



楊維哲教授的數學講堂

人人是資優生，
人人可以是資優生
數學要讀向前，
不是溫故知新

簡單整數論

$$b = a \times q + r$$

$$\text{hcf}(8, 12, 36) = 4$$

$$\text{lcm}(8, 12, 36) = 72$$

資優專家台大 楊維哲 教授為中學生編寫的數學專書



G634.02
20091

楊維哲教授的數學講堂

人人是資優生，書

人人可以是資優生

數學要讀向前，

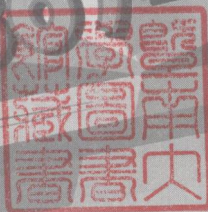
不是溫故知新

簡單整數論

$$b = a \times q + r$$

$$\text{hcf}(8, 12, 36) = 4$$

$$\text{lcm}(8, 12, 36) = 72$$



資優專家台大 楊維哲 教授為中學生編寫的數學專書

國家圖書館出版品預行編目資料

楊維哲教授的數學講堂：簡單整數論／楊維哲
編著．一初版．一臺北市：五南，2008.02

面；公分．

I S B N: 978-957-11-5119-9 (平裝)

1.數學教育 2.數論 3.中等教育

524.32

97001554



5Q11

楊維哲教授的數學講堂—— 簡單整數論

編 著 — 楊維哲(313.5)

發行人 — 楊榮川

總編輯 — 龐君豪

主 編 — 黃秋萍

責任編輯 — 蔡曉雯

封面設計 — 莫美龍

出 版 者 — 五南圖書出版股份有限公司

地 址：106 台北市大安區和平東路二段 339 號 4 樓

電 話：(02)2705-5066 傳 真：(02)2706-6100

網 址：<http://www.wunan.com.tw>

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

劃撥帳號：01068953

戶 名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室 / 台中市市區中山路 6 號

電 話：(04)2223-0891 傳 真：(04)2223-3549

高雄市駐區辦公室 / 高雄市新興區中山一路 290 號

電 話：(07)2358-702 傳 真：(07)2350-236

法律顧問 得力商務律師事務所 張澤平律師

出版日期 2008 年 2 月初版一刷

定 價 新臺幣 280 元



PREFACE

[序言]

這本書分成上中下三部分，終於問世的主要理由是在「上部」（當然也就是主部），「最最簡單的整數論——給初中資優生的」。

對於資優教育，我一向主張採取一個簡單可行的方案；養成獨立學習的習慣、態度！我相信這是一切教育的要點（資不資優，都不重要！）。不論是何種研習營，不拘長短（兩足天、或五天、或十三天、或兩月），如果讓我掌理教務，我一定堅持這個做法：指定（或者編好）一個教材，讓他們閱讀、思考、習作；我以及一些別的老師和助教，會穿插巡迴，個別地加以指導，或者，叫大家暫停，聽我的演講（如果我們發現這個題目或概念是他們共同的困難所在）。這本書的大半，就是這樣子的教材。

最初等的整數論是非常好的題材，這是絕無可疑的了：題材本身有趣，非常容易理解，與許多代數有關聯！

這本書的主部（1—11 章）曾經有三次版本與試用。

最先是在 1983 年，和平國中的數學班，他們的數學老師是陳文隆，教正課；我的課外講演，每週兩節，除了陳君之外，尤其有姚多老師的幫助，她的完美的記錄，給我非常大的方便！我的演講，絕對是第一流的（即使是，或者說尤其是，面對初一生），永遠是 *impromptu*！但正因為如此，我毫無可能在講完之後加以整理，我非常感謝她！

其次是在一次初三生的三天研習營，記得是在劍潭的中國青年反共救國團的活動中心；這時候強調自習；受我之託擔任助教的三人之中，記得有柏中！我已經忘掉：當時的反共救國團是算做「國的」（因為，照規定，高一入學



簡單整數論

時，學生就已經自動入團，教育部長必定是反共救國團副主任），或者是黨的，（因為蔣主任的意思也許是要扶植孝武而非馬錦濤為主任？）（現在想來有點撫今傷昔：如果把「反共」改為「媚共」，數學上只是「乘以負一」；那些學生很會類推（analogy）（因為類推是學習的重點！），他們馬上說：如果把「救國」改為「賣國」，數學上只是「乘以負一」！但是 signum 函數，可以有三個值， $+1, -1, 0$ ？正確的類推是：「如果把『反共』拿掉，數學上只是『乘以零』！」）

