高等数学

——及其教学软件

习题选解

（上 册）

集美大学理学院数学系
集美大学诚毅学院数学教研室 编

科学出版社
www.sciencep.com

高 等 数 学

——及其教学软件
习题选解

（上册）

集 美 大 学 理 学 院 数 学 系
集美大学诚毅学院数学教研室 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是与教材《高等数学——及其教学软件(第三版)》(上海交通大学，集美大学)配套的习题选解. 全书共有上、下两册，内容包括教材中 A 类习题的选解和 B 类习题的全解. 本书在解答中注意分析解题思路，便于学生自学.

本书可以作为高等工科院校工学、经济学等各专业“高等数学”课程的配套辅导，也可作为相关教师和工程技术人员用书和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：及其教学软件习题选解. 上册/集美大学理学院数学系，集美大学诚毅学院数学教研室编. —北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-028625-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①集…②集… Ⅲ.①高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158415 号

责任编辑：姚莉丽 唐保军 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/2
印数：1—5 500 字数：250 000

定价：21.00 元

前 言

本套《高等数学——及其教学软件习题选解》是与教材《高等数学——及其教学软件(第三版)》配套编写的,在试用两年后正式出版.

教材中每一节后面的习题分为 A 类和 B 类,A 类是基本的要求,B 类具有提高的性质(含近几年硕士研究生部分入学考题). 为了留给学生一些基本题让他们自主完成,我们只对 A 类习题作部分解答,B 类习题难度相对高一些,我们给出了全部解答,便于学生提高解题能力.

在解答中我们注意分析解题思路,让学生从中得到启发且便于自学. 希望这套习题选解能为学生自主学习高等数学提供支持,为教师教学提供参考.

由于编写时间仓促,习题选解中可能有不足之处,热忱希望各位专家、教师和学生提出宝贵意见.

E-mail:sjweng@jmu.edu.cn

编　者

2010 年 3 月

目　录

第 1 章　函数与模型

习题 1.1(A)

2. 判断下列函数是否相同，并说明为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$ 和 $\varphi(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 和 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 不相同. $f(x)$ 的定义域为 $D(f)=\{x\mid x\neq0\}$，而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $D(\varphi)=\{x\mid x>0\}$.

(3) 相同. 因为定义域相同，对应法则也相同.

3. 设 $f(x)=x^3$，求 $f(x+h)$ 和 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，其中 $h\neq0$.

解

$$f(x+h)=(x+h)^3,$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

5. 求下列所给曲线对应的函数：

(3) 圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分.

解　(3) $y=\sqrt{2x-x^2}$，　$x\in[0,2]$.

7. 圆球形的气球充气后膨胀. 如果气球的半径的增长率为 1.5(cm/s)，试把气球的体积 $V(\mathrm{cm}^3)$ 表示成时间 t 的函数.

解　半径为 $r=1.5t(t>0)$，

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}=4\pi\frac{(1.5t)^3}{3}=\frac{9}{2}\pi t^3\quad(t>0).$$

9. 试确定下列函数是否有界，并说明原因.

(2) $f(x)=x^2-x$，在区间 $(2,8]$ 上.

解　(2) 有界. 因为 $x\in(2,8]$，$|f(x)|=|x^2-x|=\left|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right|\leqslant56$.

11. 下列函数中，哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $f(x)=x^3-\sin2x$；　　　　(3) $f(x)=\sin x-\cos x+1$.

解　(1) 奇函数. 因为

$$f(-x)=(-x)^3-\sin 2(-x)=-(x^3-\sin 2x)=-f(x).$$

(3) 非奇非偶. 因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x),$$

且

$$f(-x)\neq -f(x).$$

12. 已知函数 $f(x)$定义在对称区间上,设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

问 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的奇偶性如何? $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的和是什么?

解　$\varphi(x)$为偶函数,因为

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x);$$

$\psi(x)$为奇函数,因为

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x).$$

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x).$$

14. 已知 $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$,求函数 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$及其定义域.

