社
经　　销	各地新华书店
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
印 刷 者	南京新洲印刷有限公司
开　　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
总 印 张	58
总 字 数	1160 千字
版　　次	2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5641－2665－0
定　　价	140．00 元(共 5 册)

东大版图书若有印装质量问题，请直接联系读者服务部，电话：025－83794332。

目录 Contents

专题一 函数及其性质

真题解析

例 1 (2008 年浙江大学)已知 $a>0$, $b>0$, $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$, 求 $\frac{b}{a}$ 值.

【解析】 设 $a>0$, $b>0$, $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)=k$, 则

$a=9^k$, $b=12^k$, $a+b=16^k$,

所以 $9^k+12^k=16^k$. 两边同除以 12^k 得

$\left(\frac{3}{4}\right)^k+1=\left(\frac{4}{3}\right)^k$, 即 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2k}-\left(\frac{4}{3}\right)^k-1=0$,

所以 $\left(\frac{4}{3}\right)^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\therefore \frac{b}{a}=\frac{12^k}{9^k}=\left(\frac{4}{3}\right)^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

注: 本题考查了指数、对数的运算以及常用变形技巧.

例 2 (2007 年北京大学)已知 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|$, 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)$.

【解析】 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|=(x-4)(x-49)+|(x-4)(x-49)|$

当 $4\leqslant x\leqslant 49$ 时, $(x-4)(x-49)\leqslant 0$, 此时 $f(x)=0$,

因此 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=f(1)+f(2)+f(3)+f(50)=2(144+94+46\times 2)=2\times 330=660$.

注: 本题考查了学生审题能力和观察、分析能力.

例 3 (2009 年浙江大学)已知 $a\geqslant\frac{1}{2}$, 设二次方程 $f(x)=-a^2x^2+ax+c$, 其中 a、c 均为实数, 求证: 对于任意 $x\in[0,1]$ 均有 $f(x)\leqslant 1$ 的充要条件是 $c\leqslant\frac{3}{4}$.

【解析】 $f(x)\leqslant 1\Leftrightarrow -a^2x^2+ax+c\leqslant 1$,

注意到 $f(x)$ 的对称轴 $x=\frac{a}{2a^2}=\frac{1}{2a}$,

因为 $a\geqslant\frac{1}{2}$, 所以 $0<\frac{1}{2a}\leqslant 1$, 故 $-a^2x^2+ax+c\leqslant 1$,

$x\in[0,1]\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant 1\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqslant 1\Leftrightarrow c+\frac{1}{4}\leqslant 1\Leftrightarrow c\leqslant\frac{3}{4}$.

注: 本题考查了二次函数的有关性质, 特别要重视对称轴在解题中的作用.

例 4 (2010 年复旦大学)参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(a>0)$ 所表示的函数 $y=f(x)$ 是 ( )

A. 图象关于原点对称　　B. 图象关于直线 $x=\pi$ 对称

C. 周期为 $2a\pi$ 的周期函数　　D. 周期为 2π 的周期函数

【解析】 本题的参数方程要转化为普通方程难度很大，故只有结合选择支逐项检查. 对于选项 A，t 变为 $-t$，x 变为 $-x$，但此时 y 的值并不改变，故选项 A 不正确；对于选项 B，设 $M(a(t_0-\sin t_0),\ a(1-\cos t_0))$ 是图象上一点，M 关于直线 $x=\pi$ 的对称点 $M'(2\pi-a(t_0-\sin t_0),\ a(1-\cos t_0))$，显然 M' 不一定恒在 $y=f(x)$ 的图象上，故选项 B 不正确；对于选项 C，设 $M(a(t_0-\sin t_0),\ a(1-\cos t_0))$ 是 $y=f(x)$ 图象上一点，由于 $2a\pi+a(t_0-\sin t_0)=a(2\pi+t_0-\sin t_0)=a[(2\pi+t_0)-\sin(2\pi+t_0)]$，而 $a(1-\cos t_0)=a[1-\cos(2\pi+t_0)]$，即 t_0 用 $2\pi+t_0$ 代替后的点 $M'(a[(2\pi+t_0)-\sin(2\pi+t_0)],\ a[1-\cos(2\pi+t_0)])$ 也在 $y=f(x)$ 的图象上，且这里 t_0 是任意实数，故选项 C 正确.