最後一次，就是在濱江國中的這個寒假研習營；一樣是只有三天；我曾經思考過用初等幾何做題材，但覺得勝算稍遜，還是選擇這個「最最簡單的整數論」做主題；我請濱江的老師們（李青憲、郭盈瑜、陳建豪）整本先讀過一遍，然後幫我擬定教學戰略：哪些習題該做？在何處插入適宜的思考題？何處插入遊戲？

我們的結論是：

1. 學生們只是初一，純粹的自習也有點困難！所以還是以演講為主。
2. 我不能也不需要講太多，留一些他們能夠而且應該自行閱讀思考的題材！
3. 多講一些故事，多要他們做一些遊戲！
4. 整個宗旨是：希望能夠鼓舞一些數學熱誠！那麼在寒假中，他們可以想很多的數學！

濱江的蘇萍校長、李世宏教務主任與李玉華輔導主任，全力的支持，籌備工作做得很好！而在三天的研習中，李君、郭君與蘇輝煌三人又認真擔任助教！所以研習營非常成功！我應該順便謝謝她們！

現在這本簿書的主部（但是刪掉一些例解），就是濱江此次發給研習營學生的講義。除了（主）上部之外，中下兩部分當然是補充。假定的學生程度高一點！意思是這兩部分，可以做為完整的中學生的整數論。我回想起小時候，在台中一中，閱讀（漢譯）Weber 的數學（小）全書第一冊（算術）的情形！從初一到高三，幾乎年年借！（至今想來，鄭太朴的譯文不算太好！）我希望這本書對於我國的小孩可以發揮更好的效能！

接下來 12—15 四章是「中部」，主要是知識的補充，包括：Euler-Fermat 的一些算術函數，法餘的對數（對於一個原始根），平方餘數（與互逆律），然後有整數與整式的類比，這是由算術導向代數。

然後我試著做更「代數的」解說，這就是下部 16—18 三章，包括集合與映射，代數體系，第十八章 $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m$ ，以題為「中學生的整數論」來說，這是可有可無的部分！但是對於許多優秀的學生來說，一定會覺得這部分是簡易、有趣，而且有刺激的。

楊維哲

CONTENTS

[目錄]

序言

01

CHAPTER

預備

1

- 1.1 幾個公式 1
- 1.2 記號 4

02

CHAPTER

多角形數

7

- 2.1 梯形原理 7
- 2.2 多角形數 8
- 2.3 堆垛數 11
- 2.4 歸納法 13

03

CHAPTER

因數與倍數

15

- 3.1 自然數系中的因數與倍數 15
- 3.2 整數系中的因數與倍數 16
- 3.3 整組合定理 18
- 3.4 九餘法與十一餘法 19



04 CHAPTER

3.5 一些代數.....	21
---------------	----

整數論中的原子論

23

4.1 化學的素樸的原子論.....	23
4.2 數論裡的原子論.....	24
4.3 乘法可換可締.....	27
4.4 算術基本定理.....	29
4.5 因數的個數.....	31
4.6 質因數補題.....	32
4.7 質數無限多.....	33
4.8 Eratosthenes.....	35

05 CHAPTER

公因數與公倍數

39

5.1 最高公因數：遞推.....	39
5.2 最低公倍數.....	41
5.3 日曆.....	44

06 CHAPTER

輾轉相除法

49

6.1 數與量.....	49
6.2 進位制.....	50
6.3 帶餘除法.....	52
6.4 輾轉相除法.....	54



6.5	兩個度量問題	57
6.6	輾轉互度法	58
6.7	不可共度	60

07

CHAPTER

畢氏與歐氏

63

7.1	教祖	63
7.2	$\sqrt{2}$ 是無理數	64
7.3	黃金分割	66
7.4	歐氏折磨	70
附錄：歐氏折磨與 Fibonacci 數列		71

08

CHAPTER

埃及連分數

73

8.1	單元分數	73
8.2	整數線性組合	74
8.3	連分數	75
8.4	無限埃及連分數	77

09

CHAPTER

進位制

81

9.1	從十進位制談起	81
9.2	二進位制	82
9.3	其他進位制	85
9.4	進位制與運算	86
9.5	數學遊戲	89



10 CHAPTER

一些不定方程式

97

10.1 二元一次不定方程	98
10.2 二元高次不定方程	101
10.3 勾股數 (Pythagoras 數)	102

11 CHAPTER

一些同餘式

109

11.1 同餘	109
11.2 一次同餘式	112
11.3 多元的情形	114
11.4 孫子定理 : Lagrange 方法	115
11.5 Newton 的方法	116
11.6 同餘的除法與倒逆	118
11.7 循環小數	122