解　$f[g(x)]=\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$,定义域为$[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$g[f(x)]=\sqrt{\frac{1}{x-1}+2}=\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$. 因为

$$\begin{cases}x-1\neq 0,\\ \dfrac{2x-1}{x-1}\geqslant 0,\end{cases}$$

所以定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

16. 下列函数是否为初等函数? 为什么?

(1) $y=1-\sqrt{2x-1}$;

(4) $y=\begin{cases}x^2+1, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ \sin\pi x-2, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

解 (1) 是,可以分解为 $y=1-u, u=\sqrt{v}, v=2x-1$. 它是由常数和幂函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的.

(4) 不是,因为在其定义域上不能用一个解析式子表示.

习题 1.1(B)

1. 求下列函数的定义域、值域,并画出草图:

(1) $f(x)=|x^2-1|$; (2) $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

解 (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,如图 1.1.1 所示.

(2) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$,如图 1.1.2 所示.

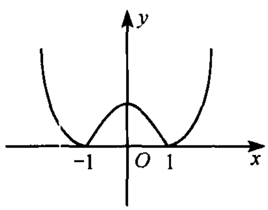

图 1.1.1 第 1(1)题图

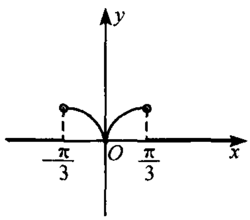

图 1.1.2 第 1(2)题图

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x-1)$; (2) $f(\cos x)$.

解 (1) 定义域为 $[0,\ln 2]$. 因为 $0\leqslant e^x-1\leqslant 1$,所以 $1\leqslant e^x\leqslant 2$,即 $0\leqslant x\leqslant \ln 2$.

(2) 由 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$,得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. 故定义域为 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right], k\in\mathbf{Z}$.

3. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x+4}, h(x)=3x-1$,试求函数 g 使 $g[f(x)]=h(x)$.

解 令 $t=f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ 即 $x=\dfrac{1}{t}-4$,代入 $g[f(x)]=h(x)$,有 $g(t)=3\left(\dfrac{1}{t}-4\right)-1=\dfrac{3}{t}-13$,故

$$g(x)=\frac{3}{x}-13.$$

4. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解　令 $\sin\frac{x}{2}=t$，由 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+1-2\sin^2\frac{x}{2}$，有

$$f(t)=1+1-2t^2=2-2t^2,$$

故 $f(x)=2-2x^2$. 从而

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2=2-(1+\cos x)=1-\cos x.$$

5. 已知 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=f[f\cdots f(x)]$.

解　$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$f_3(x)=f\{f[f(x)]\}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}};$$

……

$$f_n(x)=f[f\cdots f(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

6. 求双曲正弦函数 $y=\sinh x$ 的反函数，并讨论它的特性.

解　$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，令 $e^x=t$，$t>0$，有 $t^2-2yt-1=0$，则

$$t=y+\sqrt{y^2+1},$$

故 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，即反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 它是无界、单调、奇函数和非周期函数.

7. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥，试将圆锥的体积 V 表示为高 h 的函数，并说明其定义域.（提示：外切于球的圆锥的高可以变化.）

解　设圆锥的底面半径为 R（图 1.1.3），则有 $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}{h}$. 即

$$R=\frac{rh}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}=\frac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}}.$$

于是

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2}{h^2-2hr}\cdot h$$
$$=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2}{h-2r}\quad(2r<h<+\infty).$$

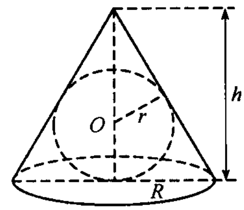

图 1.1.3 第 7 题图

8. 用直线 $y=-x+t$（t 为可变的参数）截割正方形 $OABC$，如图 1.1.4 所示，求截得的阴影部分的面积 S 关于 t 的函数，并求其定义域.

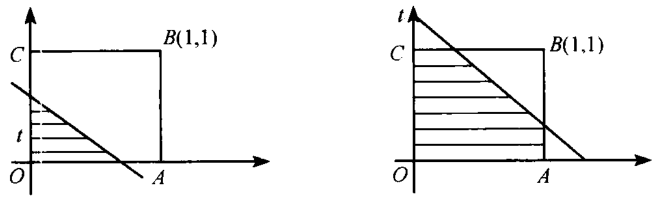

图 1.1.4 第 8 题图

解
$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}t^2-(t-1)^2=-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2.\end{cases}$$

9. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数，并求此函数的定义域(图 1.1.5).