注: 本题考查函数的有关性质，要掌握常用性质的判断方法. 与参数方程结合，增加了学生理解的难度.

例 5 （2011 年北约 13 校）求 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+\cdots+|2\,011x-1|$ 的最小值.

【解析】 当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=(x-1)+(2x-1)+\cdots+(2\,011x-1)=1\,006\times 2\,011x-2\,011$，

$f(x)$ 是增函数，所以当 $x=1$ 时取得最小值，$f(x)_{\min}=1\,005\times 2\,011$.

当 $x\leqslant\dfrac{1}{2\,011}$ 时，$f(x)=-(x-1)-(2x-1)-\cdots-(2\,011x-1)=-1\,006\times 2\,011x+2\,011$

$f(x)$ 是减函数，所以当 $x=\dfrac{1}{2\,011}$ 时取得最小值，$f(x)_{\min}=1\,005$.

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2\,011},\ 1\right)$ 时，若 $x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{1}{n}\right](1<n<2\,010)$，则 $nx-1<0$，$(n+1)x-1>0$，

$$f(x)=(1-x+1-2x+\cdots+1-nx)+[(n+1)x-1+(n+2)x-1+\cdots+2\,011x-1]$$

$$=n-\frac{n(n+1)}{2}x-(2\,011-n)+\frac{(n+1+2\,011)(2\,011-n)}{2}x$$

$$=\frac{x}{2}[(n+2\,012)(2\,011-n)-n(n+1)]+2n-2\,011$$

$$=\frac{x}{2}(-2n^2-2n+2\,012\times 2\,011)+2n-2\,011$$

$$=x(-n^2-n+2\,011\times 1\,006)+2n-2\,011$$

设 $g(n)=-n^2-n+2\,011\times 1\,006$，它是一个开口向下的抛物线，有一正一负两个零点. 因为 $g(1\,422)<0$，$g(1\,421)>0$. 所以当 $1\leqslant n\leqslant 1\,421$ 时，$g(n)>0$，此时 $f(x)$ 是增函数，即在区间 $\left[\dfrac{1}{1\,421},\ 1\right]$ 上 $f(x)$ 是增函数，在区间 $\left[\dfrac{1}{2\,011},\ \dfrac{1}{1\,422}\right]$ 上 $f(x)$ 是减

函数，当 $x\in\left[\frac{1}{1\,422},\frac{1}{1\,421}\right]$ 时，此时 $n=1\,421$，$f(x)=2\,404x+831$ 增函数，故 $x=\frac{1}{1\,422}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，其最小值为 $2\,404\times\frac{1}{1\,422}+831=\frac{1\,202}{711}+831$.

关键点拨

一、函数的图象与性质

1. 函数的图象：当 $x\in D$ 时，坐标为 $(x, f(x))$ 的点所对应的集合称为函数 $y=f(x)$ 的图象，其中 D 是函数的定义域.

2. 函数性质：奇偶数、单调性、周期性.

(1) 对称性

① 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称. 特别地，当 $a=b=c=0$ 时，该函数为奇函数.

② 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称. 特别地，当 $a=b=0$ 时，该函数为偶函数.

③ 函数 $y=f(a+x)$ 的图象与满足 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

(2) 函数对称性和周期性之间的关系

① 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

② 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图象关于点 $M(a, 0)$ 成中心对称，且其图象关于直线和 $x=b(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4(b-a)$ 是它的一个周期.

③ 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图象关于点 $M(a, y_0)$ 和 $N(b, y_0)(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

3. 图象变换：平移变换、对称变换.

二、二次函数

1. 定义：形如 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函数，当 a、b、c 确定时，二次函数唯一确定，它的图象是一条抛物线.

2. 二次函数的三种表示形式

① 一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

② 顶点式：$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq 0)$；

③ 交点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根(也叫双根式).