12 CHAPTER

Fermat-Euler 點滴

129

12.1 Fermat 小定理	129
12.2 成對原理	131
12.3 Euler-Fermat 的小定理	133
12.4 Euler 互質類數函數	134
12.5 幾個算術函數的乘性	137
12.6 Euclid-Euler 序列	140
12.7 乘性函數的累和	142
12.8 插值原理	144



13

CHAPTER

整數論中的對數

149

13.1 指階數	149
13.2 對於質數的原始根	151
14.3 法餘對數	154

14

CHAPTER

平方餘數

157

14.1 Legendre 記號	157
14.2 互逆律	160
14.3 其他的平方剩餘	162
14.4 平方和問題	164

15

CHAPTER

整數與整式

167

15.1 數與式	167
15.2 hcf	170
15.3 因式定理	175
15.4 質因式分解	178
15.5 既約多項式	180

16

CHAPTER

集合與映射

187

16.1 集合	187
16.2 兩集的種種運作	190
16.3 映射	193

17

CHAPTER

16.4	列	197
16.5	多變元映射	206
16.6	商集	210

代數體系

(217)

17.1	有序體	217
17.2	環與分配系	219
17.3	半群	221
17.4	群	222
17.5	體系的同態與同構	224
17.6	Möbius 反轉公式	227

18

CHAPTER

系統 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$

(231)

18.1	加法半群 $\mathbb{N}$ 的子系	231
18.2	加法半群 $\mathbb{N}$ 的商系	236
18.3	加法群 $\mathbb{Z}$ 的子系	238
18.4	加法群 $\mathbb{Z}$ 的商系 $\mathbb{Z}_m$	240
18.5	有限可換群	246
18.6	環 $\mathbb{Z}_m$	251
18.7	法可逆群 $\mathbb{Z}_m^\times$ 與原始根	255

CHAPTER 1

[預備]

1.1 幾個公式

【平方公式】

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2 * X * Y + Y^2$$

習題 1 求下各數的平方！

15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 245, 995

解 這一題的意思很清楚！

後面三個，要強調心算： $10 * 11 = 110$ ； $24 * 25 = 660$ ； $99 * 100 = 9900$

因此

$$105^2 = 11025 ; 245^2 = 60025 ; 995^2 = 990025$$

習題 2 求以下的近似值！（小數點之下第 5 位）

$$1.00002^2 ; 2.00002^2 ; 10.00003^2$$

解 強調：

$1.00002^2 \approx 1.00004$ ； $2.00002^2 \approx 4.00008$ ； $10.00003^2 \approx 100.0006$ ；（零的個數！）

【二項式公式】

這是推廣上述公式！

$$(X+Y)^n = X^n + \dots + C_m^n * X^{n-m} * Y^m + \dots + Y^n$$

這些係數叫做二項係數或 Pascal 係數； C_3^5 是第 5 列第 3 行元素！（只是你都要從零算起！）

[illegible]

【Pascal 定理】

每一列的一個係數都是上一列的兩個之和！

$$C_m^n = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \cdots * \text{共 } m \text{ 個}}{m * (m-1) * (m-2) * \cdots * 1}$$

因此，如果 $n=p$ 是質數，除了 $C_0^p=1=C_p^p$ 以外， $C_1^p, C_2^p, \cdots, C_{p-1}^p$ ，都是 p 的倍數！

習題 3

習題 3 求算： $11^2, 11^3, 11^4$



強調：這就是二項公式頭四個！121, 1331, 14641

討厭的是 1, 5, 10, 10, 5, 1，因而

$$11^5 = 161051$$

習題4 求以下的近似值！（小數點之下第5位）

$$1.01^3; 1.02^3; 1.002^3; 1.0003^3$$

解 強調：末二題，只要展到二次與一次項！

$$1.01^3 = 1.030301; 1.02^3 = 1.061208; 1.002^3 \approx 1.006012; 1.0003^3 \approx 1.00090$$