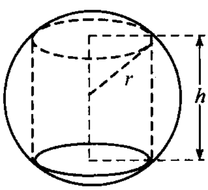

图 1.1.5 第 9 题图

解
$$V=\pi\left[r^2-\left(\frac{1}{2}h\right)^2\right]\cdot h$$
$$=\pi\left(r^2-\frac{1}{4}h^2\right)\cdot h,\quad 0<h<2r.$$

10. 某城市的人口 P，从 1980 年到 1990 年的统计数字如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1 第 10 题表 （单位：万人）

t/年份	1980	1982	1984	1986	1988	1990
P(人口数)	71	73	78	87	102	123

(1) 画出 P 作为时间 t 的函数的图形（先描点后用光滑曲线连接）；

(2) 利用这个图形来估计 1989 年该城市的人口数.

解 (1) 见图 1.1.6；

(2) $P=112$.

11. 把一张半径为 R 的圆形铁片自中心处剪去中心角为 α 的一个扇形后围成一

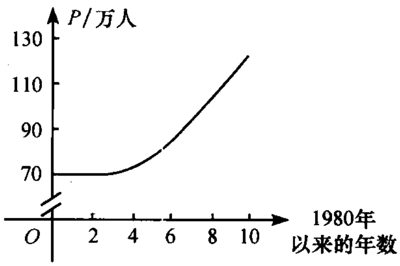

图 1.1.6　第 10 题图

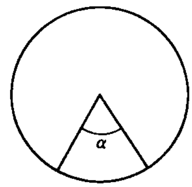

图 1.1.7　第 11 题图

个无底的圆锥(图 1.1.7),试将这个圆锥的体积 V 表示为 α 的函数,并求其定义域.

解　设圆锥底面半径为 x,高为 h,则 $2\pi x=(2\pi-\alpha)R$,于是

$$x=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\cdot R,\quad h=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2\cdot R^2}{4\pi^2}}.$$

从而

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{(2\pi-\alpha)^2\cdot R^2}{4\pi^2}\cdot\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2\cdot R^2}{4\pi^2}}$$
$$=\frac{1}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot R^3\cdot\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\quad(0<\alpha<2\pi).$$

12. 已知一水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$,如图 1.1.8 所示,当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求四周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系,并说明定义域.

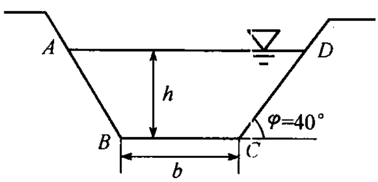

图 1.1.8　第 12 题图

解　$$AB=CD=\frac{h}{\sin 40°},$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(b+b+2h\cdot\tan 50°)\cdot h=S_0,$$

故

$$BC=b=\frac{S_0-h^2\cdot\tan 50°}{h},$$

$$L=AB+BC+CD=\frac{2h}{\sin 40°}+\frac{S_0-h^2\cdot\tan 50°}{h}\quad(0<h<\sqrt{S_0\tan 40°}).$$

13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　对任意的 $-l<x_1<x_2<0$,有 $0<-x_2<-x_1<l$,又 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上为奇函数,故 $f(-x_1)=-f(x_1)$,$f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(x)$ 又在 $(0,l)$ 内单调增加,所以 $f(-x_2)<f(-x_1)$,于是 $-f(x_2)<-f(x_1)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,故 $f(x)$ 在

$(-l,0)$内也是单调增加的.

14. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积也是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数;

(3) 定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 (1) 假设$f_1(x)$和$f_2(x)$为定义在$(-l,l)$上的偶函数,$g_1(x)$和$g_2(x)$为定义在$(-l,l)$上的奇函数. 令$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$,则有

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=f(x),$$
$$g(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-g(x),$$

故$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数.