研究二次函数时，应根据不同的条件，选择不同的表示形式.

3. 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与一元二次方程、一元二次不等式有非常

紧密的联系，研究时：

常用知识有：① 判别式、② 韦达定理、③ 求根公式等.

常用方法有：数形结合法，充分注意二次函数的图象.

常用结论有：

① 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在区间 $[p, q]$ 端点处的函数值异号，即 $f(p)\cdot f(q)<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 在 (p, q) 内恰有一个实根.

② 当 $a>0$ 时，函数的图象是下凸形曲线，即对于任意 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；当 $a<0$ 时，函数的图象是上凸形曲线，即对于任意 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

这个性质称抛物线的凸性，利用二次函数图象的凸性和单调性，在某些与二次方程的根的范围有关的问题中，可避免使用判别式和求根公式.

三、抽象函数问题

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图象，只给出一些函数符号及其满足的条件的函数. 它是高中函数部分的难点，也是与高等数学中函数部分的联系比较紧密的部分. 由于此类试题既能考查函数的概念和性质，又能考查学生的思维能力，所以备受命题者的青睐.

解决的办法常有：

(1) 性质分析法——只要充分挖掘、利用题设条件和隐含的性质，灵活地进行等价转化，就能将抽象函数问题化验证为易. 常用的方法有：① 利用奇偶性整体思考；② 利用单调性等价转化；③ 利用周期性回归已知；④ 利用对称性数形结合；⑤ 借助特殊点列方程. 这是因为函数的特征常可通过其性质(如奇偶性、单调性、周期性等)反映出来的.

(2) 特殊化方法——对抽象函数中的变量或函数进行特殊化，常用方法有：

① 可以试用 x 换成 $-x$ 或将 x 换成其他字母等；

② 在求函数值时，可用特殊值代入；

③ 研究抽象函数的具体模型，用具体模型解选择题、填空题，或通过具体模型函数的研究为解答综合题提供思路和方法.

模拟训练

一、选择题

1. (2010 年复旦) 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的函数，如果对于任意满足 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 的 x, y 都有 $f(x)\leqslant f(y)$，则称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的递增函数. 那么，$f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非递增函数应满足 ( )

A. 存在满足 $x<y$ 的 $x, y\in[a, b]$，使得 $f(x)>f(y)$；

B. 不存在 $x, y\in[a, b]$ 满足 $x<y$ 且 $f(x)\leqslant f(y)$；

C. 对于任意满足 $x<y$ 的 $x, y\in[a, b]$，都有 $f(x)>f(y)$；

D. 存在 $x<y$ 满足 $x, y\in[a, b]$，使得 $f(x)\leqslant f(y)$.

2. (2008 年复旦) 设 $a>0, a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{(a^x+1)x}{a^x-1}$，则 (　　)

A. $f(x)$和 $g(x)$均为奇函数
B. $f(x)$和 $g(x)$均为偶函数
C. $f(x)$为偶函数，但 $g(x)$为奇函数
D. $f(x)$为奇函数，但 $g(x)$为偶函数

3. (2007 年复旦) 设函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 均满足 $f(2+x)=f(2-x)$，且方程 $f(x)=0$ 恰好有 7 个不同的实根，则这 7 个不同实根的和为 (　　)

A. 0　　B. 10　　C. 12　　D. 14

4. (2007 年武汉大学) 已知函数 $f(x)=\ln\left(\dfrac{2}{1-x}+a\right)$ (a 为常数) 是奇函数，则 $f(x)$ 的反函数是 (　　)

A. $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}(x\in\mathbf{R})$　　B. $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}(x\in\mathbf{R})$

C. $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}(-1<x<1)$　　D. $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}(-1<x<1)$

5. (2006 年复旦) 设 $f(x)$是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数，且是偶函数. 已知当 $x\in[2, 3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2, 0]$ 时，$f(x)$的解析式为 (　　)