【平方差公式】

$$X^2 - Y^2 = (X - Y) * (X + Y)$$

習題5 求算： $98 * 102$; $51 * 49$; $104 * 106$; $34 * 36$

解 $98 * 102 = 10000 - 4$; $51 * 49 = 2500 - 1$

$$104 * 106 = 11025 - 1; 34 * 36 = 1225 - 1$$

習題6 求算： $803 * 807$

解 $803 * 807 = 648024$

【割圓恆等式】

這是推廣上述公式！

$$X^3 - Y^3 = (X - Y) * (X^2 + X * Y + Y^2)$$

$$X^4 - Y^4 = (X - Y) * (X^3 + X^2 * Y + X * Y^2 + Y^3)$$

$$X^5 - Y^5 = (X - Y) * (X^4 + X^3 * Y + X^2 * Y^2 + X * Y^3 + Y^4)$$

⋮

習題7 求算：

$$(X + Y + Z)^2; (X + Y + Z + U)^2; (X + Y + Z + U + V)^2$$

$$(X + Y + Z - U - V + W)^2; (x^2 + 3x + 1)^2$$

解 強調：和的平方，是平方的和，加上所有交叉項的兩倍！

$$(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + (3^2 + 2)x^2 + 6x + 1$$

習題8 分解因式： $x^3 \mp y^3$; $(x^6 - y^6)$ 。

解 $x^3 - y^3 = (x - y) * (x^2 + x * y + y^2)$

用 $-y$ 代 y ，因此：

$$x^3 + y^3 = (x + y) * (x^2 - x * y + y^2)$$

於是

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3 + y^3) * (x^3 - y^3) \\ &= (x + y) * (x^2 - x * y + y^2) * (x - y) * (x^2 + x * y + y^2) \end{aligned}$$

註（強調！）若 n 為奇數，則 $x^n + y^n$ 有因式 $x + y$ 。

1.2 記號

1.2.1 集合記號

【記號很重要】

數學是一種「語文」（language），「語文」要使用「文字」，「數學文」中使用的「文字」，除了用一些「拉丁（與希臘）字母」去湊出文字記號，用（印度）「阿拉伯數碼」去湊出「數目」之外，還使用一些記號。

你當然知道四則運算記號： $+$ ， $-$ ， $*$ ， $\div$ ；我們的乘法記號寧可用這個 $*$ ，因為現在用電腦時，通常用這個！除法也經常用 $/$ 。

【地板函數】

我們用 $\text{floor}(x)$ 表示「不大於 x 的最小整數」！例如：

$$\text{floor}(\pi) = 3 \quad (\text{因為圓周率 } \pi = 3.415926 \cdots)$$

$$\text{floor}(\sqrt{5}) = 2 \quad (\text{因為 } \sqrt{5} = 2.236 \cdots)$$

$$\text{floor}(-\pi) = -4$$

$$\text{floor}(1 + 3 - 2^2) = 0$$

$$\text{floor}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1$$

$$\text{但是 } \text{floor}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{floor}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{floor}\left(\frac{1}{6}\right) = 0$$

註 Gauss 符號：有許多書用的記號是 $[\pi] = 3$ ， $[\sqrt{5}] = 2$ ；我覺得：這種記號太方便了！不應該使用！

註 Maple 的句式：當然就用 floor。

習題 1

對於 $m = 1, 2, \dots, 12$ ，計算 $g = \text{floor}(2.6 * m - 2.2)$ 。



$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g =$	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

【語句的記號】

我們寫：

$x \in \mathbb{Z}$ ，表示「 x 是一個整數（interger）」。

$x \in \mathbb{N}$ ，表示「 x 是一個正（positive）整數」。

這兩句話可以如此否定：（我們寫：）

$x \notin \mathbb{Z}$ ，表示「 x 不是一個整數」。

$x \notin \mathbb{N}$ ，表示「 x 不是一個正整數」。

註 同樣地，後面我們用 $x \in \mathcal{P}$ ，表示「 x 是一個（正）質數（prime）」；用 $x \notin \mathcal{P}$ ，表示「 x 不是一個（正）質數」。

【自然數】

我用「自然數」，意思是「正整數」！非常明顯地「把零排除在外」！換句話說：我認為「零不是自然數」。

「零」是「很高級的觀念」！事實上到了第十世紀，歐洲人才學到零！

如何把零包含進來？我們寫：

$x \in \mathbb{N}_0$ ，表示「 x 是一個非負（non-negative）整數」。

在本書中，我們所用到的三、四個最重要的「集合」，就是整數系 $\mathbb{Z}$ 、自然數 $\mathbb{N}$ 、非負整數系 $\mathbb{Z}_+$ 、（正）質數系 $\mathcal{P}$ ：