(2) $h(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,$k(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,$l(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$,则

$$h(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=h(x),$$
$$k(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=-g_1(x)\cdot[-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=k(x),$$
$$l(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)\cdot[-g_1(x)]=-f_1(x)\cdot g_1(x)=-l(x),$$

即$h(x)$为偶函数,$k(x)$为偶函数,$l(x)$为奇函数.

(3) 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$上的任意函数,令

$$f_1(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

则

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

易知$f_1(x)$为奇函数,$f_2(x)$为偶函数.

习题 1.2(A)

1. 已知自变量x和因变量y的值如下表所示,

(1) 试判断y与x之间的关系是否线性函数关系并说明理由;

(2) 写出y作为x的函数的表达式.

x	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
y	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

解 (1) $\frac{29.2-27.8}{5.3-5.2}=\frac{1.4}{0.1}=14,\quad \frac{30.6-29.2}{5.4-5.3}=14,$

$$\frac{32.0-30.6}{5.5-5.4}=\frac{1.4}{0.1}=14,\quad \frac{33.4-32.0}{5.6-5.5}=14.$$

故 y 与 x 之间的关系为一线性函数.

(2) 令 $y=ax+b$,$a=14$,将 $x=5.2$,$y=27.8$ 代入,得 $b=-45$,故 $y=14x-45$.

3. 求下列表格表示的函数的可能的表达式:

(1)

x	0	1	2	3
y	4.30	6.02	8.43	11.80

(2)

t	0	1	2	3
u	5.50	4.40	3.52	2.82

解　(1) $\frac{6.02}{4.30}=1.4000$,　$\frac{8.43}{6.02}=1.4003$,　$\frac{11.80}{8.43}=1.3998$. 从以上计算知比例非常接近,精确到小数点后一位,则都是 1.4. 故 $y=4.30(1+0.4)^x$.

(2) $\frac{4.40}{5.50}=0.8000$,　$\frac{3.52}{4.40}=0.8000$,　$\frac{2.82}{3.52}=0.8001$. 从以上计算知比例非常接近,精确到小数点后三位,则都是 0.800,故 $u=5.50(1-0.200)^t=5.50\cdot 0.8^t$.

5. ^{226}Ra 的半衰期为 1620 年. 若 ^{226}Ra 的初始量为 Q_0,

(1) 写出 t 年后 ^{226}Ra 的剩余量的表达式;

(2) 500 年后 ^{226}Ra 的剩余量是初始量的百分之几?

解　(1) 设衰减率为 r,^{226}Ra 的含量为 Q,依题意有

$$Q=Q_0(1-r)^t,$$

由半衰期为 1620 年,知 $(1-r)^{1620}=\frac{1}{2}$,则 $1-r=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1620}}$,于是 t 年后剩余量 $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}$.

(2) 500 年后 ^{226}Ra 的剩余量为 $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1620}}=0.8074Q_0$,即为初始量的 80.74%.

6. 试估计当 x 多大时 $4^x>x^4$ 恒成立.

解　如图 1.2.1 所示.

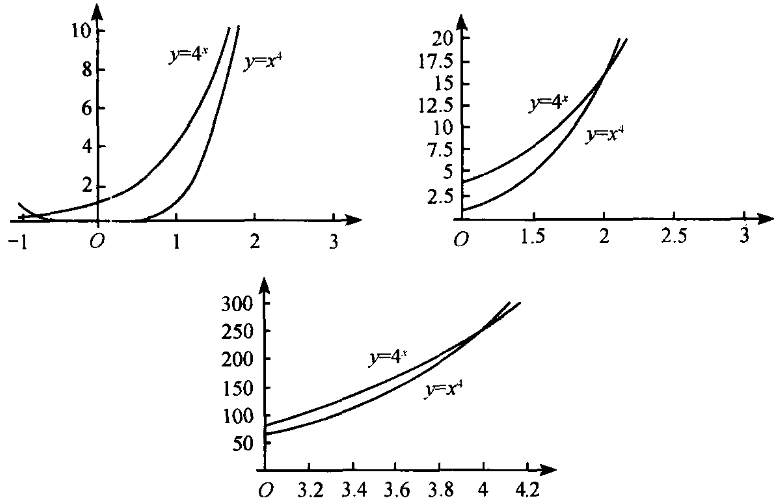

图 1.2.1　第 6 题图

由图 1.2.1 知当 $x>4$ 或 $-0.77<x<2$ 时，$4^x>x^4$ 成立.