A. $x+4$　　B. $2-x$　　C. $3-|x+1|$　　D. $2+|x+1|$

6. (2010 年复旦) 设实数 $x, y\geqslant 0$，且满足 $2x+y=5$，则函数 $f(x, y)=x^2+xy+2x+2y$ 的最大值是 (　　)

A. $\dfrac{97}{8}$　　B. $\dfrac{195}{16}$　　C. $\dfrac{49}{4}$　　D. $\dfrac{25}{2}$

7. (2010 年复旦) 对函数 $F:[0, 1]\to[0, 1]$，定义 $f_1(x)=f(x), \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$n=2, 3, 4, \cdots$. 满足 $f_n(x)=x$ 的点称为 f 的一个 $n-$周期点. 现设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，问 f 的 $n-$周期点的个数是 (　　)

A. $2n$ 个　　B. $2n^2$ 个　　C. 2^n 个　　D. $2(2n-1)$ 个

8. (2009 年复旦) 定义全集 X 的子集 $A\subsetneqq X$ 的特征函数为 $f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in \complement_X A\end{cases}$ 这里，$\complement_X A$ 表示 A 在 X 中的补集. 那么，对 $A, B\subsetneqq X$，下列命题中不正确的是 (　　)

A. $A\subsetneqq B\Leftrightarrow f_A(x)\leqslant f_B(x)$，$\forall x\in X$
B. $f_{\complement_X A}(x)=1-f_A(x)$，$\forall x\in X$
C. $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)f_B(x)$，$\forall x\in X$
D. $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$，$\forall x\in X$

二、填空题

1. (2008年上海交大)函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ 的最大值为________.

2. (2008年上海交大)若 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$,$g(x)=f^{-1}(x)$,则 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=$ ________.

3. (2008年上海交大)已知 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$,则 $f(x)$ 的最小正周期是________.

4. (2002年复旦)从奇偶性看:函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是________.

5. (2009年科大)$y=\ln(x^2-4|x|+3)$ 的定义域是________.

6. (2008年上海交大)已知函数 $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$,对于 $n=1,2,3,\cdots$,定义 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$,则 $f_{28}(x)$ 的解析表达式为________.

三、解答题

1. (2009年南京大学)函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数,满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$.

   (1) 证明:$f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$;

   (2) $f(4)=-4$,求 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x-12}\right)\geqslant-12$ 的解集.

2. (2004年同济)试利用三角函数求函数 $f(x)=4-2x^2+x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值与最小值.

3. (2001年交大)已知函数 $f(x)=x^2+2x+2$,$x\in[t,t+1]$ 的最小值是 $g(t)$,试写出 $g(t)$ 的解析表达式.

4. (2000 年交大)若 x、y 满足 $x^2-2xy+y^2-\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+12=0$，求下列表达式的最小值：① $x+y$；② xy；③ x^3+y^3.

5. (2004 年上海交大)已知 $f_1(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$，对于一切正整数 n，都有 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ 且 $f_3(x)=f_6(x)$，求 $f_{28}(x)$.

6. (2006 年上海交通大学)若有函数 $f(x,\ y)=a(x)b(y)+c(x)d(y)$，其中 $a(x)$，$c(x)$ 为关于 x 的多项式，$b(y)$，$d(y)$ 为关于 y 的多项式，则称 $f(x,\ y)$ 为 P 类函数. 判断下列函数是否是 P 类函数，并说明理由.

(1) $1+xy$；(2) $1+xy+x^2y^2$.

7. (2005 年清华)已知 $f(x)$ 满足：对 $\forall a,\ b\in\mathbf{R}$，有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$，且 $|f(x)|\leqslant 1$. 求证：$f(x)$ 恒为零.

专题二 函数与方程

真题解析

例1 (2008年复旦大学)设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+x+2=0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$ ( )

A. -4　　B. -1　　C. 0　　D. 2

【解析】 由三次方程的韦达定理得 $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$, $x_1x_2x_3=-2$,所以 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=-(x_1+x_2+x_3)^3+3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=0$.

答案 C

注:本题只要了解行列式的基本知识,运用三次方程的韦达定理即可解决.