习题 1.2(B)

1. A 租车公司提供的汽车每天租金为 220 元，每千米附加费为 1.2 元，B 租车公司提供的汽车每天租金为 250 元，每千米附加费为 0.8 元.

(1) 分别写出两家公司出租一天汽车的费用作为行驶里程的函数；

(2) 在同一坐标上画出两函数的图形；

(3) 问租哪一家公司的车比较合算？

解　(1) 设出租一天的费用为 y 元，行驶里程数为 x 千米.

A 租车公司：$y=220+1.2x$，

B 租车公司：$y=250+0.8x$.

(2) 如图 1.2.2 所示.

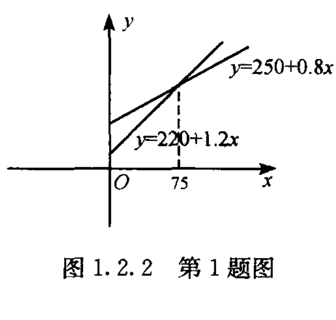

图 1.2.2　第 1 题图

(3) 当里程数小于 75 千米时，A 租车公司合算，当里程数大于 75 千米时，B 租车公司合算，里程数等于 75 千米时，费用相同.

2. 设某地区商品房价格从 1980 年每平方米 1800 元上涨到 2000 年每平方米 3000 元，设 t 表示 1980 年以来的年数，

(1) 若房价的增加是线性的，写出房价 P 作为年数 t 的函数；

(2) 若房价呈指数增长，以形式 $P=P_0\cdot a^t$ 给出 1980 年至 2000 年房价随年

数 t 变化的函数关系；

(3) 分别画出以上两个函数的图形；

(4) 若房价呈指数增长，能否以形式 $P=P_0e^{kt}$ 表示房价随年数 t 变化的函数关系？

解　(1) 设 $P=at+b$，将 $t=0,P=1800;t=20,P=3000$ 代入，得 $a=60,b=1800$，即得 $P=60t+1800$.

(2) 设 $P=P_0\cdot a^t$，将 $t=0,P=1800;t=20,P=3000$ 代入，得

$$a=1.0259,\quad P_0=1800,$$

即得 $P=1800(1.0259)^t$.

(3) 如图 1.2.3.

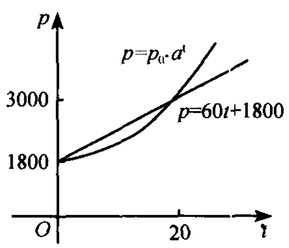

图 1.2.3　第 2 题图

(4) 假设可以表示成形式 $P=P_0e^{kt}$，将 $t=0,P=1800;t=20,P=3000$ 代入得

$$P=1800\cdot e^{0.0256t}.$$

3. 20 世纪 60 年代初，某地区因核试验释放出同位素 ^{90}Sr 并进入当时活在世上的人的骨骼中，如果 ^{90}Sr 的半衰期是 29 年，那么 2000 年这些受核试验影响的人的骨骼中 ^{90}Sr 还剩百分之几？

解　设 ^{90}Sr 的初始量为 y_0，剩余量为 y，距 60 年代时间为 t，衰减率为 r，由题意知

$$y=y_0(1-r)^t,$$

由半衰期为 29 年，知 $(1-r)^{29}=\frac{1}{2}$，即 $(1-r)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{29}}$，2000 年这些受核试验影响的人的骨骼中 ^{90}Sr 剩余 $(1-r)^{40}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{29}}\approx 0.3844$，即还剩 38.44%.

4. 由于改良种子品种和推广新的农业技术，某地区的粮食产量提高了. 在 20 年内粮食产量变化如下(单位：百万吨)：

1980	1985	1990	1995	2000
5.35	5.90	6.49	7.05	7.64

同期人口数为(单位：百万)

1980	1985	1990	1995	2000
53.2	56.9	60.9	65.2	69.7