例2 (2007年上海交通大学)设 $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a$,

试证明:对任意实数 a,

(1) 方程 $f(x)=0$ 总有共同实根;

(2) 存在 x_0,恒有 $f(x_0)\neq 0$.

证明:(1) $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a=(x^4-3x^2-4)a+x^4+x^3-2x^2$

令 $g(a)=(x^4-3x^2-4)a+x^4+x^3-2x^2$

考虑 $\begin{cases} x^4-3x^2-4=0, \\ x^4+x^3-2x^2=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=\pm 2, \\ x=0,\ 1,\ -2, \end{cases}$ 故 $x=-2$ 时, $f(x)=g(a)=0$,

即对任意实数 a,方程 $f(x)=0$ 总有共同实根 $x=-2$;

(2) 由(1)知 $x=2$ 时,对任意实数 a, $f(2)=16\neq 0$,所以取 $x_0=2$,得证.

注:本题若看成关于 x 的四次多项式,则很难分解;从另一个角度,转换参数,将 $f(x)$ 看成一个关于 a 的一次函数,值得回味.

例3 (2008年复旦大学)方程 $3x^2-e^x=0$ 的实根 ( )

A. 不存在　　B. 有一个　　C. 有两个　　D. 有三个

【解析】 此方程属于超越方程,没有精确解,只能用数形结合的方法来解决.显然方程有且只有一个小于0的解,那么有多少个大于0的解呢?许多同学画出草图后认为只有一个.事实上,认真分析后就可发现有两个大于0的解.理由如下:

令 $f(x)=3x^2-e^x$,则 $f(0)=-1$, $f(1)=3-e>0$, $f(5)=75-e^5<0$,

由于 $f(0)\cdot f(1)<0$，$f(1)\cdot f(5)<0$，由零点存在定理知：开区间 $(0,1)$ 和开区间 $(1,5)$ 内各有一个根。故有两个正根和一个负根，本题应选 D.

注：本题是一道易选错的题目，主要由于图象的局限性而错选答案 C.

例 4 (2008 年南开大学数学特长班)方程 $x^3+px^2+qx+1=0$ 有三个实根，且 $p>0$，$q>0$. 求证：$pq\geqslant 9$.

【解析】 设这三个实根为 α,β,γ. 由韦达定理知：$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-1$，显然 α,β,γ 中必有一个小于 0，其余两个同正、负.

不妨设 $\alpha<0$. 若 $\beta>0$，$\gamma>0$，则 $\alpha=-\beta-\gamma-p<-\beta-\gamma$，

又 $0<q=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma$，$\beta\gamma\leqslant\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)^2$，

所以 $0<q\leqslant(\beta+\gamma)\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{4}\right)\Rightarrow 4\alpha+\beta+\gamma>0$，

但是 $\alpha+\beta+\gamma<0$，且 $\alpha<0$，所以 $4\alpha+\beta+\gamma<0$，矛盾.

从而 $\beta<0$，$\gamma<0$. 由均值不等式 $p=(-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)\geqslant 3\sqrt[3]{(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)}=3$，

$q=(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)+(-\gamma)(-\alpha)\geqslant 3\sqrt[3]{(-\alpha)^2(-\beta)^2(-\gamma)^2}=3$，

所以 $pq\geqslant 9$.

注：本题考查了三次方程的韦达定理及逻辑推理能力.

例 5 (2009 年上海交通大学)若 $f(f(x))$ 有唯一不动点，则 $f(x)$ 也有唯一不动点.

【解析】 不妨设 x_0 是 $f(f(x))$ 的唯一不动点，即 $f(f(x_0))=x_0$，令 $f(x_0)=t$，则 $f(t)=x_0$，那么，$f(f(t))=f(x_0)$，而 $f(x_0)=t$，故 $f(f(t))=t$，这说明 t 也是 $f(f(x))$ 的不动点. 由 $f(f(x))$ 只有唯一不动点知，$x_0=t$. 从而 $f(t)=t$，这说明 t 是 $f(x)$ 的不动点，存在性得证.

下面证明唯一性：若 $f(x)$ 还有另一个不动点 t'，即 $f(t')=t'(t'\neq t)$，则 $f(f(t'))=f(t')=t'$，这说明 $f(f(x))$ 还有另一个不动点 $t'(t'\neq t=x_0)$，与题设矛盾.

注：当 $f(x)=x$ 时，x 的取值称为不动点. 利用不动点原理可以解决某些问题，如某些递推数列求通项问题，不动点问题也是自主招生考试中的热点问题.

关键点拨

一、函数方程的概念

函数方程的定义；函数方程的解；解函数方程.

二、方程的根与函数的零点

(1) 零点：对于函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

(2) 方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

(3) 定理：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使

得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

三、一元 n 次方程的韦达定理，特别是一元三次方程的韦达定理

一般的，设三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个根分别是 x_1，x_2，x_3，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

它的证明可由：$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ 展开，比较 x 的同次项系数即得.

四、函数方程的解法

1. 待定系数法——当函数方程中的未知函数是多项式函数时，可用此法经比较系数而得.

2. 变量代换法(或换元法)——把函数方程中的自变量适当地以其他的自变量代换(代换时应注意使函数的定义域不会发生变化)，得到一个新的函数方程，然后设法求得未知函数.

3. 递推法(或迭代法)——由函数方程找出函数值之间的关系，通过 n 次递推(或迭代)得到函数方程的解法.

4. 柯西法——在 $f(x)$ 单调(或连续)的条件下，利用柯西函数方程的解求解.

柯西(Cauchy)方程：一个定义在有理数集上的实值函数 f，对一切有理数 x 和 y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证明：对一切有理数都有 $f(x)=cx$，这里 $c=f(1)$ 为实常数.

第一步，先考虑 x 是任意整数的情形，若 x 为正整数 n，则用数学归纳法可证 $f(n)=nf(1)=nc$，又由 $0=f(0)=f(n+(-n))=f(n)+f(-n)$，知 $f(-n)=-f(n)=f(1)\cdot(-n)$. 从而对一切整数 x 都有 $f(x)=xf(1)=xc$.

第二步，再考虑 x 为整数的倒数的情形，假设 n 为正整数，反复运用等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，可得

$$f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\cdots=nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

即 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\dfrac{1}{n}$.

又由 $0=f(0)=f\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ 知：$f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

故对一切整数的倒数 x，也都有 $f(x)=xf(1)=xc$.

第三步，最后设 x 为任意有理数. 记 $x=\dfrac{m}{n}$，其中 m 和 n 是互质的整数，$n>0$. 此

时有：$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-2}{n}\right)=\cdots=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\frac{m}{n}$.

故对一切有理数 x，都有 $f(x)=xf(1)=xc$.

说明：若满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的函数 $f(x)$ 连续，则可用极限的思想证明结论对任意实数皆成立.

五、整系数多项式的根

若既约分数 $\frac{q}{p}$（即 $(p,q)=1$，$p\neq 0$，$p,q\in\mathbf{Z}$）为整系数多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根，则 $p\mid a_n$，$q\mid a_0$.

推论 1　首项系数为 1 的整系数多项式的有理根必是整数根.

推论 2　整系数多项式的整数根，必是常数项 a_0 的约数.

模拟训练

一、选择题

1. (2006 年复旦)方程 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 3x-5\end{vmatrix}=0$ 的实根的个数为（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无实根

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意实数 x 满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(5-x)=f(5+x)$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在区间 $[-18,18]$ 上至少有零点（　　）

A. 10 个　　B. 11 个　　C. 12 个　　D. 13 个

3. 设 a 是一个实数，则方程组 $\begin{cases}(a+1)x+8y=4a,\\ ax+(a+3)y=3a-1\end{cases}$ 解的情况为（　　）

A. 无论 a 取何值，方程组均有解　　B. 无论 a 取何值，方程组均无解

C. 若方程组有解，则仅有一组解　　D. 方程组有可能无解

4. (2006 年复旦)设函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 均满足 $f(5+x)=f(5-x)$，且方程 $f(x)=0$ 恰好有 6 个不同的实根，则这 6 个实根的和为（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 18　　D. 30

5. (2008 年复旦)已知关于 x 的方程 $x^2-6x+(a-2)|x-3|+9-2a=0$ 有两个不同的实数根，则系数 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$ 或 $a=-2$　　B. $a<0$

C. $a=2$ 或 $a>0$　　D. $a=-2$

6. (2008 年复旦)方程 $(x-3)^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}}=1$ 的解的个数为（　　）

A. 一个　　B. 两个　　C. 三个　　D. 四个

7. (2006 年武大)若 $y=f(x)$ 有反函数，则 $f(x)=a$（a 为常数）（　　）

A. 无实数根　　B. 只有一个实数根

C. 至多有一个实数根　　D. 至少有一个实数根

8. (2008 年复旦)当不等式 $\tan^2(\cos\sqrt{4\pi^2-x^2})-4a\tan(\cos\sqrt{4\pi^2-x^2})+2+2a\leqslant 0$ 关于 x 有有限个解时,a 的取值是 (　　)

A. 全体实数　　B. 一个唯一的实数

C. 两个不同的实数　　D. 无法确定

二、填空题

1. (2007 年交大)设 $a>0$ 且 $a\neq 1$,则方程 $a^x+1=-x^2+2x+2a$ 的解的个数为________.

2. (2004 年复旦)已知 $|5x+3|+|5x-4|=7$,则 x 的范围是________.

3. (2004 年交大)已知 $1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$,则方程 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{2}-|x|$ 的相异实根的个数是________.

4. (2003 年交大)三次多项式 $f(x)$ 满足 $f(3)=2f(1)$,且有两个相等的实数根 2,则第三个根为________.

5. (2003 年复旦)解方程 $x^{\log_a x}=\dfrac{x^3}{a^2}$, $x=$________.

6. (2005 年交大)已知 $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{\sqrt{3}x}-\sqrt{\sqrt{3}y}$, $x, y\in\mathbf{R}$,则$(x, y)=$________.

7. (2008 年武大)若关于 x 的方程 $a\cdot 4^x-a\cdot 2^{x+2}+6a-3=0$ 在 $x\in[0, 2]$ 上有解,则实数 a 的取值范围是________.

8. (2005 年上海交大)已知 $n\in\mathbf{Z}$,有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{2\,004}\right)^{2\,004}$,则 $n=$________.

三、解答题

1. (2007 年北大)解方程组 $\begin{cases}xy=2x+y-1,\\ yz=2z+3y-8,\\ xz=4z+3x-8.\end{cases}$

2. (2002 年复旦)参数 a 取何值时,$\dfrac{\log_a x}{\log_a 2}+\dfrac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}=\dfrac{1}{\log_{a^2-1}2}$:

(1) 有解?

(2) 仅有一解?

3. (2006 年交大)已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $abc \neq 0$, $b \neq c$, $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ 有两个相等根,求证:$\frac{1}{a}$,$\frac{1}{b}$,$\frac{1}{c}$成等差数列.

4. (2006 年交大)设 $k \geqslant 9$,解方程 $x^3 + 2kx^2 + k^2x + 9k + 27 = 0$.

5. (2004 年交大) $f(x) = ax^4 + x^3 + (5-8a)x^2 + 6x - 9a$,证明:对任意实数 a,(1) 总有 $f(x) = 0$;(2) 总有 $f(x) \neq 0$.

6. (2009 年交大)求方程 $x = \sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}$ (n 重根)的解.

7. (2008 年上海交通大学)已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$,且 $f(x) = x$ 没有实数根,试判断 $f[f(x)] = x$ 是否有实数根,并证明你的结论.

8. (2006 年复旦)试构造函数 $f(x)$, $g(x)$,其定义域为(0, 1),值域为[0, 1].

(1) 对于任意 $a \in [0, 1]$, $f(x) = a$ 只有一解;

(2) 对于任意 $a \in [0, 1]$, $g(x) = a$ 有无穷多个解.